سلسلۂ نصابات علمیہ جامعۂ عثمانیہ

علم مثلث مستوی

حصۂ اوّل

انٹرمیڈیٹ کے لئے برناے ٹرگنومٹری لونی حصہ اول

مترجمۂ

قاضی محمد حسین صاحب ایم۔اے (پنجاب)

بی۔اے، ایل ایل۔بی (کیمبرج) رینگلر ۱۹۱۴ء فرا ایگزبشنر (پنجاب)

گورنمنٹ آف انڈیا سکالر کیمبرج (ریاضیات) اینول ایگزبشنر کیمبرج (ریاضیات)

اینول فونڈیشن سکالر کیمبرج (ریاضیات)

رکن سررشتۂ تالیف و ترجمہ

جامعۂ عثمانیہ

سنہ ۱۳۳۸ھ مطابق سنہ ۱۳۲۹ف مطابق سنہ ۱۹۱۹ع

مطبوعۂ دارالطبع سرکار عالی حیدرآباد دکن

مُقدّمہ

دنیا میں ہر قوم کی زندگی میں ایک ایسا زمانہ آتا ہے جب کہ اُس کے قوائے ذہنی میں انحطاط کے آثار نمودار ہونے لگتے ہیں، ایجاد و اختراع اور غور و فکر کا مادّہ تقریباً مفقود ہو جاتا ہے، تخیل کی پرواز اور نظر کی جولانی تنگ اور محدود ہو جاتی ہے، علم کا دار و مدار چند رسمی باتوں اور تقلید پر رہ جاتا ہے۔ اُس وقت قوم یا تو بیکار اور مردہ ہو جاتی ہے یا سنبھلنے کے لئے یہ لازم ہوتا ہے کہ وہ دوسری ترقی یافتہ اقوام کا اثر قبول کرے۔ تاریخ عالم کے ہر دور میں اس کی شہادتیں موجود ہیں۔ خود ہمارے دیکھتے دیکھتے جاپان پر یہی گذری اور یہی حالت اب ہندوستان کی ہے۔

جس طرح کوئی شخص دوسرے بنی نوع انسان سے قطع تعلق کرکے تنہا اور الگ تھلگ نہیں رہ سکتا اور اگر رہے تو پنپ

نہیں سکتا اسی طرح یہ بھی ممکن نہیں کہ کوئی قوم دیگر اقوام عالم سے بے نیاز ہو کر پھولے پھلے اور ترقی پائے۔ جس طرح ہوا کے جھونکے اور ادنیٰ پرندوں اور کیڑے کوڑوں کے اثر سے وہ مقامات تک ہرے بھرے رہتے ہیں جہاں انسان کی دسترس نہیں اسی طرح انسانوں اور قوموں کے اثر بھی ایک دوسرے تک اڑ کر پہنچتے ہیں۔ جس طرح یونان کا اثر روم اور دیگر اقوام یورپ پر پڑا جس طرح عرب نے عجم کو اور عجم نے عرب کو اپنا فیض پہنچایا، جس طرح اسلام نے یورپ میں تاریکی اور جہالت کو مٹا کر علم کی روشنی پہنچائی اسی طرح آج ہم بھی بہت سی باتوں میں مغرب کے محتاج ہیں۔ یہ قانون عالم ہے جو یوں ہی جاری رہا اور جاری رہیگا۔

"دئے سے دیا یوں ہی جلتا رہا ہے"

جب کسی قوم کی نوبت یہاں تک پہنچ جاتی ہے اور وہ آگے قدم بڑھانے کی سعی کرتی ہے تو ادبیات کے میدان میں پہلی منزل ترجمہ ہوتی ہے۔ اس لئے کہ جب قوم میں جدت اور اپج نہیں رہی تو ظاہر ہے کہ اس کی تصانیف معمولی، ادھوری، کم مایہ اور ادنیٰ ہونگی۔ اس وقت قوم کی بڑی خدمت یہی ہے کہ ترجمہ کے ذریعہ سے دنیا کی اعلیٰ درجہ کی تصانیف اپنی زبان میں لائی جائیں۔ یہی ترجمے خیالات میں تغیر اور معلومات میں اضافہ کریں گے، جمود کو توڑیں گے اور قوم میں ایک نئی حرکت پیدا کریں گے اور پھر آخر یہی ترجمے تصنیف و تالیف

کے جدید اسلوب اور ڈھنگ سمجھائیں گے۔ ایسے وقت میں ترجمہ تصنیف سے زیادہ قابل قدر، زیادہ مفید اور زیادہ فیض رساں ہوتا ہے۔

اسی اصول کی بنا پر جب عثمانیہ یونیورسٹی کی تجویز پیش ہوئی تو ہز اکزالٹڈ ہائینس رستم دوراں ارسطوئے زماں سپہ سالار آصف جاہ مظفر الممالک نظام الملک نظام الدولہ نواب میر عثمان علیخان بہادر فتح جنگ جی۔سی۔اس۔آئی۔جی۔سی۔بی۔ای۔والی حیدرآباد دکن خلد اللہ ملکہ و سلطنتہ نے جن کی علمی قدر دانی اور علمی سرپرستی اس زمانہ میں احیائے علوم کے حق میں آب حیات کا کام کر رہی ہے، بہ تقاضائے مصلحت و دوربینی سب سے اول سررشتۂ تالیف و ترجمہ کے قیام کی منظوری عطا فرمائی جو نہ صرف یونیورسٹی کے لئے نصاب تعلیم کی کتابیں تیار کریگا بلکہ ملک میں نشر و اشاعتِ علوم و فنون کا کام بھی انجام دیگا۔ اگرچہ اس سے قبل بھی یہ کام ہندوستان کے مختلف مقامات میں تھوڑا انجام پایا مثلاً فورٹ ولیم کالج کلکتہ میں زیر نگرانی ڈاکٹر گلکرسٹ، دہلی سوسائٹی میں، انجمن پنجاب میں زیر نگرانی ڈاکٹر لائٹنر و کرنل ہالرائڈ، علی گڑھ سائنٹفک انسٹیٹیوٹ میں جس کی بنا سر سیّد احمد خاں مرحوم نے ڈالی۔ مگر یہ کوششیں سب وقتی اور عارضی تھیں۔ نہ انکے پاس کافی سرمایہ اور سامان تھا نہ انہیں یہ موقع حاصل تھا

اور نہ انہیں اعلیحضرت و اقدس جیسے علم پرور فرمانروا کی سرپرستی کا شرف حاصل تھا۔ یہ پہلا وقت ہے کہ اردو زبان کو علوم و فنون سے مالا مال کرنے کے لئے باقاعدہ اور مستقل کوشش کی گئی ہے۔ اور یہ پہلا وقت ہے کہ اردو زبان کو یہ رتبہ ملا ہے کہ وہ اعلیٰ تعلیم کا ذریعہ قرار پائی ہے۔ احیائے علوم کے لئے جو کام آگسٹس نے روم میں، خلافت عباسیہ میں ہارون الرشید و مامون الرشید نے ہسپانیہ میں عبدالرحمٰن ثالث نے، بکرماجیت و اکبر نے ہندوستان میں، الفرڈ نے انگلستان میں، پیٹر اعظم و کیتھرائن نے روس میں اور متسو ہتو نے جاپان میں کیا، وہی فرمانروائے دولت آصفیہ نے اس ملک کے لئے کیا۔ اعلیحضرت واقدس کا یہ کارنامہ ہندوستان کی علمی تاریخ میں ہمیشہ فخر و مباہات کے ساتھ ذکر کیا جائیگا۔

منجملہ اُن اسباب کے جو قومی ترقی کا موجب ہوتے ہیں ایک بڑا سبب زبان کی تکمیل ہے۔ جس قدر جو قوم زیادہ ترقی یافتہ ہے اُسی قدر اُس کی زبان وسیع ہے، اور اس میں نازک خیالات اور علمی مطالب کے ادا کرنے کی زیادہ صلاحیت ہوتی ہے، اور جس قدر جس قوم کی زبان محدود ہوتی ہے اُسی قدر تہذیب و شایستگی بلکہ انسانیت میں اس کا درجہ کم ہوتا ہے۔ چنانچہ وحشی اقوام میں الفاظ کا ذخیرہ بہت ہی کم پایا گیا ہے۔ علمائے فلسفہ و علم اللسان نے یہ ثابت کیا ہے کہ زبان، خیال اور

خیال، زبان ہے اور ایک مدت کے بعد اس نتیجے پر پہنچے ہیں کہ انسانی دماغ کے صحیح تاریخی ارتقا کا علم، زبان کی تاریخ کے مطالعہ سے حاصل ہو سکتا ہے۔ الفاظ ہمیں سوچنے میں ویسی ہی مدد دیتے ہیں جیسی آنکھیں دیکھنے میں۔ اس لئے زبان کی ترقی درحقیقت عقل کی ترقی ہے۔

علم ادب اسی قدر وسیع ہے جس قدر حیاتِ انسانی۔ اور اس کا اثر زندگی کے ہر شعبہ پر پڑتا ہے۔ وہ نہ صرف انسان کی ذہنی، معاشرتی، سیاسی ترقی میں مدد دیتا، اور نظر میں وسعت دماغ میں روشنی، دلوں میں حرکت اور خیالات میں تغیر پیدا کرتا ہے بلکہ قوموں کے بنانے میں ایک قوی آلہ ہے۔ قومیت کے لئے ہم خیالی شرط ہے اور ہم خیالی کے لئے ہم زبانی لازم گویا یک زبانی قومیت کا شیرازہ ہے جو اسے منتشر ہونے سے بچائے رکھتا ہے۔ ایک زمانہ تھا جب کہ مسلمان اقطاع عالم میں پھیلے ہوئے تھے لیکن اُن کے علم ادب اور زبان نے انہیں ہر جگہ ایک کر رکھا تھا۔ اس زمانے میں انگریز ایک دنیا پر چھائے ہوئے ہیں لیکن باوجود بُعدِ مسافت و اختلافِ حالات یک زبانی کی بدولت قومیت کے ایک سلسلے میں منسلک ہیں، زبان میں جادو کا سا اثر ہے اور صرف افراد ہی پر نہیں بلکہ اقوام پر بھی اُس کا وہی تسلط ہے۔

یہی وجہ ہے کہ تعلیم کا صحیح اور فطرتی ذریعہ اپنی ہی زبان ہو سکتی ہے۔ اس امر کو اعلیحضرت واقدس نے

پہچانا اور جامعۂ عثمانیہ کی بنیاد ڈالی ۔ جامعۂ عثمانیہ ہندوستان میں پہلی یونیورسٹی ہے جس میں ابتدا سے انتہا تک ذریعۂ تعلیم ایک دیسی زبان ہوگا ۔ اور یہ زبان اردو ہوگی ۔ ایک ایسے ملک میں جہاں "بھانت بھانت کی بولیاں" بولی جاتی ہیں، جہاں ہر صوبہ ایک نیا عالم ہے، صرف اردو ہی ایک عام اور مشترک زبان ہو سکتی ہے ۔ یہ اہل ہند کے میل جول سے پیدا ہوئی اور اب بھی یہی اس فرض کو انجام دیگی ۔ یہ اس کے خمیر اور وضع و ترکیب میں ہے ۔ اس لئے یہی تعلیم اور تبادلہ خیالات کا واسطہ بن سکتی اور قومی زبان کا دعوے کر سکتی ہے ۔

جب تعلیم کا ذریعہ اردو قرار دیا گیا تو یہ کھلا اعتراض تھا کہ اردو میں اعلیٰ تعلیم کے لئے کتابوں کا ذخیرہ کہاں ہے اور ساتھ ہی یہ بھی کہا جاتا تھا کہ اردو میں یہ صلاحیت ہی نہیں کہ اس میں علوم و فنون کی اعلیٰ تعلیم ہو سکے ۔ یہ صحیح ہے کہ اردو میں اعلیٰ تعلیم کے لئے کافی ذخیرہ نہیں ۔ اور اردو ہی پر کیا منحصر ہے، ہندوستان کی کسی زبان میں بھی نہیں ۔ یہ طلب و رسد کا عام مسئلہ ہے ۔ جب مانگ ہی نہ تھی تو رسد کہاں سے آتی ۔ جب ضرورت ہی نہ تھی تو کتابیں کیونکر مہیا ہوتیں ۔ ہماری اعلیٰ تعلیم غیر زبان میں ہوتی تھی، تو علوم و فنون کا ذخیرہ ہماری زبان میں کہاں سے آتا ۔ ضرورت ایجاد کی ماں ہے ۔ اب ضرورت محسوس ہوئی ہے تو کتابیں بھی

مہیا ہو جائیں گی۔ اسی کمی کو پورا کرنے اور اسی ضرورت کو رفع کرنے کے لئے سررشتۂ تالیف و ترجمہ قائم کیا گیا۔ یہ صحیح نہیں ہے کہ اردو زبان میں اس کی صلاحیت نہیں۔ اس کے لئے کسی دلیل و برہان کی ضرورت نہیں۔ سررشتۂ تالیف و ترجمہ کا وجود اس کا شافی جواب ہے۔ یہ سررشتہ یہی کام کر رہا ہے۔ کتابیں تالیف و ترجمہ ہو رہی ہیں اور چند روز میں عثمانیہ یونیورسٹی کالج کے طالب علموں کے ہاتھوں میں ہونگی اور رفتہ رفتہ عام شائقین علم تک پہنچ جائیں گی۔

لیکن اس میں سب سے کٹھن اور سنگلاخ مرحلہ وضع اصطلاحات کا تھا۔ اس میں بہت کچھ اختلاف اور بحث کی گنجائش ہے۔ اس بارے میں ایک مدت کے تجربہ اور کامل غور و فکر اور مشورہ کے بعد میری یہ رائے قرار پائی ہے کہ تنہا نہ تو ماہرِ علم صحیح طور سے اصطلاحات وضع کر سکتا ہے اور نہ ماہرِ لسان۔ ایک کو دوسرے کی ضرورت ہے۔ اور ایک کی کمی دوسرا پورا کرتا ہے۔ اس لئے اس اہم کام کو صحیح طور سے انجام دینے کے لئے یہ ضروری ہے کہ دونوں یک جا جمع کئے جائیں تاکہ وہ ایک دوسرے کے مشورہ اور مدد سے ایسی اصطلاحیں بنائیں جو نہ اہل علم کو ناگوار ہوں نہ اہل زبان کو۔ چنانچہ اسی اصول پر ہم نے وضع اصطلاحات کے لئے ایک ایسی مجلس بنائی جس میں دونوں جماعتوں کے اصحاب شریک ہیں علاوہ ایکے

ہم نے اُن اہلِ علم سے بھی مشورہ کیا جو اس کی خاص اہلیت رکھتے ہیں اور بُعدِ مسافت کی وجہ سے ہماری مجلس میں شریک نہیں ہو سکتے ۔ اس میں شک نہیں کہ بعض الفاظ غیر مانوس معلوم ہوں گے اور اہلِ زبان انہیں دیکھ کر ناک بھوں چڑھائیں گے ۔ لیکن اس سے گزیر نہیں ۔ ہمیں بعض ایسے علوم سے واسطہ ہے جن کی ہوا تک ہماری زبان کو نہیں لگی۔ ایسی صورت میں سوائے اس کے چارہ نہیں کہ جب ہماری زبان کے موجودہ الفاظ خاص خاص مفہوم کے ادا کرنے سے قاصر ہوں تو ہم جدید الفاظ وضع کریں ۔ لیکن اس کے یہ معنی نہیں ہیں کہ ہم نے محض ٹالنے کے لئے زبردستی الفاظ گھڑ کر رکھ دئے ہیں، بلکہ جس نہج پر اب تک الفاظ بنتے چلے آئے ہیں اور جن اصولِ ترکیب و اشتقاق پر اب تک ہماری زبان کاربند رہی ہے، اس کی پوری پابندی ہم نے کی ہے ۔ ہم نے اُس وقت تک کسی لفظ کے بنانے کی جرأت نہیں کی جب تک اُسی قسم کی متعدد مثالیں ہمارے پیش نظر نہ رہی ہوں ۔ ہماری رائے میں جدید الفاظ کے وضع کرنے کی اس سے بہتر اور صحیح کوئی صورت نہیں۔ اب اگر کوئی لفظ غیر مانوس یا اجنبی معلوم ہو تو اس میں ہمارا قصور نہیں ۔ جو زبان زیادہ تر شعر و شاعری اور قصص تک محدود ہو، وہاں ایسا ہونا کچھ تعجب کی بات نہیں ۔ جس ملک سے ایجاد و اختراع کا مادّہ سلب ہو گیا ہو جہاں لوگ نئی چیزوں کے بنانے اور دیکھنے کے عادی نہ ہوں، وہاں جدید الفاظ کا

غیر مانوس اور اجنبی معلوم ہونا موجب حیرت نہیں۔ الفاظ کی حالت بھی انسانوں کی سی ہے۔ اجنبی شخص بھی رفتہ رفتہ مانوس ہو جاتے ہیں۔ اول اول الفاظ کا بھی یہی حال ہے۔ استعمال آہستہ آہستہ غیر مانوس کو مانوس کر دیتا ہے اور صحت و غیر صحت کا فیصلہ زمانہ کے ہاتھ میں ہوتا ہے۔ ہمارا فرض یہ ہے کہ لفظ تجویز کرتے وقت ہر پہلو پر کامل غور کرلیں، آئندہ چل کر اگر وہ استعمال اور زمانہ کی کسوٹی پر پورا اترا تو خود ٹکسالی ہو جائیگا اور اپنی جگہ آپ پیدا کرلیگا۔ علاوہ اس کے جو الفاظ پیش کئے گئے ہیں وہ الہامی نہیں کہ جن میں ردّ و بدل نہ ہوسکے، بلکہ **فرہنگِ اصطلاحاتِ عثمانیہ** جو زیر ترتیب ہے پہلے اس کا مسودہ اہل علم کی خدمت میں پیش کیا جائے گا اور جہاں تک ممکن ہوگا اس کی اصلاح میں کوئی دقیقہ فروگذاشت نہیں کیا جائے گا۔

لیکن ہماری مشکلات صرف **اصطلاحات علمیہ** تک ہی محدود نہیں ہیں۔ ہمیں ایک ایسی زبان سے ترجمہ کرنا پڑتا ہے جو ہمارے لئے بالکل اجنبی ہے، اس میں اور ہماری زبان میں کسی قسم کا کوئی رشتہ یا تعلق نہیں۔ اس کا طرز بیان، ادائے مطلب کے اسلوب، محاورات وغیرہ بالکل جدا ہیں۔ جو الفاظ اور جملے انگریزی زبان میں بالکل معمولی اور روز مرہ کے استعمال میں آتے ہیں، اُن کا ترجمہ جب ہم اپنی زبان میں کرنے بیٹھتے ہیں تو سخت دشواری پیش آتی ہے۔ ان تمام دشواریوں پر

غالب آنے کے لئے مترجم کو کیسا کچھ خونِ جگر کھانا نہیں پڑتا۔ ترجمہ کا کام، جیسا کہ عموماً خیال کیا جاتا ہے، کچھ آسان کام نہیں ہے۔ بہت خاک چھاننی پڑتی ہے تب کہیں گوہر مقصود ہاتھ آتا ہے۔

اس سررشتہ کا کام صرف یہی نہ ہوگا (اگرچہ یہ اس کا فرضِ اولین ہے) کہ وہ نصاب تعلیم کی کتابیں تیار کرے، بلکہ اس کے علاوہ وہ ہر علم پر متعدد اور کثرت سے کتابیں تالیف و ترجمہ کرائے گا، تاکہ لوگوں میں علم کا شوق بڑھے، ملک میں روشنی پھیلے، خیالات و قلوب پر اثر پیدا ہو، جہالت کا استیصال ہو۔ جہالت کے معنی اب لاعلمی ہی کے نہیں بلکہ اس میں افلاس، کم ہمتی، تنگ دلی، کوتہ نظری، بے غیرتی، بد اخلاقی سب کچھ آجاتا ہے۔ جہالت کا مقابلہ کرکے اسے پس پا کرنا سب سے بڑا کام ہے۔ انسانی دماغ کی ترقی علم کی ترقی ہے۔ انسانی ترقی کی تاریخ علم کی اشاعت و ترقی کی تاریخ ہے۔ ابتدائے آفرینش سے اس وقت تک انسان نے جو کچھ کیا ہے، اگر اس پر ایک وسیع نظر ڈالی جائے تو نتیجہ یہ نکلے گا کہ جوں جوں علم میں اضافہ ہوتا گیا، پچھلی غلطیوں کی صحت ہوتی گئی، تاریکی گھٹتی گئی، روشنی بڑھتی گئی، انسان میدانِ ترقی میں قدم آگے بڑھاتا گیا۔ اسی مقدس فرض کے ادا کرنے کے لئے یہ سررشتہ قائم کیا گیا ہے اور وہ اپنی بساط کے موافق اس کے انجام دینے میں کوتاہی نہ کرے گا۔

لیکن غلطی، تحقیق و جستجو کی گھات میں لگی رہتی ہے۔ ادب کا

کمال ذوق سلیم ہر ایک کو نصیب نہیں ہوتا۔ بڑے بڑے نقاد اور مبصر فاش غلطیاں کر جاتے ہیں۔ لیکن اس سے ان کے کام پر حرف نہیں آتا۔ غلطی ترقی کے مانع نہیں ہے، بلکہ وہ صحت کی طرف رہنمائی کرتی ہے پچھلوں کی بھول چوک آنے والے مسافر کو رستہ بھٹکنے سے بچا دیتی ہے۔ ایک جاپانی ماہر تعلیم (بیرن کی کوچی) نے اپنے ملک کا تعلیمی حال لکھتے ہوئے اس صحیح کیفیت کا ذکر کیا ہے جو ہونہار اور ترقی کرنے والے افراد اور اقوام پر گزرتی ہے۔

"ہم نے بہت سے تجربے کئے اور بہت سی ناکامیاں اور غلطیاں ہوئیں، لیکن ہم نے ان سے نئے سبق سیکھے اور فائدہ اٹھایا۔ رفتہ رفتہ ہمیں اپنے ملک کی تعلیمی ضروریات اور امکانات کا صحیح اور بہتر علم ہوتا گیا اور ایسے تعلیمی طریقے معلوم ہوتے گئے جو ہمارے اہل وطن کے لئے زیادہ موزوں تھے۔ ابھی بہت سے ایسے مسائل ہیں جو ہمیں حل کرنے ہیں، بہت سی ایسی اصلاحیں ہیں جو ہمیں عمل میں لانی ہیں، ہم نے اب تک کوشش کی اور ابھی کوشش کر رہے ہیں اور مختلف طریقوں کی برائیاں اور بھلائیاں دریافت کرنے کے درپے ہیں، تاکہ اپنے ملک کے فائدے کے لئے اچھی باتوں کو اختیار کریں اور رواج دیں اور برائیوں سے بچیں۔"

اس لئے جو حضرات ہمارے کام پر تنقیدی نظر ڈالیں انہیں وقت کی تنگی، کام کا ہجوم اور اس کی اہمیت اور ہماری مشکلات پیش نظر رکھنی چاہئیں۔ یہ پہلی سعی ہے اور پہلی سعی میں کچھ نہ کچھ خامیاں

ضرور رہ جاتی ہیں، لیکن آگے چل کر یہی خامیاں ہماری رہنما بنیں گی اور پختگی اور اصلاح تک پہنچائیں گی۔ یہ نقش اول ہے نقش ثانی اس سے بہتر ہوگا۔ ضرورت کا احساس علم کا شوق، حقیقت کی لگن، صحت کی ٹوہ، جد و جہد کی رسائی خود بخود ترقی کے مدارج طے کرلے گی۔

جاپانی بڑے فخر سے یہ کہتے ہیں کہ ہم نے تیس چالیس سال کے عرصے میں وہ کچھ کر دکھایا جس کے انجام دینے میں یورپ کو اتنی ہی صدیاں صرف کرنی پڑیں۔ کیا کوئی دن ایسا آئے گا کہ ہم بھی یہ کہنے کے قابل ہوں گے؟ ہم نے پہلی شرط پوری کردی ہے یعنی بیجا قیود سے آزاد ہوکر اپنی زبان کو اعلیٰ تعلیم کا ذریعہ قرار دیا ہے۔ لوگ ابھی ہمارے کام کو تذبذب کی نگاہ سے دیکھ رہے ہیں اور ہماری زبان کی قابلیت کی طرف مشتبہ نظریں ڈال رہے ہیں۔ لیکن وہ دن آنے والا ہے کہ اس ذرّے کا بھی ستارہ چمکے گا، یہ زبان علم و حکمت سے مالا مال ہوگی اور **اعلیحضرت واقدس** کی نظر کیمیا اثر کی بدولت یہ دنیا کی مہذب و شایستہ زبانوں کی ہمسری کا دعوے کرے گی۔ اگرچہ اُس وقت ہماری سعی اور محنت حقیر معلوم ہوگی، مگر یہی شامِ غربت صبح وطن کی آمد کی خبر دے رہی ہے، یہی شب بیداریاں روزِ روشن کا جلوہ دکھائیں گی، اور یہی مشقت اُس قصر رفیع الشان کی بنیاد ہوگی جو آئندہ تعمیر ہونے والا ہے۔ اس وقت ہمارا کام صبر و استقلال سے میدان صاف کرنا،

داغ بیل ڈالنا اور نیو کھودنا ہے، اور فرہاد وار شیرینِ حکمت کی خاطر سنگلاخ پہاڑوں کو کھود کھود کر جوئے علم لانے کی سعی کرتا ہے۔ اور گو ہم نہ ہوں گے مگر ایک زمانہ آئیگا جب کہ اس میں علم و حکمت کے دریا بہیں گے اور ادبیات کی افتادہ زمین سرسبز و شاداب نظر آئے گی۔

آخر میں میں سررشتہ کے مترجمین کا شکریہ ادا کرتا ہوں جنہوں نے اپنے فرض کو بڑی مستعدی اور شوق سے انجام دیا۔ نیز میں ارکانِ مجلسِ وضعِ اصطلاحات کا شکر گزار ہوں کہ اِن کے مفید مشورے اور تحقیق کی مدد سے یہ مشکل کام بخوبی انجام پا رہا ہے۔ لیکن خصوصیت کے ساتھ یہ سررشتہ جناب مسٹر محمدؐ اکبر حیدری بی۔ اے معتمد عدالت و تعلیمات و کوتوالی و امور عامتہ سرکارعالی کا ممنون ہے جنہیں ابتدا سے قیام و انتظام جامعۂ عثمانیہ میں خاص انہاک رہا ہے۔ اور اگر ان کی توجہ اور امداد ہمارے شریک حال نہ ہوتی تو یہ عظیم الشان کام صورت پذیر نہ ہوتا۔ میں سید راس مسعود صاحب بی۔ اے (آکسن) آئی۔ اِی۔ ایس۔ ناظمِ تعلیمات سرکارعالی کا بھی شکریہ ادا کرتا ہوں کہ ان کی توجہ اور عنایت ہمارے حال پر مبذول رہی اور ضرورت کے وقت ہمیشہ بلا تکلف خوشی کے ساتھ ہمیں مدد دی۔

عبدالحق

ناظمِ سررشتۂ تالیف و ترجمہ (عثمانیہ یونیورسٹی)

ارکانِ دارالترجمہ

ناظم - - - - - - - - - مولوی عبدالحق صاحب بی۔ اے

مترجم ریاضیات - - - قاضی محمد حسین صاحب۔ ایم۔ اے۔ رینگلر

مترجم سائنس - - - - - چودھری برکت علی صاحب بی۔ ایس۔ سی

مترجم تاریخ - - - - - - - - - - مولوی سید ہاشمی صاحب

مترجم معاشیات - - - - مولوی محمد الیاس صاحب برنی ایم۔ اے

مترجم سیاسیات - - - - - - قاضی تلمذ حسین صاحب یم۔ اے

مترجم تاریخ - - - - - مولوی ظفر علی خاں صاحب بی۔ اے

مترجم فلسفہ و منطق - - - - - - مولوی عبدالماجد صاحب بی۔ اے

مولف تاریخ اسلام - - - - - - - - مولوی عبدالحلیم صاحب شرر

مترجم قانون - - - - - - مولوی سید علی رضا صاحب بی۔ اے

مترجم کتب عربی - - - - - - مولوی عبداللہ العمادی صاحب

علاوہ ان مذکورۂ بالا مترجمین کے مولوی حاجی صفی الدین صاحب ترجمہ شدہ کتابوں کو مذہبی نقطۂ نظر سے دیکھنے کے لئے اور نواب حیدر یار جنگ (مولوی علی حیدر صاحب طبا طبائی) ترجموں پر نظرِ ثانی کرنے کے لئے مقرر فرمائے گئے ہیں۔

ارکانِ مجلسِ وضعِ اصطلاحات

مولوی مرزا مہدی خاں صاحب کوکب وظیفہ یاب سرکار عالی (سابق ناظم مردم شماری)

مولوی حمید الدین صاحب بی۔اے صدر دار العلوم

نواب حیدر یار جنگ (مولوی علی حیدر صاحب طباطبائی)

مولوی وحید الدین صاحب سلیم

مولوی عبد الحق بی۔اے ناظم سررشتہ تالیف و ترجمہ

علاوہ ان مستقل ارکان کے، مترجمین سررشتہ تالیف و ترجمہ نیز دوسرے اصحاب سے بلحاظ اُنکے فن کے مشورہ کیا گیا۔ مثلاً

خان فضل محمد خانصاحب ایم۔اے رنگلر (پرنسپل سٹی ہائی اسکول حیدرآباد)

مولوی عبد الواسع صاحب (پروفیسر دار العلوم حیدرآباد)

پروفیسر عبد الرحمٰن صاحب بی۔ایس۔سی (نظام کالج)

مرزا محمد ہادی صاحب۔بی۔اے (پروفیسر کرسچن کالج لکھنؤ)

مولوی سلیمان صاحب ندوی

سید راس مسعود صاحب بی۔اے (ناظم تعلیمات حیدرآباد) وغیرہ

فہرست مضامین

حصۂ اول

علم مثلث کے مشہور ضابطے

حصّہ اوّل

۱- دائرے کا محیط = ۲ ח ر (دفعہ ۱۴)

اس میں ח عبرانی حرف "حیت" ہے

ח ..... ۳ء۱۴۱۵۹ [اس کے تقرب ۲۲/۷ اور ۳۵۵/۱۱۳] (دفعہ ۱۵)

ایک نیمقطری زاویہ = ۵۷° ۱۷' ۴۴ء۸" تقریباً (دفعہ ۱۸)

دو قائمے = ۱۸۰° = ۲۰۰ ف = ח نیمقطری (دفعہ ۲۱)

زاویہ = قوس/نصف قطر × زاویہ نیمقطری (دفعہ ۲۴)

۲- جب² ط + جم² ط = ۱

قط² ط = ۱ + مس² ط

قم² ط = ۱ + مم² ط (دفعہ ۲۸)

۳- جب ۰° = ۰، جم ۰° = ۱ (دفعہ ۴۰)

جب ۳۰° = ۱/۲، جم ۳۰° = √۳/۲ (دفعہ ۳۸)

جب ۴۵° = جم ۴۵° = ۱/√۲ (دفعہ ۳۷)

جب ۶۰° = √۳/۲ ، جم ۶۰° = ۱/۲ (دفعہ ۳۹)

جب ۹۰° = ۱ ، جم ۹۰° = ۰ (دفعہ ۴۱)

جب ۱۵° = (√۳ − ۱)/(۲√۲) ، جم ۱۵° = (√۳ + ۱)/(۲√۲) (دفعہ ۱۱۲)

جب ۱۸° = (√۵ − ۱)/۴ ، جم ۳۶° = (√۵ + ۱)/۴ (دفعات ۱۲۶ تا ۱۲۷)

۴۔ جب(−ط) = −جب ط ، جم(−ط) = جم ط (دفعہ ۴۴)

جب(۹۰° − ط) = جم ط ، جم(۹۰° − ط) = جب ط (دفعہ ۴۵)

جب(۹۰° + ط) = جم ط ، جم(۹۰° + ط) = −جب ط (دفعہ ۴۶)

جب(۱۸۰° − ط) = جب ط ، جم(۱۸۰° − ط) = −جم ط (دفعہ ۴۸)

جب(۱۸۰° + ط) = −جب ط ، جم(۱۸۰° + ط) = −جم ط (دفعہ ۴۹)

۵۔ اگر جب ط = جب ع تو ط = ن π + (−۱)^ن ع (دفعہ ۸۸)

اگر جم ط = جم ع تو ط = ۲ن π ± ع (دفعہ ۸۹)

اگر مس ط = مس ع تو ط = ن π + ع (دفعہ ۹۰)

۶۔ جب (ا + ب) = جب ا جم ب + جم ا جب ب

جم (ا + ب) = جم ا جم ب − جب ا جب ب (دفعہ ۹۴)

جب (ا - ب) = جب ا جم ب - جم ا جب ب

جم (ا - ب) = جم ا جم ب + جب ا جب ب (دفعہ ۹۶)

جب ج + جب د = ۲ جب (ج + د)/۲ جم (ج - د)/۲

جب ج - جب د = ۲ جم (ج + د)/۲ جب (ج - د)/۲

جم ج + جم د = ۲ جم (ج + د)/۲ جم (ج - د)/۲

جم د - جم ج = ۲ جب (ج + د)/۲ (دفعہ ۱۰۰)

۲ جب ا جم ب = جب (ا + ب) + جب (ا - ب)

۲ جم ا جب ب = جب (ا + ب) - جب (ا - ب)

۲ جم ا جم ب = جم (ا + ب) + جم (ا - ب)

۲ جب ا جب ب = جم (ا - ب) - جم (ا + ب) (دفعہ ۱۰۳)

مس (ا + ب) = (مس ا + مس ب) / (۱ - مس ا مس ب)

مس (ا - ب) = (مس ا - مس ب) / (۱ + مس ا مس ب) (دفعہ ۱۰۴)

جب ۲ ا = ۲ جب ا جم ا

جم ۲ا = جم^{2} ا − جب^{2} ا = ۱ − ۲ جب^{2} ا = ۲ جم^{2} ا − ۱ (دفعہ ۱۱۱)

جب ۲ا = $\frac{\text{۲ مس ا}}{\text{۱ + مس}^{2}\text{ ا}}$ ، جم ۲ا = $\frac{\text{۱ − مس}^{2}\text{ ا}}{\text{۱ + مس}^{2}\text{ ا}}$ (دفعہ ۱۱۵)

مس ۲ا = $\frac{\text{۲ مس ا}}{\text{۱ − مس}^{2}\text{ ا}}$ (دفعہ ۱۱۱)

جب ۳ا = ۳ جب ا − ۴ جب^{3} ا

جم ۳ا = ۴ جم^{3} ا − ۳ جم ا

مس ۳ا = $\frac{\text{۳ مس ا − مس}^{3}\text{ ا}}{\text{۱ − ۳ مس}^{2}\text{ ا}}$ (دفعہ ۱۱۳)

جب $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$ = ± $\sqrt{\frac{\text{۱ − جم ا}}{\text{۲}}}$ ، جم $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$ = ± $\sqrt{\frac{\text{۱ + جم ا}}{\text{۲}}}$ (دفعہ ۱۱۶)

۲ جب $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$ = ± $\sqrt{\text{۱ + جب ا}}$ ± $\sqrt{\text{۱ − جب ا}}$

۲ جم $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$ = ± $\sqrt{\text{۱ + جب ا}}$ ∓ $\sqrt{\text{۱ − جب ا}}$ (دفعہ ۱۱۹)

مس (ا$_{1}$ + ا$_{2}$ + ... + ا$_{n}$) = $\frac{\text{ن}_{1}\text{ − ن}_{3}\text{ + ن}_{5}\text{ − ...}}{\text{۱ − ن}_{2}\text{ + ن}_{4}\text{ − ...}}$ (دفعہ ۱۳۱)

۷ـ لوک$_{\text{ا}}$ م ن = لوک$_{\text{ا}}$ م + لوک$_{\text{ا}}$ ن

لوک$_{\text{ا}}$ $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ = لوک$_{\text{ا}}$ م − لوک$_{\text{ا}}$ ن

لوک$_{\text{ا}}$ م$^{\text{ن}}$ = ن لوک$_{\text{ا}}$ م (دفعہ ۱۴۲)

$$\text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{م} = \text{لوک}_{\text{ب}}\,\text{م} \times \text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{ب}$$ (دفعہ ۱۵۴)

۸- $$\frac{\text{جب ا}}{\text{اَ}} = \frac{\text{جب ب}}{\text{بَ}} = \frac{\text{جب ج}}{\text{جَ}}$$ (دفعہ ۱۶۹)

$$\text{جم ا} = \frac{\text{بَ}^2 + \text{جَ}^2 - \text{اَ}^2}{۲\,\text{بَ جَ}}$$ (دفعہ ۱۷۰)

$$\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲} = \sqrt{\frac{(\text{ن} - \text{بَ})(\text{ن} - \text{جَ})}{\text{بَ جَ}}}$$ (دفعہ ۱۷۱)

$$\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲} = \sqrt{\frac{\text{ن}\,(\text{ن} - \text{اَ})}{\text{بَ جَ}}}$$ (دفعہ ۱۷۲)

$$\text{مس}\,\frac{\text{ا}}{۲} = \sqrt{\frac{(\text{ن} - \text{بَ})(\text{ن} - \text{جَ})}{\text{ن}\,(\text{ن} - \text{اَ})}}$$ (دفعہ ۱۷۳)

$$\text{جب ا} = \frac{۲}{\text{بَ جَ}}\sqrt{\text{ن}(\text{ن} - \text{اَ})(\text{ن} - \text{بَ})(\text{ن} - \text{جَ})}$$ (دفعہ ۱۷۵)

$$\text{اَ} = \text{بَ جم ج} + \text{جَ جم ب}،\ \ldots\ldots$$ (دفعہ ۱۷۶)

$$\text{مس}\,\frac{\text{ب} - \text{ج}}{۲} = \frac{\text{بَ} - \text{جَ}}{\text{بَ} + \text{جَ}}\,\text{مم}\,\frac{\text{ا}}{۲}$$ (دفعہ ۱۷۷)

$$\text{ف} = \sqrt{\text{ن}(\text{ن} - \text{اَ})(\text{ن} - \text{بَ})(\text{ن} - \text{جَ})} = \tfrac{۱}{۲}\,\text{بَ جَ جب ا}$$

$$= \tfrac{۱}{۲}\,\text{جَ اَ جب ب} = \tfrac{۱}{۲}\,\text{اَ بَ جب ج}$$ (دفعہ ۲۰۴)

۹- $$\text{س} = \frac{\text{اَ}}{۲\,\text{جب ا}} = \frac{\text{بَ}}{۲\,\text{جب ب}} = \frac{\text{جَ}}{۲\,\text{جب ج}} = \frac{\text{اَ بَ جَ}}{۴\,\text{ف}}$$ دفعات ۲۱۴ و ۲۱۵

١/٦٦

ر = ق / ن = (ن - ا) مس $\frac{ا}{٢}$ = ... = ... (دفعات ۲۰۸ و ۲۰۹)

ر = ق / (ن - ا) = ن مس $\frac{ا}{٢}$ .... (دفعات ۲۱۱ و ۲۱۲)

ایک ایسی ذو اربعۃ الاضلاع کا رقبہ جو ایک دائرہ کے اندر بن سکتی ہے

= $\sqrt{(ن - اَ)(ن - بَ)(ن - جَ)(ن - دَ)}$ (دفعہ ۲۲۵)

جب ط / ط = ۱ جب زاویہ ط نہایت چھوٹا ہو (دفعہ ۲۳۶)

دائرے کا رقبہ = π رؔ (دفعہ ۲۳۹)

۱۰ - جب عہ + جب (عہ + بہ) + جب (عہ + ۲ بہ) + ... ن رقموں تک

$$= \frac{جب \left\{ عہ + \frac{ن - ۱}{۲} بہ \right\} جب \frac{ن بہ}{۲}}{جب \frac{بہ}{۲}}$$ (دفعہ ۲۴۴)

جم عہ + جم (عہ + بہ) + جم (عہ + ۲ بہ) + ... ن رقموں تک

$$= \frac{جم \left\{ عہ + \frac{ن - ۱}{۲} بہ \right\} جب \frac{ن بہ}{۲}}{جب \frac{بہ}{۲}}$$ (دفعہ ۲۴۸)

۶۸۶

باب اوّل

زاویوں کی پیمائش ستینی اور مئی پیمانوں میں

قوسی پیمانہ

۱۔ لفظ ٹرگنومٹری (علم مثلث) دو یونانی لفظوں سے مرکب ہے جن کا مطلب "مثلثوں کی پیمائش" ہے علم مثلث کا اصلی مقصد یہی تھا اور اب تک بھی اس کا بڑا استعمال یہ ہے کہ اس کے ذریعہ مثلثوں کے ضلعوں اور زاویوں کے باہمی ارتباطات اور تعلقات معلوم کئے جاتے ہیں مگر اب علم مثلث کے معنی بہت وسیع ہو گئے ہیں اور اس میں وہ جملہ فروع ریاضی شامل ہیں جن کا تعلق زاویوں سے ہے۔

علم ہندسہ میں زاویوں کی پیمائش زاویہ قائمہ یا اس کی کسروں کی رقوم میں کی جاتی ہے مگر صریحاً اپنی بڑی مقدار

کی وجہ سے یہ اکائی علم مثلث میں اتنی موزوں نہیں ہے اسلئے زاویوں کا اندازہ لگانے کے لئے کئی اور ترکیبیں اختیار کی گئی ہیں ان میں ایک پیمانۂ ستینی (سکس جیسمل) ہے جو علم مثلث میں اکثر استعمال ہوتا ہے، اس کے نام سے ظاہر ہے کہ اس میں ہر ایک اکائی اپنے سے اگلی چھوٹی اکائی کی ساٹھ گنی ہوتی ہے اس پیمانہ کو انگریزی ترکیب تقسیم بھی کہتے ہیں

۲۔ ستینی پیمانہ یعنی انگریزی ترکیب تقسیم میں زاویہ قائمہ کو ۹۰ برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں اور ہر ایک حصہ کو درجہ (ڈگری) کہتے ہیں، ہر ایک درجہ کو ۶۰ برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں اور ہر ایک حصہ کو دقیقہ (منٹ) کہتے ہیں اور اسی طرح ہر ایک دقیقہ یا منٹ کے ۶۰ برابر حصوں میں سے ہر ایک حصہ کو ثانیہ (سکنڈ) کہتے ہیں۔

رموز °۱، ′۱، ″۱ درجہ، دقیقہ، ثانیہ کو بالترتیب تعبیر کرتی ہیں پس

۶۰ ثانیے (″۶۰) برابر ہیں ایک دقیقہ (′۱) کے

۶۰ دقیقے (′۶۰) " درجہ (°۱) کے

۹۰ درجے (°۹۰) " زاویہ قائمہ کے

نوٹ ۔ اگرچہ یہ سب اکائیاں زاویہ قائمہ سے حاصل ہوئی ہیں مگر قائمہ خود اکائی ستینی پیمانہ کی نہیں ہے، بڑی سے بڑی اکائی اس ترکیب تقسیم کی درجہ ہے پس ستینی پیمانہ کے موافق ۲ قائمے = °۱۸۰ اور علیٰ ہٰذا القیاس۔

علم حساب کے معمولی قاعدوں سے زاویوں کی تحویل قائموں

سے درجوں، دقیقوں، ثانیوں میں اور برعکس اس کے بآسانی ہوسکتی ہے۔

مثال ۱۔ ۵۷ء۲۹۶° کو درجوں، دقیقوں اور ثانیوں میں تعبیر کرو۔
ء۲۹۶ درجوں کی تحویل دقیقوں میں ۶۰ سے ضرب دینے سے کرو اس طرح حاصل ہوگا ۱۷ء۷۶′

اور ء۷۶ دقیقوں کے ثانیے ۶۰ میں ضرب دینے سے بناؤ

پس ہمیں حاصل ہوگا ۵۷° ۱۷′ ۴۵ء۶″

مثال ۲۔ ۴۶° ۶′ ۹″ کو زاویہ قائمہ کی رقوم میں بیان کرو

ثانیوں کو ۶۰ پر تقسیم کرو اور حاصل قسمت کے اول دقیقے لکھو پھر ۶۰ پر تقسیم کرو اور حاصل کے ماقبل درجے لکھو اور آخر میں ۹۰ پر تقسیم کرو۔

۶۰) ۹″
۰ء۱۵′

۶۰) ۶′ء۱۵
۰°ء۱۰۲۵

۹۰) ۴۶°ء۱۰۲۵
ء۵۱۲۲۵ قائمے

جواب

مثال ۳۔ انگریزی ترکیب تقسیم کے موافق (۱) مخمس منتظم (۲) مسبع منتظم کے ہر ایک زاویہ کی مقدار معلوم کرو

(۱) فرض کرو کہ مخمس منتظم کا زاویہ ا سے تعبیر ہوتا ہے۔

تب بموجب اقلیدس م ۱ ش ۳۲ نتیجہ صریح

۵ا + ۴ قائمے = جتنے اضلاع ہوں اُن سے دوگنے قائمے

∴ ۵ ا = (۱۰-۴) قائمے

اس لئے ا = °۱۰۸

(۲) اسی طرح فرض کرو کہ ا مسبع منتظم کا ایک زاویہ ہے

تب ۷ ا + ۴ × ۹۰ = ۱۴ × ۹۰ یا ۷ ا = °۹۰۰

اس لئے ا = °۱۲۸ ۳۴' ۱۷ ۱/۷"

علم مثلث میں ستینی پیمانہ اچھی طرح سے مروج ہو چکا ہے اور اس کی جملہ عملیات میں ہمیشہ استعمال ہوتا ہے مگر مضروب فیہ ۶۰ اور ۹۰ کی موجودگی کے باعث تحویل میں دقت ہوتی ہے۔

۴۔ اس لئے ایک اور نظام احاد جسکو میئی پیمانہ (سنتسمل) یا فرانسیسی ترکیب تقسیم کہتے ہیں تجویز ہوا ہے اس ترکیب تقسیم میں زاویہ قائمہ کو ۱۰۰ برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں اور ہرایک حصہ کو فرانسیسی درجہ (گریڈ) کہتے ہیں ہرایک فرانسیسی درجہ کو سو برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں اور ہر ایک حصہ کو فرانسیسی دقیقہ (فرانسیسی منٹ) کہتے ہیں اور اسی طرح ہرایک فرانسیسی دقیقہ کے ۱۰۰ برابر حصوں میں سے ہرایک حصہ کو فرانسیسی ثانیہ (فرانسیسی سکنڈ) کہتے ہیں۔

رموز ۱ث، ۱، ۱" بالترتیب فرانسیسی درجوں، دقیقوں، ثانیوں کو تعبیر کرتی ہیں پس

۱۰۰ فرانسیسی ثانیئے (۱۰۰") برابر ہیں ایک فرانسیسی دقیقہ (۱) کے

۱۰۰ " دقیقے (۱۰۰) " " درجہ (۱ث) کے

۱۰۰ " درجے (۱۰۰ث) " " ایک زاویہ قائمہ کے

۴۔ فرانسیسی ترکیب تقسیم کا استعمال انگریزی ترکیب تقسیم کی نسبت زیادہ آسان اور سہل ہے مگر اس سے پیشتر کہ اسکو عملی طور پر اختیار کر لیا جائے جدولوں کی ایک بڑی تعداد کا نئے سرے سے حساب لگانا پڑے گا اس وجہ سے یہ ترکیب عملیات میں کبھی استعمال نہیں کی گئی اور اب تقریباً معدوم ہو چکی ہے۔

۵۔ ستینی پیمانہ کی تحویل مئی پیمانہ میں اور برعکس اس کے۔
چونکہ ایک زاویہ قائمہ ۹۰° کے برابر ہوتا ہے اور نیز $۱۰۰^{\text{ف}}$ کے

اس لئے $۹۰^\circ = ۱۰۰^{\text{ف}}$

ث $۱^\circ = \left(\frac{۱۰}{۹}\right)^{\text{ف}}$ اور $۱^{\text{ف}} = \left(\frac{۹}{۱۰}\right)^\circ$

پس معلوم ہوا کہ انگریزی درجوں کو فرانسیسی درجوں میں تحویل کرنے کے لئے ہمیں کل انگریزی درجوں کی تعداد کا $\frac{۱}{۹}$ واں حصہ اُن کی تعداد پر زیادہ کرنا چاہیئے اور برعکس اس کے فرانسیسی درجوں کو انگریزی درجوں میں منتقل کرنے کے لئے فرانسیسی درجوں کی تعداد کا $\frac{۱}{۱۰}$ واں حصہ اُن کی تعداد سے منفی کرنا چاہیئے

مثال۔ $۳۶^\circ = \left(۳۶ + ۳۶ \times \frac{۱}{۹}\right)^{\text{ف}} = ۴۰^{\text{ف}}$

اور $۶۴^{\text{ف}} = \left(۶۴ - ۶۴ \times \frac{۱}{۱۰}\right)^\circ = (۶۴ - ۶٫۴)^\circ = ۵۷٫۶^\circ$

اگر کسی زاویئے میں درجوں کی صحیح تعداد شامل نہ ہو تو اس کو سب سے پہلے درجوں کی کسور میں لانا چاہیئے اور اس کے بعد فرانسیسی درجوں میں منتقل کرنا چاہیئے۔

عملی صورتوں میں زاویوں کو قائم الزاویہ یا اس کی کسور میں تعبیر کرنا زیادہ مناسب ہوتا ہے امثلہ ذیل سے اس کی توضیح

ہوگی۔

مثال ۱۔ ۶۳° ۱۴′ ۱۵″ کی تحویل مئی پیمانہ میں کرو

۱۵″ = ۱۷/۲۰ = ۰٫۸۵′

اور ۱۴′ ۱۵″ = ۱۴٫۸۵′ = ۱۴٫۸۵/۶۰ ° = ۰٫۲۴۷۵°

∴ ۶۳° ۱۴′ ۱۵″ = ۶۳٫۲۴۷۵° = ۶۳٫۲۴۷۵/۹۰ قائمے

= ۰٫۷۰۲۷۵ قائمے

= ۷۰٫۲۷۵ᵍ = ۷۰ᵍ ۲۷٫۵`

= ۷۰ᵍ ۲۷` ۵۰``

مثال ۲۔ ۹۴ᵍ ۲۳` ۸۷`` کی تحویل ستینی پیمانہ میں کرو

۹۴ᵍ ۲۳` ۸۷`` = ۰٫۹۴۲۳۸۷ قائمے

۹۰

۸۴٫۸۱۴۸۳ انگریزی درجے

۶۰

۴۸٫۸۸۹۸ " دقیقے

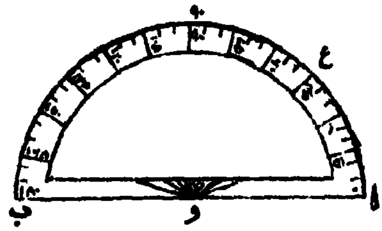
۶۰

۵۳٫۳۸۸۰ " ثانئے

اس لئے ۹۴ᵍ ۲۳` ۸۷`` = ۸۴° ۴۸′ ۵۳٫۳۸۸″

۴۔ زاویہ کش یا چاندہ زاویوں کی پیمائش کا ایک آلہ ہے بالعموم یہ دھات کی پتری ہوتی ہے جسکی شکل نصف دائرہ کی ہوتی ہے اور اسکے محیط پر صفر سے ۱۸۰° تک نشان لگے ہوئے ہوتے ہیں۔

اگر کسی زاویہ کی پیمائش منظور ہو تو زاویہ کے راس کو مرکز و پر اور زاویہ کی ایک ساق کو قطر و ا پر ٹھیک ٹھیک منطبق کرتے ہیں اگر زاویہ کی دوسری ساق و ع ہو تو ع



کے مقابل محیط پر جو عدد ہوگا وہ زاویہ ع د ا کی مقدار کو درجوں میں تعبیر کرے گا۔

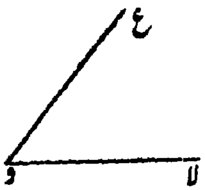
چونکہ کسی دائرہ میں مساوی قوسوں کے محاذی مرکزی زاویے مساوی ہوتے ہیں اس لئے معلوم ہوا کہ نصف دائرہ پر درجوں کے نشانات متساوی الفصل ہیں اس سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ جس قوس کے محاذی زاویہ ۱۰° ہو وہ اُس قوس کا دس گنا ہوگا جس کے سامنے کا زاویہ صرف ۱° ہو پس معلوم ہوا کہ کسی دائرہ کے مرکزی زاویے اُن قوسوں کے متناسب ہوتے ہیں جن کے وہ محاذی ہوں۔

یہ نتیجہ اعظم اقلیدس ھ۶ ش ۳۳ میں زیادہ وضاحت سے ثابت کیا گیا ہے۔

۷۔ زاویوں کی مثلثی تعبیر

اقلیدس کی تعریف زاویہ "یعنی دو ایسے خطوط کا میلان جو آپس میں ملیں" ٹھیک طور پر صادق نہیں آتی جب تک کہ زاویے دو قائموں سے کم نہ ہوں۔

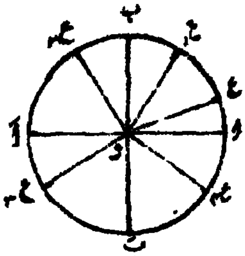
علم مثلث میں زاویہ کی تعریف اس طرح کرتے ہیں کہ اگر کوئی خط مستقیم اپنے ایک سرے کے گرد ایک ہی سطح میں ایک مقام سے کسی دوسرے مقام تک چکر لگائے تو اس کی حرکت سے جو میلان ان دو مقامات کے درمیان پیدا ہو اُس کو زاویہ کہتے ہیں، فرض کرو کہ شکل منسلکہ میں چکر لگانے والا خط مقام ولا سے مقام وع تک حرکت کرتا ہے، مثلثی اصطلاح میں اس کو اس طرح بیان کرتے ہیں کہ اس نے ایک "زاویہ لاوع مرتسم کیا ہے" چکر لگانے والے خط کو نصف قطر دائر یا خط دائر کہتے ہیں۔



گھڑی کی سوئیاں یا پہیئے کے آرے اس طرح سے زاویہ مرتسم کرنے کی عمدہ مثالیں ہیں، گھڑی میں منٹوں کی سوئی ایک قائمہ یعنی ۹۰ درجے $\frac{1}{4}$ گھنٹے میں اور ۱۸۰ درجے $\frac{1}{2}$ گھنٹے میں اور ۳۶۰ درجے ایک گھنٹے میں مرتسم کرتی ہے اور گھنٹوں کی سوئی اپنی گردش سے ۳۶۰ درجے ۱۲ گھنٹے میں، ۷۲۰ درجے ایک دن میں مرتسم کرتی ہے پس معلوم ہوا کہ علم مثلث میں زاویہ کی مقدار پر کوئی قید نہیں ہے

۸۔ کسی مقدار کے زاویئے

فرض کرو کہ دو ثابت خط ا وا' اور ب وب' نقطہ و پر متقاطع علی القوائم ہیں اور فرض کرو کہ ایک چکر لگانے والا خط وع



(جو بنا بت نقطہ و کے گرد ایک ہی سطح میں گردش کرتا ہے) مقام وا سے شروع ہو کر گھڑی کی سوئیوں کی مقابل سمت میں حرکت کرتا ہے

جب خط دائر وا اور وب کے درمیان کسی مقام وع۱ پر منطبق ہوتا ہے تو اس کا زاویہ مرتسمہ اوع۱ ہوتا ہے جو زاویہ قائمہ سے کم ہے

جب خط دائر وب اور واَ کے درمیان کسی مقام وع۲ پر ہوتا ہے تو اس کا زاویہ مرتسمہ ایک قائمے سے بڑا ہوتا ہے۔

واَ اور وبَ کے درمیان کسی مقام وع۳ پر زاویہ مرتسمہ اوع۳ یعنی اوب + ب واَ + اَ وع۳ یعنی دو قائمے + اَ وع۳ ہوتا ہے یعنی زاویہ مرتسمہ دو قائموں سے بڑا ہوتا ہے۔

اسی طرح سے وبَ اور وا کے درمیان کسی مقام وع۴ پر زاویہ مرتسمہ تین قائموں سے بڑا ہوتا ہے

جب خط دائر ایک پورا چکر لگا چکتا ہے اور دوسری مرتبہ ابتدائی مقام وا پر منطبق ہوتا ہے تو اس کی گردش سے جو زاویہ پیدا ہوتا ہے وہ چار قائموں کے برابر ہوتا ہے۔

اگر اس کے بعد خط دائر اپنی گردش کو جاری رکھے تو دوسری مرتبہ جب وہ مقام وع۱ پر پہنچتا ہے تو اس کا زاویہ مرتسمہ صرف اوع۱ نہیں ہوتا بلکہ ۴ قائمے + زاویہ اوع۱ ہوتا ہے

اسی طرح سے جب خط دائر دو پورے چکر لگا چکنے کے بعد

مقام وع پر منطبق ہوتا ہے تو اس کا زاویہ مرتسمہ = ۸ قائمے + زاویہ اوع

۹۔ خطوط مستقیم او اَ اور ب و بَ متقاطع ہوکر چار قائمے پیدا کرتے ہیں اور سطح مستوی کو چار برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں، حصہ او ب کو ربع اول، ب و اَ کو ربع دوم، اَ و بَ کو ربع سوم اور بَ و ا کو ربع چہارم کہتے ہیں۔ اب خط ثابت وا اور خط دائر وع کے درمیان کوئی زاویہ فرض کرو، اگر وع ربع اول میں مقام وع پر واقع ہو تو اس کو اس طرح بیان کرتے ہیں کہ زاویہ اوع، ربع اول میں ہے اگر وع دوسرے ربع میں مقام وع پر واقع ہو تو زاویہ اوع کو ربع دوم میں کہتے ہیں اور علی ہذا القیاس۔

۱۰۔ مفصلہ ذیل زاوئے مرتسم کرنے کے بعد خط دائر کے مختلف مقامات دریافت کرو۔

(۱) °۲۲۵، (۲) °۴۸۰ اور (۳) °۱۰۵۰

(۱) چونکہ °۲۲۵ = °۱۸۰ + °۴۵ اس لئے معلوم ہوا کہ اس صورت میں خط دائر دو قائمے مرتسم کرنے کے بعد زاویہ °۴۵ میں گھوم چکا ہے۔ اس لئے اس وقت وہ ربع سوم میں ہے اور زاویہ اَ و بَ کی تنصیف کرتا ہے۔

(۲) چونکہ °۴۸۰ = °۳۶۰ + °۱۲۰ اس لئے ایک پورا چکر لگانے کے بعد خط دائر نے زاویہ °۱۲۰ مرتسم کیا ہے، اسلئے وہ ربع دوم میں وب اور واَ کے درمیان ہے اور وب کے ساتھ °۳۰ کا زاویہ بناتا ہے۔

(۳) چونکہ °۱۰۵۰ = ۱۱ × °۹۰ + °۶۰ اس لئے معلوم ہوا کہ خط دائر ۱۱ پورے

چکر لگانے کے بعد زاویہ ۶۰° مرتسم کر چکا ہے اور ربع چہارم میں وب اور وا کے درمیان ہے اور وب کے ساتھ زاویہ ۶۰° بناتا ہے

امثلہ نمبری ۱

ذیل کے زاویوں کو زاویہ قائمہ کی رقوم میں بیان کرو -

۱- ۶۰°   ۲- ۷۵° ۱۵′

۳- ۶۳° ۱۷′ ۲۵″   ۴- ۱۳۰° ۳۰′

۵- ۲۱۰° ۳۰′ ۳۰″   ۶- ۳۷۰° ۲۰′ ۴۸″

ذیل کے زاویوں کو فرانسیسی درجوں، دقیقوں اور ثانیوں میں بیان کرو

۷- ۳۰°   ۸- ۸۱°

۹- ۱۳۸° ۳۰′   ۱۰- ۳۵° ۴۷′ ۱۵″

۱۱- ۲۳۵° ۱۲′ ۳۶″   ۱۲- ۴۷۵° ۱۳′ ۴۸″

ذیل کے زاویوں کو قائموں اور نیز انگریزی درجوں، دقیقوں اور ثانیوں کی رقوم میں بیان کرو

۱۳- ۱۲۰ف   ۱۴- ۴۵ف ۳۵` ۲۴``

۱۵- ۳۹ف ۴۵` ۳۶``    ۱۶- ۲۵۵ف ۸` ۹``

۱۷- ۷۵۹ف ۱` ۵``

جب خط دائر مفصلہ ذیل زاویئے مرتسم کر چکا ہو تو ہر ایک صورت میں اسکے مقام کا نشان شکل میں دو -

۱۸- $\frac{3}{4}$ زاویہ قائمہ   ۱۹- $3\frac{1}{2}$ زاویئے قائمے

۲۰- $13\frac{1}{2}$ زاویئے قائمے   ۲۱- ۱۲۰°

۲۲- ۳۱۵°　　　۲۳- ۷۴۵ د

۲۴- ۱۱۸۵°　　　۲۵- ۱۵۰ ف

۲۶- ۴۲۰ د　　　۲۷- ۸۷۵ ف

۲۸- معلوم کرو کہ گھڑی کی گھنٹہ اور منٹ کی سوئیاں $\frac{1}{9}$ ۱۱ منٹ میں بالترتیب کتنے انگریزی درجے، دقیقے اور ثانیئے مرتسم کرتی ہیں۔

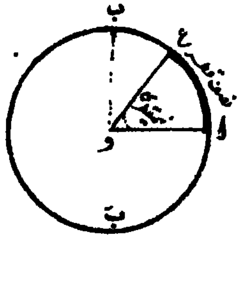
۲۹- کسی مثلث قائم الزاویہ کے ایک زاویہ حادہ میں انگریزی درجوں کی تعداد دوسرے زاویہ کی فرانسیسی درجوں کی تعداد کے برابر ہے۔ دونوں زاویوں کو انگریزی درجوں میں بیان کرو۔

۳۰- ثابت کرو کہ کسی زاویہ میں ستینی دقیقوں کی تعداد کو اُسی زاویہ میں مئی دقیقوں کی تعداد سے نسبت ۲۷ : ۵۰ ہے

۳۱- زاویہ ۴۴° ۸' کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرو کہ ایک حصہ کی ستینی ثانیوں کی تعداد دوسرے حصہ کی مئی ثانیوں کی تعداد کے برابر ہو

قوسی پیمانہ

۱۱- زاویوں کی ایک تیسری ترکیب تقسیم ایجاد ہوئی ہے اور علم ریاضی کی اعلیٰ فروع میں یہی استعمال کی جاتی ہے



اس ترکیب تقسیم کی اکائی اس طرح حاصل ہوتی ہے۔

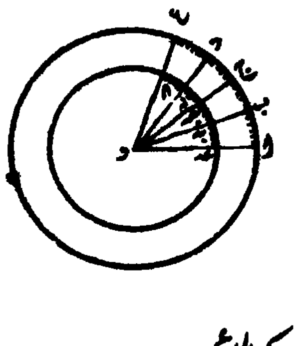
کوئی دائرہ اع ب بَ لو جسکا مرکز و ہو اور کسی نقطہ ا سے قوس اع برابر نصف قطر دائرہ کے

تا پو وا اور وع کو ملاؤ زاویہ ا و ع کو قوسی پیمائش کی اکائی قرار دیتے ہیں یعنی اس زاویہ کی رقوم میں اور زاویوں کا اندازہ لگاتے ہیں۔

اس زاویہ کو انگریزی میں ریڈین کہتے ہیں ہم اسکو زاویہ نیمقطری یا اختصاراً نیم قطری کہیں گے اور اس کو آیندہ نشان (ان) سے تعبیر کرینگے۔

۱۲۔ اب کسی پیمانہ واحد یا اکائی کے مناسب انتخاب کے لئے ضروری ہے کہ وہ مقدار مستقل ہو اسلئے ہمکو ثابت کرنا چاہیئے کہ نیمقطری ایک مستقل زاویہ ہے، دفعات ذیل میں ہم اس بات کو ثابت کریں گے۔

۱۳۔ مسئلہ کسی دائرہ کے محیط اور قطر کی باہمی نسبت مستقل ہوتی ہے



دو دائرے لو جن کا مرکز مشترک و ہو بڑے دائرے کے اندر ایک ایسی منتظم کثیر الاضلاع بناؤ جس کے ن اضلاع ہوں۔

فرض کرو کہ وا، وب، وج.... چھوٹے دائرہ کو نقاط عد، بد، جد..... پر ملتے ہیں عد بد، بد جد، جد لد.... کو ملاؤ

تب بموجب اقلیدس م ۶ ش ۲ عد، بد، جد، لد..... چھوٹے دائرہ کے اندر ن اضلاع کی ایک منتظم کثیر الاضلاع ہے۔

چونکہ وعد = وبد اور وا = وب

اس لئے ضرور ہے کہ خطوط عد بد اور اب متوازی ہوں

اسلئے $\frac{اب}{عدبد} = \frac{وا}{وعد}$ (اقلیدس م ۶ ش ۴)

نیز کثیر الاضلاع ا ب ج د ..... منتظم ہے اس کا گھیرا یعنی مجموعہ اضلاع ن × ا ب ہے اور اسی طرح سے اندرونی کثیر الاضلاع کا مجموعہ اضلاع ن × عد بہ ہے پس

$$\frac{\text{بیرونی کثیر الاضلاع کا مجموعہ اضلاع}}{\text{اندرونی کثیر الاضلاع کا مجموعہ اضلاع}} = \frac{\text{ن × ا ب}}{\text{ن × عد بہ}}$$

$$= \frac{\text{ا ب}}{\text{عد بہ}} = \frac{\text{و ا}}{\text{و عد}} \quad \cdots\cdots (1)$$

اور یہ تعلق صحیح ہے خواہ اوپر کی اشکال کثیر الاضلاع کی تعداد اضلاع کچھ ہی ہو۔

اب فرض کرو کہ تعداد اضلاع لا انتہا بڑھتی ہے (یعنی ن لا انتہا بڑھتا ہے) یہاں تک کہ آخر الامر بیرونی کثیر الاضلاع کا مجموعہ اضلاع بیرونی دائرہ کے محیط کے قریب قریب برابر ہو جاتا ہے۔ اور اندرونی کثیر الاضلاع کا مجموعہ اضلاع اندرونی دائرہ کے محیط کے قریب قریب برابر ہو جاتا ہے۔

اُس وقت ربط (۱) کی صورت یہ ہو جائیگی۔

$$\frac{\text{بیرونی دائرہ کا محیط}}{\text{اندرونی دائرہ کا محیط}} = \frac{\text{و ا}}{\text{و عد}}$$

$$= \frac{\text{بیرونی دائرہ کا نصف قطر}}{\text{اندرونی دائرہ کا نصف قطر}}$$

اس لئے $$\frac{\text{بیرونی دائرہ کا محیط}}{\text{بیرونی دائرہ کا نصف قطر}} = \frac{\text{اندرونی دائرہ کا محیط}}{\text{اندرونی دائرہ کا نصف قطر}}$$

اب چونکہ ابتدا میں دونوں دائروں کی مقدار پر کوئی قید نہیں رکھی گئی اس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ مقدار

$$\frac{\text{محیطِ دائرہ}}{\text{نصف قطر دائرہ}}$$

تمام دائروں کے لئے وہی ہوتی ہے۔ پس معلوم ہوا کہ دائرہ کے محیط کی نسبت اپنے نصف قطر سے اور نیز اس لئے اپنے قطر سے ایک مقدار معین اور مستقل ہے۔

۱۴۔ دفعہ گزشتہ میں ہم نے ثابت کیا ہے کہ نسبت $\frac{\text{محیط}}{\text{قطر}}$ تمام دائروں کے لئے یکساں ہوتی ہے۔ اس مستقل نسبت کی قیمت کو ہم ہمیشہ عبرانی حرف π (حیت) سے تعبیر کریں گے۔ اس سے ظاہر ہے کہ π ایک عدد ہے

$$\text{پس}\ \frac{\text{محیط}}{\text{قطر}} = \text{عدد مستقل}\ \pi$$

یعنی مسئلہ ذیل قائم ہوا کہ کسی دائرہ کا محیط ہمیشہ اُس کے قطر کا π گنا یا اس کے نصف قطر کا ۲π گنا ہوتا ہے۔

۱۵۔ اب مشکل یہ ہے کہ π کی قیمت نہ تو صحیح عدد ہے اور نہ یہ کسر عام کی شکل میں بیان ہو سکتی ہے، اس لئے ہم اس کو کسر اعشاریہ متوالی یا غیر متوالی کی رقوم میں بھی تعبیر نہیں کر سکتے۔ عدد π مقدار متباین ہے یعنی یہ ایک ایسی مقدار ہے جس کی قیمت دو صحیح عددوں کی نسبت سے تعبیر نہیں ہو سکتی۔

آٹھ مرتبہ کے اعشاریہ تک اس کی صحیح قیمت ... ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵ ہے

کسر $\frac{22}{7}$ سے π کی قیمت پہلے دو مرتبہ کے اعشاریہ تک صحیح حاصل ہوتی ہے، کیونکہ

$$\frac{22}{7} = 3.14285.....$$

کسر $\frac{355}{113}$ سے π کی زیادہ صحیح قیمت حاصل ہوتی کیونکہ وہ ۶ مرتبہ کے اعشاریہ تک درست ہے کیونکہ

$$\frac{355}{113} = 3.14159203.........$$

نوٹ۔ کسر $\frac{355}{113}$ اس طرح یاد رہ سکتی ہے۔ پہلے تین طاق اعداد کو اس ترتیب سے لکھو کہ اس میں ہر ایک عدد دو دفعہ مکرر آئے جیسے ۱۱۳۳۵۵ پھر اس عدد کو دو حصوں میں تقسیم کر دو اور پہلے حصہ کو دوسرے پر تقسیم کرو۔ جیسے (۱۱۳)۳۵۵) حاصل قسمت π کی قیمت ۶ مرتبہ کے اعشاریہ تک صحیح حاصل ہوگی۔

خلاصہ یہ ہے کہ π کی تقریبی قیمت جو دو مرتبہ کے اعشاریہ تک درست ہو کسر $\frac{22}{7}$ ہے۔ مگر اس سے اچھا تقرب .... ۳٫۱۴۱۵۹ ہے عمل تقسیم سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{1}{\pi} = .3183098862.........$$

۱۶۔ **مثال ۱۔** ایک ٹرائیکل کے پہئے کا قطر ۲۸ انچ ہے۔ اگر پہئے کے محیط کا کوئی ایک نقطہ ایک پورا چکر لگائے تو دریافت کرو کہ پہئے کا مرکز اس اثنا میں کتنا فاصلہ طے کرے گا۔

اس جگہ نصف قطر = ۱۴ انچ

اس لئے محیط $= 2 \times \pi \times 14 = 28\pi$ انچ

اگر $\pi = \frac{22}{7}$ تو محیط $= \frac{22}{7} \times 28$ انچ

= ۷ فٹ ۴ انچ (تقریباً)

اگر π کو زیادہ صحیح قیمت ...... ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵ دی جائے

تو محیط = ۲۸ × ...... ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵ انچ

= ۷ فٹ ...... ۳٫۹۶۴۵۹ انچ

مثال ۲ - ایک دوڑنے والے گول چکر کے گرد ۵ مرتبہ دوڑنے سے ایک شائق ایک میل فاصلہ طے کرتا ہے - چکر کا نصف قطر دریافت کرو -

چکر کا محیط = $۱۷۶۰ \times \frac{۱}{۵}$ = ۳۵۲ گز

پس اگر چکر کا نصف قطر گزوں میں ر سے تعبیر کریں

تو ۲π ر = ۳۵۲

ر = $\frac{۱۷۶}{\pi}$ گز

فرض کرو کہ π = $\frac{۲۲}{۷}$ تو ر = $\frac{۷ \times ۱۷۶}{۲۲}$ = ۵۶ گز (تقریباً)

اگر π کی زیادہ صحیح قیمت لیجائے تو $\frac{۱}{\pi}$ = ۳۱۸۳۱ء۰ اور ہمیں حاصل ہوگا -

ر = ۳۱۸۳۱ء۰ × ۱۷۶ = ۵۶٫۰۲۲۵۶ گز

امثلہ نمبری ۲

۱- اگر زمین کا نصف قطر ۴۰۰۰ میل ہو تو اس کے محیط کا طول دریافت کرو۔

۲- ایک ریل گاڑی کے پہیئے کا قطر ۳ فٹ ہے اور وہ ایک سکنڈ میں ۳ چکر لگاتا ہے - گاڑی کی رفتار معلوم کرو -

۳- ایک پون چکی کا بادبان ۱۸ فٹ ہے اور وہ ایک منٹ میں ۱۰ چکر لگاتا ہے معلوم کرو کہ اس کا سرا ایک گھنٹہ میں کتنا فاصلہ طے کرتا ہے -

۴- ایک پہیے کا قطر ایک انچ ہے، ایسی رسی کا طول دریافت کرو جو

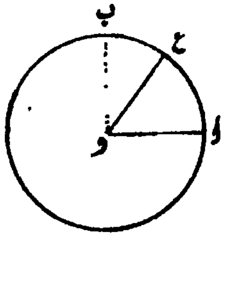
اس کے گول کنارے کے گرد ٹھیک ایک دفعہ آسکے

۵۔ اگر یہ فرض کرلیا جائے کہ زمین اپنی حرکت سے ایک سال میں ایک ایسا دائرہ بناتی ہے جس کا نصف قطر ۹۲۵۰۰۰۰۰ میل ہے اور جس کا مرکز سورج ہے تو دریافت کرو کہ زمین ایک سال میں کتنا فاصلہ طے کرتی ہے۔

۶۔ ایک گاڑی کے پہیے کا نصف قطر ا فٹ ۹ انچ ہے اور وہ $\frac{1}{9}$ سکنڈ میں اپنے مرکز کے گرد گھومنے سے °۸۰ کا زاویہ پیدا کرتا ہے، معلوم کرو کہ اس کے کنارے پر کا ایک نقطہ ایک گھنٹہ میں کتنا فاصلہ طے کرتا ہے۔

۱۷۔ مسئلہ زاویہ نیمقطری ایک مستقل زاویہ ہے۔

فرض کرو کہ زاویہ اوع زاویہ نیمقطری ہے (دفعہ ۱۱)



اور قوس اب ربع دائرہ ہے یعنی اس کا طول ایک چوتھائی محیط کے برابر ہے۔ بموجب دفعہ ۱۴

طول اب = $\frac{\pi ر}{۲}$ جہاں ر سے دائرہ کا نصف قطر تعبیر ہوتا ہے۔

بحکم اقلیدس م ۶ ش ۳۳ ہمکو معلوم ہے کہ کسی دائرہ کے مرکزی زاویوں کو آپس میں وہی نسبت ہوتی ہے جو اُن کی قوسوں کو ایک دوسرے سے ہو جن پر کہ وہ قائم ہوں اسلئے

$$\frac{\text{زاویہ اوع}}{\text{زاویہ اوب}} = \frac{\text{قوس اع}}{\text{قوس اب}} = \frac{ر}{\frac{\pi ر}{۲}} = \frac{۲}{\pi}$$

یعنی زاویہ اوج = $\frac{۲}{\pi}$ × زاویہ اوب

لیکن ہم نے اوپر فرض کیا ہے کہ زاویہ اوج نیمقطری ہے

اسلئے زاویہ نیمقطری = $\frac{۲}{\pi}$ × زاویہ اوب

= $\frac{۲}{\pi}$ زاویہ قائمہ کا

اب چونکہ قائمہ ایک مستقل زاویہ ہے اور ہم ثابت کر چکے ہیں (دفعہ ۱۴) کہ π ایک مستقل مقدار ہے۔ اس لئے ظاہر ہے کہ نیمقطری ایک مستقل زاویہ ہے۔ اور اس کی مقدار میں فرق نہیں آتا خواہ ہم کسی دائرہ سے اس کی قیمت نکالیں۔

۱۸۔ زاویہ نیمقطری کی مقدار

بموجب دفعہ گزشتہ زاویہ نیمقطری

= $\frac{۲}{\pi}$ × ایک زاویہ قائمہ = $\frac{۱۸۰^\circ}{\pi}$

= ۱۸۰° × ۰٫۳۱۸۳۰۹۸۸۶۲..... = $۵۷٫۲۹۵۷۷۹۵^\circ$

= ۵۷° $۱۷'$ $۴۴٫۸''$ تقریباً

۱۹۔ چونکہ زاویہ نیمقطری = $\frac{۲}{\pi}$ × ایک زاویہ قائمہ

اس لئے ایک زاویہ قائمہ = $\frac{\pi}{۲}$ × نیمقطری زاویے

اس لئے ۱۸۰° = ۲ قائمے = π نیمقطری

اور ۳۶۰° = ۴ ″ = ۲π نیمقطری

اس لئے معلوم ہوا کہ جب خط دائر (دفعہ ۸) ایک پورا چکر لگا چکتا ہے

تو اس کی حرکت سے ۲ π نیمقطری زاویے پیدا ہوتے ہیں اور جب وہ تین چکر لگاتا ہے تو ۶ π نیمقطری زاویے پیدا ہوتے ہیں اور بالعموم جب وہ ن چکر ختم کرتا ہے تو اس کا زاویہ مرتسمہ ۲ ن π نیمقطری زاویوں کے برابر ہوتا ہے۔

۲۰۔ عملیات میں اکثر نشان "نق" کو حذف کرتے ہیں اور "زاویہ π نق" کی بجائے "زاویہ π" لکھتے ہیں۔

طالب علم کو یہ بات یاد رکھنی چاہیئے کہ جب اُس اکائی کا جس کی رقوم میں ایک زاویہ ناپا گیا ہو کوئی ذکر نہ ہو تو الفاظ "نیمقطری زاویے" وہاں محذوف ہوتے ہیں ورنہ یہ فرض کرنے میں وہ غلطی کریگا کہ π قائم مقام ۱۸۰° کا ہے۔ یہ صحیح ہے کہ π نیمقطری زاویے (π نق) اور ۱۸۰° ایک ہی زاویے کو تعبیر کرتے ہیں۔ مگر یاد رہے کہ π بنفسہٖ ایک عدد اور صرف ایک عدد ہے۔

۲۱۔ قوسی پیمانہ کی تحویل ستینی اور مئیی پیمانوں میں اور برعکس اسکے۔ طالب علم کو یہ ارتباطات یاد رکھنے چاہئیں۔

دو قائمے = ۱۸۰° = ۲۰۰ف = π نیمقطری

باقی عمل معمولی قواعد علم حساب کے متعلق ہے

مثال (۱) ۰٫۴۵ π نق = ۰٫۴۵ × ۱۸۰° = ۸۱° = ۹۰ف

(۲) ۳ نق = $\frac{۳}{\pi}$ × π نق = $\frac{۳}{\pi}$ × ۱۸۰°

= $\frac{۳}{\pi}$ × ۲۰۰ف

(۳) ۴۰° ۱۵′ ۳۶″ = ۴۰° ۱۵ $\frac{۳}{۵}$′

= ۴۰٫۲۶° = ۴۰٫۲۶ × $\frac{\pi}{۱۸۰}$ نق

= ء۲۲۳۶ × π نیمقطری

(۴) ۴۰ف ۱۵` ۳۶`` = ء۴۰۱۵۳۶ف

= ء۴۰۱۵۳۶ × $\frac{\pi}{۲۰۰}$ نیمقطری

= ء۲۰۰۷۶۸ × π نیمقطری

۲۲۔ مثال ۱۔ ایک مثلث کے زاویے سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور سب سے چھوٹے زاویہ میں فرانسیسی درجوں کی تعداد کو سب سے بڑے زاویہ کی نیمقطری زاویوں کی تعداد سے نسبت ۴۰ : π ہے۔ زاویوں کو انگریزی درجوں میں دریافت کرو۔

فرض کرو کہ زاویے (لا - ما)°، لا° اور (لا + ما)° ہیں

چونکہ مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ ۱۸۰° ہے

اس لئے ۱۸۰° = لا - ما + لا + لا + ما = ۳ لا

∴ لا = ۶۰

پس مطلوبہ زاویے ہوئے

(۶۰ - ما)°، ۶۰°، (۶۰ + ما)°

اب (۶۰ - ما)° = $\frac{۱۰}{۹}$ × (۶۰ - ما)ف

اور (۶۰ + ما)° = $\frac{\pi}{۱۸۰}$ × (۶۰ + ما) نیمقطری

اسلئے $\frac{۱۰}{۹}$ (۶۰ - ما) : $\frac{\pi}{۱۸۰}$ (۶۰ + ما) = ۴۰ : π

اس لئے $\frac{۲۰۰}{\pi}$ × $\frac{۶۰ - ما}{۶۰ + ما}$ = $\frac{۴۰}{\pi}$

یعنی ۵ (۶۰ - ما) = ۶۰ + ما

یعنی ما = ۴۰

اس لئے مطلوبہ زاویئے ہیں ۲۰°، ۶۰°، ۱۰۰°

مثال ۲۔ زاویوں کی پیمائش کی تینوں ترکیبوں ستینی، ہمی اور قوسی میں سے ہر ایک کے موافق کسی معشر منتظم کے ایک زاویہ کی مقدار دریافت کرو

بموجب اقلیدس م ا ش ۳۲ نتیجہ صریح، اگر کسی مستقیم الاضلاع کے اندرونی زاویوں کے مجموعہ پر ۴ قائمے زیادہ کردئے جائیں تو اس حاصل جمع میں شکل مذکورہ کی تعداد اضلاع سے دوگنے قائمے ہونگے۔

فرض کرو کہ معشر منتظم کے ایک زاویہ میں لا قائمے ہیں۔ اس لئے تمام زاوئے ۱۰ لا قائموں کے برابر ہوئے۔

بموجب نتیجہ صریح مذکورہ بالا۔

۱۰ لا + ۴ = ۲۰

اس لئے　لا = $\frac{۸}{۵}$ قائمے

لیکن ایک زاویہ قائمہ = ۹۰° = ۱۰۰^{ف} = $\frac{\pi}{۲}$ نیم قطری زاوئیے

اس لئے زاویہ مطلوبہ = ۱۴۴° = ۱۶۰^{ف}

= $\frac{۴\pi}{۵}$ نیم قطری زاوئے

امثلہ نمبری ۳

ذیل کے زاویوں کو انگریزی درجوں، دقیقوں اور ثانیوں میں تعبیر کرو۔

۱- $\frac{\pi}{۳}^{نق}$　　۲- $\frac{۴\pi}{۳}^{نق}$　　۳- $۱۰\pi^{نق}$

۴- $۱^{نق}$　　۵- $۸^{نق}$

ذیل کے زاویوں کو فرانسیسی درجوں، دقیقوں اور ثانیوں میں تعبیر کرو۔

۶ — $\frac{۴\pi}{۵}$ نق ۷ — $\frac{۷\pi}{۶}$ نق ۸ — ۱۰π نق

ذیل کے زاویوں کو نیمقطری زاویوں میں بیان کرو

۹ — °۹۰ ۱۰ — °۱۱۰ ′۳۰

۱۱ — °۱۷۵ ′۴۵ ۱۲ — °۴۷ ′۲۵ ″۳۶

۱۳ — °۳۹۵ ۱۴ — ۶۰ ف

۱۵ — ۱۱۰ ف ۳۰` ۱۶ — ۳۴۵ ف ۲۵` ۳۶``

۱۷ — ایک مثلث قائم الزاویہ کے دو حادے زاویوں کا فرق $\frac{۲\pi}{۵}$ نیمقطری زاویوں کے برابر ہے۔ اُن کو انگریزی درجوں میں بیان کرو

۱۸ — ایک مثلث کا ایک زاویہ ($\frac{۲}{۳}$ لا)ف ہے، اور دوسرا ($\frac{۳}{۲}$ لا)° اور تیسرا ($\frac{\pi\ لا}{۷۵}$)نق اُن سب کو انگریزی درجون میں بیان کرو۔

۱۹ — کسی مثلث کے زاویوں کا قوسی ناپ بالترتیب $\frac{۱}{۲}$ اور $\frac{۱}{۳}$ ہے تیسرے زاویہ میں انگریزی درجوں کی تعداد دریافت کرو۔

۲۰ — ایک مثلث کے زاویے سلسلہ حسابیہ میں ہیں سب سے چھوٹے زاویہ میں انگریزی درجوں کی تعداد کو سب سے بڑے زاویے کی نیمقطری زاویوں کی تعداد سے نسبت ۶۰ : π ہے، ان زاویوں کو انگریزی درجوں میں دریافت کرو۔

۲۱ — ایک مثلث کے زاویے سلسلہ حسابیہ میں ہیں، سب سے چھوٹے زاویے میں جو نیمقطری زاویوں کی تعداد ہے اس کو درمیانی زاویئے کی انگریزی درجوں کی تعداد کے ساتھ نسبت ۱ : ۱۲۰ ہے، زاویوں کے قوسی ناپ دریافت کرو۔

۲۲ — اشکال ذیل کے اندرونی زاویوں کو نیمقطری زاویوں اور انگریزی درجوں میں بیان کرو۔ (۱) مخمس منتظم (۲) مسبع منتظم (۳) مثمن منتظم (۴) بارہ

اضلاع کی منتظم کثیرالاضلاع (۵) ۱۷ اضلاع کی منتظم کثیرالاضلاع۔

۲۳۔ دو اشکال کثیرالاضلاع منتظم ہیں ایک کے زاویہ کو دوسرے کے زاویہ سے نسبت ۳ : ۲ ہے، نیز پہلی کثیرالاضلاع کی تعداد اضلاع دوسری کی تعداد اضلاع کی دوچند ہے، ہر ایک کثیرالاضلاع کی تعداد اضلاع دریافت کرو۔

۲۴۔ دو اشکال کثیرالاضلاع کی تعداد اضلاع میں نسبت ۵ : ۴ ہے کہ ان کے زاویوں کا فرق ۹° ہے ہر ایک کی تعداد اضلاع دریافت کرو۔

۲۵۔ دو ایسی اشکال کثیرالاضلاع معلوم کرو جو منتظم ہوں اور جن کی تعداد اضلاع میں نسبت ۳ اور ۴ کی ہو نیز پہلی کثیرالاضلاع کے ایک زاویے میں جو انگریزی درجوں کی تعداد ہو اُس کو دوسری کثیرالاضلاع کے کسی زاویے کی فرانسیسی درجوں کی تعداد کے ساتھ نسبت ۴ : ۵ ہو۔

۲۶۔ ایک ذوار بعتہ الاضلاع کے زاویے سلسلہ حسابیہ میں ہیں سب سے بڑا زاویہ سب چھوٹے زاویہ کا دوچند ہے، سب سے چھوٹے زاویے کو نیمقطری زاویوں میں تعبیر کرو۔

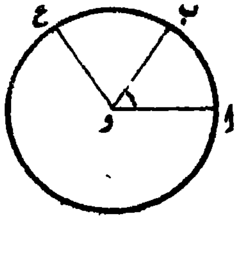
۲۷۔ اوقات مندرجہ ذیل پر گھنٹہ اور منٹ کی سوئیوں کے درمیان جو زاویے بنیں اُن کو نیمقطری زاویوں، انگریزی اور فرانسیسی درجوں میں بیان کرو۔

(۱) ساڑھے تین بجے (۲) چھ بجنے میں ۲۰ منٹ (۳) سوا گیارہ بجے

۲۸۔ وقت معلوم کرو (۱) چار اور پانچ بجے کے درمیان جب گھنٹہ اور منٹ کی سوئیوں کے درمیان زاویہ ۷۸° ہو (۲) سات اور آٹھ بجے کے درمیان جب یہ زاویہ ۵۴° ہو۔

۱۳۔ مسئلہ کسی زاویہ میں نیمقطری زاویوں کی تعداد اُس کسر کے برابر ہوتی ہے جس کا شمار کنندہ وہ قوس ہو جس کے محاذی کسی

دائرہ کے مرکز پر زاویہ مجوزہ بنے
اور جس (کسر) کا نسب نما دائرہ کا
نصف قطر ہو۔



فرض کرو کہ خط دائر وا سے شروع
ہوکر مقام وع تک حرکت کرنے سے
زاویہ اوع مرتسم کرتا ہے۔
و کو مرکز مان کر کسی نصف قطر پر ایک دائرہ کھینچو جو خطوط وا اور
وع کو نقاط ا اور ع پر قطع کرے۔
فرض کرو کہ $\angle$ اوب زاویہ نیمقطری ہے یعنی قوس اب
نصف قطر دائرہ کے برابر ہے۔
بحکم اقلیدس م ۶ ش ۳۳

$$\frac{\angle \text{اوع}}{\text{زاویہ نیمقطری}} = \frac{\angle \text{اوع}}{\angle \text{اوب}} = \frac{\text{قوس اع}}{\text{قوس اب}} = \frac{\text{قوس اع}}{\text{نصف قطر}}$$

$$\text{یعنی} \angle \text{اوع} = \frac{\text{قوس اع}}{\text{نصف قطر}} \times \text{زاویہ نیمقطری}$$

جس سے مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

۲۴۔ مثال ۱۔ ایک دائرہ کا نصف قطر ۳ فٹ ہے اس کی ۱ فٹ قوس کے محاذی دائرہ کے مرکز پر زاویہ دریافت کرو۔

$$\text{زاویہ میں نیمقطری زاویوں کی تعداد} = \frac{\text{قوس}}{\text{نصف قطر}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{اس لئے زاویہ مجوزہ} = \frac{1}{3} \text{ نیمقطری}$$

$= \frac{۱}{۳} \times \frac{۲}{\pi}$ زاویہ قائمہ

$= \frac{۲}{۳\pi} \times ۹۰^\circ = \frac{۶۰^\circ}{\pi} = ۱۹\frac{۱}{۱۱}^\circ$ اگر π کو $\frac{۲۲}{۷}$ کے برابر فرض کیا جائے

مثال ۲۔ ایک دائرہ کا نصف قطر ۵ فٹ ہے اگر اس کی ایک قوس کے مقابل مرکزی زاویہ ۳۳° ۱۵′ ہو تو قوس کا طول دریافت کرو۔

فرض کرو کہ طول مطلوب لا فٹ ہے۔

اس لئے $\frac{\text{لا}}{۵}$ = زاویہ ۳۳° ۱۵′ میں نیمقطری زاویوں کی تعداد

$= \frac{۳۳\frac{۱}{۴}}{۱۸۰}\pi$ (دفعہ ۲۱)

$= \frac{۱۳۳}{۷۲۰}\pi$

اس لئے لا $= \frac{۱۳۳}{۱۴۴}\pi$ فٹ $= \frac{۱۳۳}{۱۴۴} \times \frac{۲۲}{۷}$ فٹ تقریباً

$= ۲\frac{۶۵}{۷۲}$ فٹ تقریباً

مثال ۳۔ فرض کرو کہ سورج اور زمین کے درمیان اوسط فاصلہ ۹۲۵۰۰۰۰۰ میل ہے اور سورج ایک شخص کی آنکھ پر ۳۲′ کا زاویہ بناتا ہے، سورج کا قطر دریافت کرو۔

فرض کرو کہ میلوں میں سورج کا قطر ق ہے

چونکہ سورج کے محاذی زاویہ نہایت چھوٹا ہے اس لئے اس کا قطر ایک ایسے دائرہ کی چھوٹی سی قوس کے برابر ہے جس کا مرکز دیکھنے والے کی آنکھ ہے۔ نیز ہمیں معلوم ہے کہ اس دائرہ کے مرکز پر سورج کے مقابل زاویہ ۳۲′ بنتا ہے۔

اس لئے بموجب دفعہ ۲۳

$\frac{ق}{۹۲۵.....}$ = نیمقطری زاویوں کی تعداد ۳۲′ میں

= نیمقطری زاویوں کی تعداد $\frac{۸}{۱۵}$° میں

= $\frac{۸}{۱۵} \times \frac{π}{۱۸۰} = \frac{۲π}{۶۷۵}$

اس لئے ق = $\frac{۱۸۵......}{۶۷۵}$ π میل

= $\frac{۱۸۵......}{۶۷۵} \times \frac{۲۲}{۷}$ میل تقریباً

= ۸۶۲۰۰۰ میل تقریباً

مثال ۴۔ فرض کرو کہ ایک درست بینائی والا شخص چھاپہ کے حروف کو اتنے فاصلے سے پڑھ سکتا ہے کہ حروف کے محاذی اس کی آنکھ پر ۵′ کا زاویہ بنتا ہے اُن حروف کی اونچائی دریافت کرو جو وہ مفصلہ ذیل فاصلوں سے پڑھ سکتا ہے (۱) ۱۲ فٹ (۲) $\frac{۱}{۴}$ میل

فرض کرو کہ لا فٹ مطلوبہ اونچائی ہے۔

پہلی صورت میں لا تقریباً ایک ایسے دائرہ کی قوس کے برابر ہے جس کا نصف قطر ۱۲ فٹ ہے اور جس کے مرکز پر قوس کے محاذی زاویہ ۵′ بنتا ہے

اس لئے $\frac{لا}{۱۲}$ = تعداد نیمقطری زاویوں کی ۵′ میں

= $\frac{۱}{۱۲} \times \frac{π}{۱۸۰}$

اس لئے لا = $\frac{π}{۱۸۰}$ فٹ = $\frac{۱}{۱۸۰} \times \frac{۲۲}{۷}$ فٹ تقریباً

= $\frac{۱}{۱۵} \times \frac{۲۲}{۷}$ انچ = $\frac{۱}{۵}$ انچ تقریباً

دوسری صورت میں اگر اونچائی ما ہو تو

$\frac{ما}{۳ \times ۴۴۰}$ = تعداد نیمقطری زاویوں کی ۵′ میں

$$\frac{\pi}{۱۸۰} \times \frac{۱}{۱۲} =$$

اس لئے ا $= \frac{۱۱}{۱۸}\pi = \frac{۱۱}{۱۸} \times \frac{۲۲}{۷}$ فٹ تقریباً

$=$ ۲۳ انچ تقریباً

امثلہ نمبری ۴

[فرض کرو کہ $\pi =$ ۳٫۱۴۱۵۹...... اور $\frac{۱}{\pi} =$ ۰٫۳۱۸۳۱]

۱- کسی دائرہ میں ایک قوس کا طول نصف قطر کا ۰٫۷۳۵ گنا ہے اسکے محاذی مرکز پر جو زاویہ بنے اس میں انگریزی درجوں کی تعداد دریافت کرو۔

۲- کسی دائرہ کا نصف قطر ۲۵ فٹ ہے، ایک ۱۵ فٹ قوس سے محاذی دائرہ کے مرکز پر جو زاویہ بنے اس میں نیمقطری زاویوں اور انگریزی درجوں کی تعداد دریافت کرو۔

۳- ایک دائرہ کے بیرونی کنارہ پر درجے بنے ہوئے ہیں، اس میں ہر ایک درجہ کی زاوی قیمت ۵َ ہے اور آپس میں درجوں کا فاصلہ ۰٫۱ انچ ہے، دائرہ کا نصف قطر معلوم کرو۔

۴- ایک درجہ دار دائرہ کا قطر ۶ فٹ ہے اور ہر ایک درجہ کی زاوی قیمت ۵َ ہے، متصل درجوں کا فاصلہ دریافت کرو۔

۵- اگر ایک کرہ کے ایک ہی نصف النہار پر دو مقامات کے عرضوں کا فرق ۱۰َ ۱۰ ہو اور مقامات کے درمیان فاصلہ $\frac{۱}{۲}$ انچ ہو تو کرہ کا نصف قطر دریافت کرو۔

۶- فرض کرو کہ زمین کا نصف قطر ۴۰۰۰ میل ہے۔ دو ایسے مقامات کے عرض بلد

کا فرق معلوم کرو جن میں سے ایک مقام دوسرے مقام کی نسبت ۱۰۰ میل شمال کی طرف واقع ہو۔

۷۔ فرض کرو کہ زمین ایک کرہ ہے اور اس کے دوائر متوازی العرض کے درمیان فاصلہ $\frac{1}{9}$ ۶۹ میل ہے اور اس فاصلہ کے محاذی زمین کے مرکز پر زاویہ ۱° بنتا ہے، زمین کا نصف قطر دریافت کرو۔

۸۔ ایک دائرہ کا نصف قطر ۳ فٹ ہے اگر اُس کی ایک قوس کے وتر کا طول بھی ۳ فٹ ہو تو قوس کے طول کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔

۹۔ دو دائروں کے مرکزوں پر مساوی قوسوں کے محاذی زاویے ۹۰° اور ۷۵° بنتے ہیں اُن کے نصف قطروں کی باہمی نسبت دریافت کرو

۱۰۔ ایک دائرہ کا قطر ۸ فٹ ہے اگر اُس کی ۱۰ فٹ قوس کے محاذی مرکزی زاویہ ۱۴۳° ۱۴′ ۲۲″ بنے تو π کی قیمت ۴ مرتبہ کے اعشاریہ تک دریافت کرو۔

۱۱۔ ایک دائرہ کے محیط کو ایسے پانچ حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے جو سلسلہ حسابیہ میں ہیں اگر سب سے بڑا حصہ سب سے چھوٹے کا ۶ گنا ہو تو حصوں کے محاذی مرکزی زاویوں کی مقداروں کو نیمقطری زاویوں میں دریافت کرو

۱۲۔ ایک قطاع دائرہ کے احاطہ کرنے والے خطوط کا مجموعہ ایک ایسی نصف دائرہ قوس کے برابر ہے جس کا نصف قطر وہی ہے جو دائرہ کا ہے، قطاع کے زاویہ کو انگریزی درجوں، دقیقوں، ثانیوں میں تعبیر کرو۔

۱۳۔ ایک آدمی کا قد ۶ فٹ ہے کتنے فاصلہ پر اُس کے محاذی ۱۰′ کا زاویہ بنے گا؟

۱۴۔ ایک شے کے محاذی ایک میل کے فاصلہ پر ۱′ کا زاویہ بنتا ہے

اُس کی اونچائی دریافت کرو۔

۱۵۔ ایک کرہ کا قطر ۵½ انچ ہے، معلوم کرو کہ کتنے فاصلہ پر اُس کے محاذی ۶″ کا زاویہ بنے گا؟

۱۶۔ ایک مینار کی اونچائی ۱۵ فٹ ہے اور ایک آنکھ پر اُس کے محاذی زاویہ ۵ $\frac{۵}{۱۱}$′ بنتا ہے، مینار اور آنکھ کے درمیان جو فاصلہ ہو اُس کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔

۱۷۔ کسی گرجے کے مینار کی اونچائی ۱۰۰ فٹ ہے اور ایک آنکھ پر اُسکے محاذی زاویہ ۹′ بنتا ہے آنکھ اور گرجے کے درمیان جو فاصلہ ہو اُس کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔

۱۸۔ ایک سطح مائل کا چڑھاؤ ۲۱۰ گز طول میں ۳½ فٹ ہے سطح افقی سے اُس کے میلان کی تقریبی قیمت دقیقوں میں معلوم کرو۔

۱۹۔ فرض کرو کہ زمین کا نصف قطر ۳۹۶۰ میل ہے اور چاند کا فاصلہ زمین سے زمین کے نصف قطر کا ۶۰ گنا ہے، اگر چاند کا نصف قطر زمین پر زاویہ ۱۶′ بنائے تو اُس کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔

۲۰۔ جب کسی خاص مقام پر چاند غروب ہو رہا ہو تو زمین کا نصف قطر جو مقام مختص میں سے گزرتا ہے چاند کے مرکز پر ۵۷′ کا زاویہ بناتا ہے۔ اگر زمین کا نصف قطر ۳۹۶۰ میل فرض کیا جائے تو چاند اور زمین کے فاصلے کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔

۲۱۔ فرض کرو کہ زمین کے نصف قطر کے محاذی سورج کے فاصلے پر زاویہ ۸٫۷۶″ بنتا ہے اور ایک جغرافی میل کے مقابل زمین کے مرکز پر زاویہ ۱′ بنتا ہے تو ثابت کرو کہ سورج کا فاصلہ زمین سے تقریباً

۸۱۰ لاکھ جغرافی میل ہے، نیز زمین کا قطر اور محیط دونوں جغرافی میلوں میں دریافت کرو۔

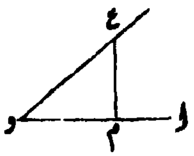
۲۲۔ مدار زمین کا نصف قطر ۹۲۷۰۰۰۰ میل ہے اور اُس کے محاذی ستارہ شعریٰ (سریس) پر زاویہ ۴ء۶″ بنتا ہے، ستارہ کا فاصلہ تقریباً دریافت کرو۔

باب دوم

ایسے زاویوں کی مثلثی نسبتیں جو زاویہ قائمہ سے کم ہیں

۲۵۔ اس باب میں ہم صرف اُن زاویوں کے متعلق بحث کرینگے جو زاویہ قائمہ سے کم ہوں۔

فرض کرو کہ ایک خط دائر و ع مقام و ا سے چکر لگاتا ہوا مقام و ع پر پہنچتا ہے۔ اور زاویہ ا و ع مرتسم کرتا ہے۔ خط دائر پر ایک نقطہ ع مقرر کرو اور خط ابتدائی و ا پر اس سے عمود نکالو۔



مثلث م و ع میں و ع وتر ہے، ع م عمود اور و م قاعدہ۔ زاویہ ا و ع کی مثلثی نسبتوں یا جملوں کی تعریف اکثر اس طرح کرتے ہیں

م ع / و ع یعنی عمود / وتر کو جیب زاویہ ا و ع کی کہتے ہیں

و م / و ع " قاعدہ / وتر کو جیب التمام زاویہ ا و ع کی کہتے ہیں

م ع / و م " عمود / قاعدہ کو مماس زاویہ ا و ع کا کہتے ہیں

و م / م ع " قاعدہ / عمود کو مماس التمام زاویہ ا و ع کا کہتے ہیں

$\frac{\text{وع}}{\text{مع}}$ یعنی $\frac{\text{وتر}}{\text{عمود}}$ کو قاطع التمام زاویہ اوع کا کہتے ہیں

$\frac{\text{وع}}{\text{وم}}$ " $\frac{\text{وتر}}{\text{قاعدہ}}$ کو قاطع " " "

اُس مقدار کو بقدر جس کے جیب التمام ایک سے کم ہو یعنی مقدار ۱- جم اوع کو سہم الجیب یا جیب معکوس زاویہ اوع کی کہتے ہیں۔ نیز اُس مقدار کو بقدر جس کے جیب زاویہ ایک سے کم ہو یعنی ۱-جب اوع کو سہم التمام زاویہ اوع کا کہتے ہیں۔

۲۶- یہ یاد رکھنا چاہیئے کہ مثلثی نسبتیں سب اعداد ہیں۔ اوپر کی آٹھ نسبتوں کو اختصار کی خاطر بالترتیب یوں لکھتے ہیں جب اوع، جم اوع ، مس اوع ، مم اوع ، قم اوع، قط اوع، سہ اوع ، سم اوع -

آخری دو نسبتیں شاذونادر استعمال ہوتی ہیں

۲۷ - تعریفات سے ظاہر ہے کہ قاطع التمام جیب کا متکافی یا مقلوب ہے -

یعنی قم اوع = $\frac{1}{\text{جب اوع}}$

اسیطرح سے قاطع زاویہ جیب التمام کا مقلوب ہے یعنی

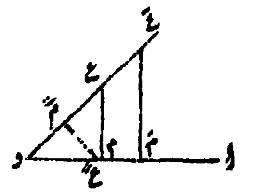
قط اوع = $\frac{1}{\text{جم اوع}}$

اور مماس التمام مماس کا مقلوب ہے یعنی

$$\text{مم اوع} = \frac{1}{\text{مس اوع}}$$

۲۸- ثابت کرو کہ ایک زاویہ کی مثلثی نسبتیں ہمیشہ وہی رہتی یعنی جب تک زاویہ نہ بدلے وہ نہیں بدلتیں۔

یہ ثابت کرنا مطلوب ہے کہ اگر خط دائر وع میں کوئی اور نقطہ عَ لیا جائے اور اس سے وا پر عمود عَمَ نکالا جائے تو مثلثی نسبتیں جو مثلثات وعَمَ اور وعم سے حاصل ہونگی وہ قیمت میں جداگانہ ایک دوسرے کے برابر ہونگی۔



ان مثلثوں میں زاویہ و مشترک ہے م اور مَ پر کے دونوں زاویئے قائمے ہیں۔ معلوم ہوا کہ یہ مثلث متشابہ ہیں اور اسلیئے بحکم اقلیدس م ۶ ش ۴، $\frac{\text{مع}}{\text{وع}} = \frac{\text{مَعَ}}{\text{وعَ}}$ جس سے ثابت ہوا کہ زاویہ اوع کی جیب ہمیشہ وہی رہتی ہے خواہ کوئی سا نقطہ خط دائر پر لیا جائے۔

اور چونکہ بموجب مسئلہ مذکورہ

$$\frac{\text{وم}}{\text{وع}} = \frac{\text{ومَ}}{\text{وعَ}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{مع}}{\text{وم}} = \frac{\text{مَعَ}}{\text{ومَ}}$$

اس سے ظاہر ہے کہ جیب التمام اور مماس زاویہ بھی ہمیشہ وہی رہتے ہیں خواہ نقطہ خط دائر پر کہیں لیا جائے اور باقی نسبتوں کی بھی

یہی کیفیت ہے۔

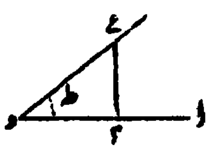
اگر و ا کو خط دائر خیال کریں اور اس کے کسی نقطہ ع٘ سے و ع پر عمود ع٘ م٘ نکالیں تو مثلث و ع٘ م٘ سے جو نسبتیں حاصل ہونگی ان کی قیمتیں بھی وہی ہونگی جو اوپر بیان ہوئیں۔

کیونکہ دو مثلثات و ع م اور و ع٘ م٘ میں زاویہ و مشترک ہے اور زاوئے و م٘ ع٘ اور و م ع قائمے ہیں، اس سے ظاہر ہے کہ یہ دونوں مثلث متساوی الزاویا اور اسلئے متشابہ ہیں۔ اس لئے

$$\frac{\text{م٘ ع٘}}{\text{و ع٘}} = \frac{\text{م ع}}{\text{و ع}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{و م٘}}{\text{و ع٘}} = \frac{\text{و م}}{\text{و ع}}$$

۲۹۔ مثلثی نسبتوں کے اساسی ارتباطات ہمیں آگے چلکر معلوم ہوگا کہ اگر کسی زاویہ کی ایک مثلثی نسبت معلوم ہو تو باقی سب نسبتوں کی عددی قیمتیں معلوم ہو سکتی ہیں۔

فرض کرو کہ طہ زاویہ ا و ع کو تعبیر کرتا ہے۔ [طہ کو ہم "تاہ" پڑھینگے]



مثلث م و ع میں بحکم اقلیدس م اش ۴۷

$$\text{م ع}^2 + \text{و م}^2 = \text{و ع}^2 \quad \ldots\ldots (1)$$

و ع² پر تقسیم کرنے سے

$$\left(\frac{\text{م ع}}{\text{و ع}}\right)^2 + \left(\frac{\text{و م}}{\text{و ع}}\right)^2 = 1$$

یعنی $(\text{جب طہ})^2 + (\text{جم طہ})^2 = 1$

مقدار (جب ط)^{۲} کو جب^{۲} ط لکھتے ہیں اور اسی طرح باقی سب نسبتوں کو۔

پس یہ ربط حاصل ہوا جب^{۲} ط + جم^{۲} ط = ۱ ..... (۲)

نیز طرفین مساوات (۱) کو وم^{۲} پر تقسیم کرنے سے

$$\left(\frac{\text{م ع}}{\text{و م}}\right)^{۲} + ۱ = \left(\frac{\text{و ع}}{\text{و م}}\right)^{۲}$$

یعنی (مس ط)^{۲} + ۱ = (قط ط)^{۲}

پس قط^{۲} ط = ۱ + مس^{۲} ط .... (۳)

طرفین مساوات (۱) کو م ع^{۲} پر تقسیم کرنے سے

$$۱ + \left(\frac{\text{و م}}{\text{م ع}}\right)^{۲} = \left(\frac{\text{و ع}}{\text{م ع}}\right)^{۲}$$

یعنی ۱ + (مم ط)^{۲} = (قم ط)^{۲}

پس قم^{۲} ط = ۱ + مم^{۲} ط .... (۴)

نیز چونکہ جب ط = $\frac{\text{م ع}}{\text{و ع}}$ اور جم ط = $\frac{\text{و م}}{\text{و ع}}$

اس لئے $\frac{\text{جب ط}}{\text{جم ط}} = \frac{\text{م ع}}{\text{و ع}} \div \frac{\text{و م}}{\text{و ع}} = \frac{\text{م ع}}{\text{و م}} =$ مس ط

اسلئے مس ط = $\frac{\text{جب ط}}{\text{جم ط}}$ .... (۵)

اور اسیطرح سے مم ط = $\frac{\text{جم ط}}{\text{جب ط}}$ .... (۶)

۳۰- مثال ۱- ثابت کرو کہ $\sqrt{\frac{1-\text{جم ا}}{1+\text{جم ا}}} = \text{قم ا} - \text{مم ا}$

$$\sqrt{\frac{1-\text{جم ا}}{1+\text{جم ا}}} = \sqrt{\frac{(1-\text{جم ا})^2}{1-\text{جم}^2\text{ا}}}$$

$$= \frac{1-\text{جم ا}}{\sqrt{1-\text{جم}^2\text{ا}}} = \frac{1-\text{جم ا}}{\text{جب ا}}$$ بموجب نتیجہ (۲) دفعہ آخر

$$= \frac{1}{\text{جب ا}} - \frac{\text{جم ا}}{\text{جب ا}} = \text{قم ا} - \text{مم ا}$$

مثال ۲- ثابت کرو کہ $\sqrt{\text{قط}^2\text{ا} + \text{قم}^2\text{ا}} = \text{مس ا} + \text{مم ا}$

ہم نے اوپر ثابت کیا ہے کہ $\text{قط}^2\text{ا} = 1 + \text{مس}^2\text{ا}$

اور $\text{قم}^2\text{ا} = 1 + \text{مم}^2\text{ا}$

اس لئے $\text{قط}^2\text{ا} + \text{قم}^2\text{ا} = \text{مس}^2\text{ا} + 2 + \text{مم}^2\text{ا}$

$$= \text{مس}^2\text{ا} + 2\,\text{مس ا مم ا} + \text{مم}^2\text{ا}$$

$$= (\text{مس ا} + \text{مم ا})^2$$

اس لئے $\sqrt{\text{قط}^2\text{ا} + \text{قم}^2\text{ا}} = \text{مس ا} + \text{مم ا}$

مثال ۳- ثابت کرو کہ $(\text{قم ا} - \text{جب ا})(\text{قط ا} - \text{جم ا})(\text{مس ا} + \text{مم ا}) = 1$

جملہ مجوزہ $= \left(\frac{1}{\text{جب ا}} - \text{جب ا}\right)\left(\frac{1}{\text{جم ا}} - \text{جم ا}\right)\left(\frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}} + \frac{\text{جم ا}}{\text{جب ا}}\right)$

$$= \frac{1-\text{جب}^2\text{ا}}{\text{جب ا}} \times \frac{1-\text{جم}^2\text{ا}}{\text{جم ا}} \times \frac{\text{جب}^2\text{ا} + \text{جم}^2\text{ا}}{\text{جب ا جم ا}}$$

$$= \frac{\text{جم}^2\text{ا}}{\text{جب ا}} \times \frac{\text{جب}^2\text{ا}}{\text{جم ا}} \times \frac{1}{\text{جب ا جم ا}} = 1$$

امثلہ نمبری ۵

ارتباطات ذیل کو ثابت کرو

۱۔ $\text{جم}^{۴}\text{ا} - \text{جب}^{۴}\text{ا} + ۱ = ۲\,\text{جم}^{۲}\text{ا}$

۲۔ $(\text{جب ا} + \text{جم ا})(۱ - \text{جب ا جم ا}) = \text{جب}^{۳}\text{ا} + \text{جم}^{۳}\text{ا}$

۳۔ $\frac{\text{جب ا}}{۱ + \text{جم ا}} + \frac{۱ + \text{جم ا}}{\text{جب ا}} = ۲\,\text{قم ا}$

۴۔ $\text{جم}^{۶}\text{ا} + \text{جب}^{۶}\text{ا} = ۱ - ۳\,\text{جب}^{۲}\text{ا} \times \text{جم}^{۲}\text{ا}$

۵۔ $\sqrt{\frac{۱ - \text{جب ا}}{۱ + \text{جب ا}}} = \text{قط ا} - \text{مس ا}$

۶۔ $\frac{\text{قم ا}}{\text{قم ا} - ۱} + \frac{\text{قم ا}}{\text{قم ا} + ۱} = ۲\,\text{قط}^{۲}\text{ا}$

۷۔ $\frac{\text{قم ا}}{\text{مم ا} + \text{مس ا}} = \text{جم ا}$

۸۔ $(\text{قط ا} + \text{جم ا})(\text{قط ا} - \text{جم ا}) = \text{مس}^{۲}\text{ا} + \text{جب}^{۲}\text{ا}$

۹۔ $\frac{۱}{\text{مم ا} + \text{مس ا}} = \text{جب ا جم ا}$

۱۰۔ $\frac{۱}{\text{قط ا} - \text{مس ا}} = \text{قط ا} + \text{مس ا}$

۱۱۔ $\frac{۱ - \text{مس ا}}{۱ + \text{مس ا}} = \frac{\text{مم ا} - ۱}{\text{مم ا} + ۱}$

۱۲۔ $\frac{۱ + \text{مس}^{۲}\text{ا}}{۱ + \text{مم}^{۲}\text{ا}} = \frac{\text{جب}^{۲}\text{ا}}{\text{جم}^{۲}\text{ا}}$

۱۳- (قط ا - مس ا)/(قط ا + مس ا) = ۱ - ۲ قط ا مس ا + ۲ مس۲ ا

۱۴- مس ا/(۱ - مم ا) + مم ا/(۱ - مس ا) = قط ا قم ا + ۱

۱۵- جم ا/(۱ - مس ا) + جب ا/(۱ - مم ا) = جب ا + جم ا

۱۶- (جب ا + جم ا)(مم ا + مس ا) = قط ا + قم ا

۱۷- قط۴ ا - قط۲ ا = مس۴ ا + مس۲ ا

۱۸- مم۴ ا + مم۲ ا = قم۴ ا - قم۲ ا

۱۹- √(قم۲ ا - ۱) = جم ا قم ا

۲۰- قط۲ ا قم۲ ا = مس۲ ا + مم۲ ا + ۲

۲۱- مس۲ ا - جب۲ ا = جب۴ ا قط۲ ا

۲۲- (۱ + مم ا - قم ا)(۱ + مس ا + قط ا) = ۲

۲۳- ۱/(قم ا - مم ا) - ۱/جب ا = ۱/جب ا - ۱/(قم ا + مم ا)

۲۴- (مم ا جم ا)/(مم ا + جم ا) = (مم ا - جم ا)/(مم ا جم ا)

۲۵- (مم ا + مس ب)/(مم ب + مس ا) = مم ا مس ب

۲۶- (۱/(قط۲ عہ - جم۲ عہ) + ۱/(قم۲ عہ - جب۲ عہ)) جم۲ عہ جب۲ عہ = (۱ - جم۲ عہ جب۲ عہ)/(۲ + جم۲ عہ جب۲ عہ)

۲۷- جب۶ ا - جم۶ ا = (جب۲ ا - جم۲ ا)(۱ - ۲ جب۲ ا جم۲ ا)

۲۸- (جم ا قم ا - جب ا قط ا)/(جم ا + جب ا) = قم ا - قط ا

۲۹۔ (مس ا + قط ا - ۱) / (مس ا - قط ا + ۱) = (۱ + جب ا) / جم ا

۳۰۔ (مس عہ + قم بہ)^{2} - (مم بہ - قط عہ)^{2} = ۲ مس عہ مم بہ (قم عہ + قط بہ)

۳۱۔ ۲ قط^{2} عہ - قط^{4} عہ - ۲ قم^{2} عہ + قم^{4} عہ = مم^{4} عہ - مس^{4} عہ

۳۲۔ (جب عہ + قم عہ)^{2} + (جم عہ + قط عہ)^{2} = مس^{2} عہ + مم^{2} عہ + ۷

۳۳۔ (قم ا + مم ا) سم ا - (قط ا + مس ا) سہ ا = (قم ا - قط ا) (۲ سہ ا سم ا)

۳۴۔ (۱ + مم ا + مس ا) (جب ا - جم ا) = قط ا / قم^{2} ا - قم ا / قط^{2} ا

۳۵۔ ۲ سہ ا + جم^{2} ا = ۱ + سہ^{2} ا

۳۱۔ مثلثی نسبتوں کی قیمتوں کی حدود

مساوات (۲) دفعہ ۲۹ سے

جب^{2} طہ + جم^{2} طہ = ۱

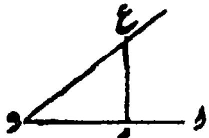
اب چونکہ جب^{2} طہ اور جم^{2} طہ دونوں مربعے ہیں اس لئے ضروری ہے کہ وہ مثبت ہوں اور چونکہ ان کا مجموعہ ایک کے برابر ہے۔ اس لئے ظاہر ہے کہ ان میں سے کوئی بھی ایک سے بڑا نہیں ہو سکتا۔

[کیونکہ اگر ان میں سے ایک مربع مثلاً جب^{2} طہ ایک سے بڑا ہو تو ضرور ہے کہ دوسرا منفی ہو اور یہ غیر ممکن ہے]

پس معلوم ہوا کہ جیب اور جیب التمام دونوں میں سے کوئی بھی تعداداً ایک سے بڑی نہیں ہو سکتی۔

اب چونکہ جیب طہ ایک سے بڑی نہیں ہوسکتی اس لئے قم طہ جو $\frac{1}{\text{جیب طہ}}$ کے برابر ہے ایک سے کم نہیں ہوسکتا۔
اسی طرح سے قطاطہ جو $\frac{1}{\text{جم طہ}}$ کے برابر ہے تعداداً ایک سے کم نہیں ہوسکتا۔

۳۲۔ شکل دفعہ ہذا سے نتائج مذکورہ بالا بآسانی حاصل ہوتے ہیں۔ کیونکہ زاویہ ا و ع کی خواہ کچھ ہی قیمت ہو اضلاع و م اور م ع طول میں وتر و ع سے کبھی زیادہ نہیں ہوسکتے۔



اب چونکہ م ع وتر و ع سے کبھی بڑا نہیں ہوسکتا اس لئے نسبت $\frac{\text{م ع}}{\text{و ع}}$ ایک سے کبھی زیادہ نہیں ہوسکتی، اس سے ظاہر ہے کہ جیب زاویہ ایک سے کبھی بڑھ نہیں سکتی۔
نیز چونکہ و م وتر و ع سے ہمیشہ کم رہتا ہے اس لئے نسبت $\frac{\text{و م}}{\text{و ع}}$ ایک سے ہمیشہ کم رہے گی یعنی جیب التمام ایک سے کبھی زیادہ نہ ہوگی۔

۳۳۔ ہم کسی زاویہ کی مثلثی نسبتوں کو کسی ایک نسبت کی رقوم میں بیان کرسکتے ہیں، اس ترکیب عمل کی توضیح امثلہ ذیل سے ہوگی

مثال ا۔ کسی زاویہ کی مثلثی نسبتوں کو جیب کی رقوم میں بیان کرو
فرض کرو کہ ا و ع کوئی زاویہ طہ ہے اور و ع کا طول ایک ہے اور ع م کا متناسب طول ج ہے۔



اقلیدس م ا ش ۴۷ سے $\text{وم} = \sqrt{\text{وع}^2 - \text{مع}^2} = \sqrt{1 - \text{ج}^2}$

$$\text{اس لئے جب ط} = \frac{\text{مع}}{\text{وع}} = \frac{\text{ج}}{1} = \text{ج}$$

$$\text{جم ط} = \frac{\text{وم}}{\text{وع}} = \sqrt{1 - \text{ج}^2} = \sqrt{1 - \text{جب}^2\,\text{ط}}$$

$$\text{مس ط} = \frac{\text{مع}}{\text{وم}} = \frac{\text{ج}}{\sqrt{1 - \text{ج}^2}} = \frac{\text{جب ط}}{\sqrt{1 - \text{جب}^2\,\text{ط}}}$$

$$\text{مم ط} = \frac{\text{وم}}{\text{مع}} = \frac{\sqrt{1 - \text{ج}^2}}{\text{ج}} = \frac{\sqrt{1 - \text{جب}^2\,\text{ط}}}{\text{جب ط}}$$

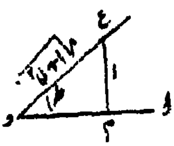
$$\text{قم ط} = \frac{\text{وع}}{\text{مع}} = \frac{1}{\text{ج}} = \frac{1}{\text{جب ط}}$$

$$\text{قط ط} = \frac{\text{وع}}{\text{وم}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{ج}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{جب}^2\,\text{ط}}}$$

آخری پانچ مساواتوں سے جو کچھ مطلوب تھا حاصل ہوا

مثال ۲۔ سب مثلثی نسبتوں کو مماس التمام کی رقوم میں بیان کرو۔

حسب معمول شکل بناؤ اور فرض کرو کہ م ع کا طول ایک ہے اور وم کا متناسب طول لا ہے



اقلیدس م ا ش ۴۷ سے

$$\text{وع} = \sqrt{\text{وم}^2 + \text{مع}^2} = \sqrt{1 + \text{لا}^2}$$

$$\text{اس لئے مم ط} = \frac{\text{وم}}{\text{مع}} = \frac{\text{لا}}{1} = \text{لا}$$

$$\text{جب ط} = \frac{\text{م ع}}{\text{و ع}} = \frac{1}{\sqrt{1+\text{لا}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\text{مم}^2\text{ط}}}$$

$$\text{جم ط} = \frac{\text{و م}}{\text{و ع}} = \frac{\text{لا}}{\sqrt{1+\text{لا}^2}} = \frac{\text{مم ط}}{\sqrt{1+\text{مم}^2\text{ط}}}$$

$$\text{مس ط} = \frac{\text{م ع}}{\text{و م}} = \frac{1}{\text{لا}} = \frac{1}{\text{مم ط}}$$

$$\text{قط ط} = \frac{\text{و ع}}{\text{و م}} = \frac{\sqrt{1+\text{لا}^2}}{\text{لا}} = \frac{\sqrt{1+\text{مم}^2\text{ط}}}{\text{مم ط}}$$

$$\text{اور قم ط} = \frac{\text{و ع}}{\text{م ع}} = \frac{\sqrt{1+\text{لا}^2}}{1} = \sqrt{1+\text{مم}^2\text{ط}}$$

جو کچھ مطلوب تھا آخری پانچ مساواتوں سے حاصل ہوا

یاد رہے کہ اوپر کی ہر ایک صورت میں اُس کسر کا نسب نما جسکی رقوم میں باقی مثلثی نسبتوں کو بیان کرنا مطلوب ہے ہمیشہ ایک لیا گیا ہے مثلاً زاویہ ط کی جیب $\frac{\text{م ع}}{\text{و ع}}$ ہے۔ اسلئے مثال ۱ میں نسب نما و ع کا طول ایک کے برابر لیا گیا ہے اور چونکہ مماس التمام $\frac{\text{و م}}{\text{م ع}}$ ہے اسلئے مثال ۲ میں ضلع م ع کو ایک کے مساوی فرض کیا ہے۔

اسی طرح سے اگر باقی مثلثی نسبتوں کو جیب التمام کی رقوم میں بیان کرنا ہو تو چونکہ جیب التمام $\frac{\text{و م}}{\text{و ع}}$ ہے اس لئے و ع کو ایک کے برابر فرض کرنا چاہیئے اور و م کو لا کے، اس کے بعد عمل بالکل ایسا ہی ہوگا جیسا کہ امثلہ ۱ اور ۲ میں ہوا۔

امثلہ ذیل میں اضلاع کی قیمتیں عددی ہیں

مثال ۳۔ اگر جم ط = $\frac{3}{5}$ تو باقی نسبتوں کی قیمتیں دریافت کرو۔

خط ابتدائی و ا پر و م برابر ۳ کے لو اور ایک عمود م ع کھینچو، نیز فرض کرو کہ ایک خط و ع جس کا طول ۵ ہے نقطہ و کے گرد چکر لگاتا ہوا عمود م ع کو نقطہ ع پر قطع کرتا ہے تب ا و ع زاویہ مجوزہ ہوگا

بحکم اقلیدس م ا ش ۴۷، $\text{م ع} = \sqrt{\text{و ع}^2 - \text{و م}^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

اس لئے صریحاً

$\text{جیب ط} = \frac{4}{5}$ ، $\text{مس ط} = \frac{4}{3}$ ، $\text{مم ط} = \frac{3}{4}$ ، $\text{قم ط} = \frac{5}{4}$ اور $\text{قط ط} = \frac{5}{3}$

مثال ۴ — اگر زاویہ ط کی جیب $\frac{1}{3}$ ہو تو باقی مثلثی نسبتوں کی عددی قیمتیں دریافت کرو۔

چونکہ $\text{جیب ط} = \frac{1}{3}$ اس لئے ربط (۲) دفعہ ۲۹ سے ظاہر ہے کہ

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \text{جم}^2\,\text{ط} = 1$$

یعنی $\text{جم}^2\,\text{ط} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

یعنی $\text{جم ط} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

اسلئے $\text{مس ط} = \frac{\text{جب ط}}{\text{جم ط}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$$\text{مم ط} = \frac{1}{\text{مس ط}} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{قم ط} = \frac{1}{\text{جب ط}} = 3$$

$$\text{قط ط} = \frac{1}{\text{جم ط}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{سہ ط} = 1 - \text{جم ط} = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{سم ط} = 1 - \text{جب ط} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

۴۳ — نقشۂ ذیل میں ہر مثلثی نسبت کو باقی سب نسبتوں کی رقوم میں بیان کیا گیا ہے

	جب ط	جم ط	مس ط	مم ط	قط ط	قم ط
جب ط	جب ط	$\sqrt{1-\text{جم}^2\text{ط}}$	$\frac{\text{مس ط}}{\sqrt{1+\text{مس}^2\text{ط}}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\text{مم}^2\text{ط}}}$	$\frac{\sqrt{\text{قط}^2\text{ط}-1}}{\text{قط ط}}$	$\frac{1}{\text{قم ط}}$
جم ط	$\sqrt{1-\text{جب}^2\text{ط}}$	جم ط	$\frac{1}{\sqrt{1+\text{مس}^2\text{ط}}}$	$\frac{\text{مم ط}}{\sqrt{1+\text{مم}^2\text{ط}}}$	$\frac{1}{\text{قط ط}}$	$\frac{\sqrt{\text{قم}^2\text{ط}-1}}{\text{قم ط}}$
مس ط	$\frac{\text{جب ط}}{\sqrt{1-\text{جب}^2\text{ط}}}$	$\frac{\sqrt{1-\text{جم}^2\text{ط}}}{\text{جم ط}}$	مس ط	$\frac{1}{\text{مم ط}}$	$\sqrt{\text{قط}^2\text{ط}-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\text{قم}^2\text{ط}-1}}$
مم ط	$\frac{\sqrt{1-\text{جب}^2\text{ط}}}{\text{جب ط}}$	$\frac{\text{جم ط}}{\sqrt{1-\text{جم}^2\text{ط}}}$	$\frac{1}{\text{مس ط}}$	مم ط	$\frac{1}{\sqrt{\text{قط}^2\text{ط}-1}}$	$\sqrt{\text{قم}^2\text{ط}-1}$
قط ط	$\frac{1}{\sqrt{1-\text{جب}^2\text{ط}}}$	$\frac{1}{\text{جم ط}}$	$\sqrt{1+\text{مس}^2\text{ط}}$	$\frac{\sqrt{1+\text{مم}^2\text{ط}}}{\text{مم ط}}$	قط ط	$\frac{\text{قم ط}}{\sqrt{\text{قم}^2\text{ط}-1}}$
قم ط	$\frac{1}{\text{جب ط}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\text{جم}^2\text{ط}}}$	$\frac{\sqrt{1+\text{مس}^2\text{ط}}}{\text{مس ط}}$	$\sqrt{1+\text{مم}^2\text{ط}}$	$\frac{\text{قط ط}}{\sqrt{\text{قط}^2\text{ط}-1}}$	قم ط

امثلہ نمبری ۶

۱- سب مثلثی نسبتوں کو جیب التمام کی رقوم میں بیان کرو

۲- سب نسبتوں کو مماس کی رقوم میں بیان کرو

۳- سب نسبتوں کو قاطع التمام کی رقوم میں بیان کرو

۴- سب نسبتوں کو قاطع الزاویہ کی رقوم میں بیان کرو

۵- ایک زاویہ کی جیب $\frac{۱}{۴}$ ہے اسکی اور مثلثی نسبتوں کی عددی قیمتیں دریافت کرو۔

۶- اگر جیب ط = $\frac{۱۲}{۱۳}$ تو مس ط اور سہ ط کی قیمتیں دریافت کرو

۷- اگر جیب ط = $\frac{۱۱}{۶۱}$ تو مس ط، جم ط اور قط ط دریافت کرو

۸- اگر جم ط = $-\frac{۴}{۵}$ تو معلوم کرو جیب ط اور مم ط

۹- اگر جم ا = $\frac{۹}{۴۱}$ تو مس ا اور قم ا دریافت کرو

۱۰- اگر مس ط = $\frac{۳}{۴}$ تو زاویہ ط کی جب، جم، سہ اور قم دریافت کرو

۱۱- اگر مس ط = $\frac{۱}{\sqrt{۷}}$ تو $\frac{\text{قم}^۲\text{ط} - \text{قط}^۲\text{ط}}{\text{قم}^۲\text{ط} + \text{قط}^۲\text{ط}}$ کی قیمت دریافت کرو

۱۲- اگر مم ط = $\frac{۱۵}{۸}$ تو جم ط اور قم ط کی قیمتیں دریافت کرو

۱۳- اگر قط ا = $\frac{۳}{۲}$ تو معلوم کرو مس ا اور قم ا۔

۱۴- اگر ۲ جب ط = ۲ - جم ط تو جب ط دریافت کرو۔

۱۵- اگر ۸ جب ط = ۴ + جم ط تو معلوم کرو جب ط۔

۱۶- اگر مس ط + قط ط = ۱٫۵ تو معلوم کرو جب ط

۱۷- اگر مم ط + قم ط = ۵ تو معلوم کرو جم ط۔

۱۸- اگر ۳ قط^{۴} طہ + ۸ = ۱۰ قط^{۲} طہ تو مس طہ کی قیمت دریافت کرو۔

۱۹- اگر مس^{۲} طہ + قط طہ = ۵ تو معلوم کرو جم طہ

۲۰- اگر مس طہ + مم طہ = ۲ تو معلوم کرو جب طہ۔

۲۱- اگر قط^{۲} طہ = ۲ + ۲ مس طہ تو معلوم کرو مس طہ۔

۲۲- اگر مس طہ = $\frac{۲لا(لا+۱)}{۲لا+۱}$ تو معلوم کرو جب طہ اور جم طہ

۳۵- اب ہم چند کارآمد زاویوں کی مثلثی نسبتیں دریافت کرینگے، سوالات میں یہ اکثر استعمال ہوتی ہیں۔ طالب علم کو ان سے بخوبی واقف ہونا چاہیئے مگر سب سے پہلے ہم "لاتناہی" کے معنی بیان کرینگے۔

تعریف- ہماری موجودہ اغراض کے لئے یہ تعریف کافی ہوگی کہ لاتناہی ایک ایسا عدد ہے جو کسی اور عدد سے جو بیان ہو سکے یا ذہن میں آسکے بڑا ہو، اس کو ہم علامت ∞ سے تعبیر کریں گے۔

بڑے سے بڑے عدد کا تصور باندھنا محض ناممکن ہے کیونکہ اگر ایسے عدد کا خیال میں آنا ممکن ہو تو اُس سے بڑے عدد کے تخیل میں کیا مشکل ہوسکتی ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ خواہ کتنا ہی بڑا عدد کیوں نہ لیا جائے وہ لاتناہی سے ہمیشہ کم رہیگا۔ پس ایسے بیانات مثلاً لا = ∞ کا یہ مطلب ہرگز نہیں کہ لاتناہی کی کوئی خاص قیمت ہے اور لا اُس کے برابر ہے۔ نیز معادلات لا = ∞ اور ما = ∞ سے یہ نتیجہ لازماً صادق نہیں

آتا کہ لا = ما

تعریف۔ صفر وہ عدد ہے جو ایک کی ہر ایک کسر مقررہ سے کم ہو۔ مقدار محدود وہ ہے جو نہ تو صفر ہو اور نہ مقدار غیر متناہی۔

۳۶۔ اگر کسی محدود مقدار کو صفر پر تقسیم کیا جائے تو خارج قسمت مقدار غیر متناہی کے برابر ہوگا۔

فرض کرو کہ ا کوئی مقدار محدود ہے ہم یہ ثابت کرینگے کہ ا ÷ صفر ایک ایسی مقدار کے برابر ہے جو ہر ایک مقدار محدود (مثلاً ن) سے جو ہمارے ذہن میں آسکے بڑی ہے۔

ا کو صفر پر تقسیم کرو اور ن کو خارج قسمت ٹھہراؤ ۰) ا (ن

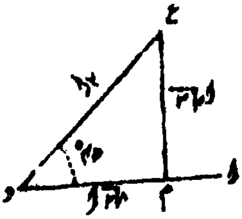
اب چونکہ ۰ × ن = ۰ اسلئے باقی ا ہے ا

پس معلوم ہوا کہ خواہ کتنا بڑا عدد (ن) بطور خارج قسمت کے لیا جائے ا ہمیشہ باقی بچے گا۔ اس سے ثابت ہوا کہ نسبت ا ÷ صفر ہر ایک عدد سے بڑی ہے خواہ وہ عدد کتنا ہی بڑا کیوں نہ ہو اور اس کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں کہ

ا ÷ ۰ = ∞

اور اگر ا مقدار غیر متناہی نہ ہو تو ا ÷ ∞ = ۰

چند کارآمد صورتوں میں مثلثی نسبتوں کی قیمتیں



۳۷۔ ۴۵° کا زاویہ

فرض کرو کہ زاویہ مرتسمہ ا و ع = ۴۵°

اب چونکہ ایک مثلث کے تینوں

زاویوں کا مجموعہ ۲ قائموں کے برابر ہوتا ہے، اس لئے

زاویہ وعم = ۱۸۰° − زاویہ ع وم − زاویہ ع م و

= ۱۸۰ − ۴۵ − ۹۰° = ۴۵° = زاویہ ع وم

∴ وم = م ع

اگر وع کو ۲ ا کے برابر فرض کریں تو

۴ا² = وع² = وم² + م ع² = ۲ × وم²

یعنی وم = ا√۲

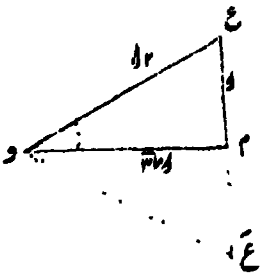
اس لئے جب ۴۵° = $\frac{\text{م ع}}{\text{وع}} = \frac{\text{ا}\sqrt{2}}{\text{۲ا}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

جم ۴۵° = $\frac{\text{وم}}{\text{وع}} = \frac{\text{ا}\sqrt{2}}{\text{۲ا}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

اور مس ۴۵° = ۱

۳۸۔ ۳۰° کا زاویہ

فرض کرو کہ ۳۰° کا زاویہ م وع ہے، ع م کو عَ تک خارج کرو اور م عَ کو ع م کے برابر بناؤ۔



مثلث وم ع اور وم عَ میں

اضلاع وم اور م عَ اضلاع وم اور م ع کے بالترتیب برابر ہیں۔ نیز ان کے درمیانی زاویئے قائمے ہیں۔ اس لئے

وعَ = وع اور زاویہ وعَ ع = زاویہ وع عَ = ۶۰°

اس سے معلوم ہوا کہ مثلث عَ وع متساوی الاضلاع ہے۔

اب اگر وع کا طول ۲ا ہو

تو مع = ½ عَ ع = ½ وع = ا

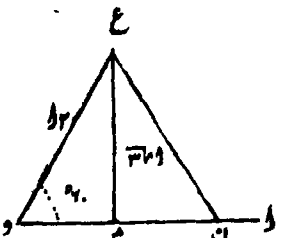
نیز وم = √(وع² − مع²) = √(۴ا² − ا²) = √۳ ا

∴ جب ۳۰° = مع / وع = ½

جم ۳۰° = وم / وع = √۳ ا / ۲ا = √۳ / ۲

اور مس ۳۰° = جب ۳۰° / جم ۳۰° = ۱ / √۳

۳۹ — ۶۰° کا زاویہ



فرض کرو کہ ۶۰° کا زاویہ ا و ع ہے،
وا پر ایک ایسا نقطہ ن لو کہ
م ن = وم = ا (فرض کرو)
اب مثلث وم ع کے اضلاع
وم اور م ع مثلث ن م ع کے
اضلاع ن م اور م ع کے بالترتیب برابر ہیں اور ان کے
درمیانی زاویے قائمے ہیں۔ اس سے معلوم ہوا کہ مثلث
باہم مساوی ہیں۔

اس لئے ع ن = وع اور

∠ ع ن م = ∠ ع وم = ۶۰°

اس سے ثابت ہوا کہ مثلث وع ن متساوی الاضلاع ہے۔

اس لئے وع = ون = ۲ وم = ۲ا

$$\therefore \text{م ع} = \sqrt{\text{وع}^2 - \text{وم}^2} = \sqrt{\text{۴ا}^2 - \text{ا}^2} = \sqrt{۳} \times \text{ا}$$

$$\text{اسلئے جب } ۶۰^\circ = \frac{\text{م ع}}{\text{وع}} = \frac{\sqrt{۳}\,\text{ا}}{۲\,\text{ا}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\text{جم } ۶۰^\circ = \frac{\text{وم}}{\text{وع}} = \frac{\text{ا}}{۲\,\text{ا}} = \frac{۱}{۲}$$

$$\text{س } ۶۰^\circ = \frac{\text{جب } ۶۰^\circ}{\text{جم } ۶۰^\circ} = \sqrt{۳}$$

۴۰ - صفر درجہ (°۰) کا زاویہ -

فرض کرو کہ خط دائر وع نے و کے گرد گھومنے سے نہایت ہی قلیل زاویہ پیدا کیا ہے۔



یعنی فرض کرو کہ زاویہ م وع نہایت چھوٹا ہے ظاہر ہے کہ مقدار ع م نہایت ہی قلیل ہے اور ابتدا میں جب وع نے اس زاویہ کا مرتسم کرنا عین شروع ہی کیا تھا تو اُس وقت مقدار م ع ہر مقدار معینہ سے کم تھی یعنی ایک ایسی مقدار تھی جسے ہم صفر سے تعبیر کرتے ہیں -

اب اگر فرض کیا جائے کہ زاویہ اوع واقعی صفر کے برابر ہے



تو اس صورت میں وم اور وع (اور نقاط ع اور م) ایک دوسرے پر منطبق ہونگے اور عمود ع م معدوم ہو جائے گا

اس لئے وم = وع اور ع م = ۰

∴ جب ۰° = $\frac{\text{مع}}{\text{وع}}$ = $\frac{۰}{\text{وع}}$ = ۰

جم ۰° = $\frac{\text{وم}}{\text{وع}}$ = $\frac{\text{وع}}{\text{وع}}$ = ۱

اور مس ۰° = $\frac{۰}{۱}$ = ۰

نیز مم ۰° = قیمت نسبت $\frac{\text{وم}}{\text{مع}}$ جب م اور ع ایک دوسرے پر منطبق ہوں

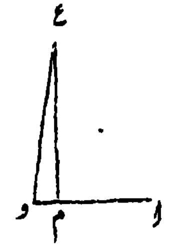
= $\frac{\text{مقدار محدود}}{\text{نہایت ہی قلیل مقدار}}$ = ایک ایسی مقدار جو لاانتہا بڑی ہے

اس لئے مم ۰° = ∞

اسی طرح سے قم ۰° = $\frac{\text{وع}}{\text{مع}}$ = ∞

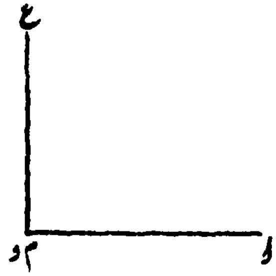
اور قط ۰° = $\frac{\text{وع}}{\text{وم}}$ = ۱

۴۱۔ ۹۰° کا زاویہ



فرض کرو کہ زاویہ اوع مقدار میں ۹۰° کے نہایت ہی قریب ہے مگر بالکل ۹۰° نہیں ہے۔

جب وع فی الحقیقت ایک قائمہ مرتسم کریگا تو اُس وقت نقطہ م نقطہ و پر منطبق ہوگا یعنی وم فنا ہوگا



اور وع برابر مع کے ہوگا۔ پس

$$\text{جب } ۹۰^\circ = \frac{\text{مع}}{\text{وع}} = \frac{\text{وع}}{\text{وع}} = ۱$$

$$\text{جم } ۹۰^\circ = \frac{\text{وم}}{\text{وع}} = \frac{۰}{\text{وع}} = ۰$$

$$\text{مس } ۹۰^\circ = \frac{\text{مع}}{\text{وم}} = \frac{\text{مقدار محدود}}{\text{نہایت ہی قلیل مقدار}} = \text{لا انتہا بڑا عدد} = \infty$$

$$\text{ظم } ۹۰^\circ = \frac{\text{وم}}{\text{مع}} = \frac{۰}{\text{مع}} = ۰$$

$$\text{قط } ۹۰^\circ = \frac{\text{وع}}{\text{وم}} = \infty$$ (بعینہٖ اُس عمل سے جو مماس کی صورتیں ہوا)

$$\text{اور قم } ۹۰^\circ = \frac{\text{وع}}{\text{مع}} = \frac{\text{وع}}{\text{وع}} = ۱$$

۴۲۔ اوپر کے زاویوں کی تین مشہور مثلثی نسبتیں یاد رکھنی چاہئیں جو زاوئے اکثر استعمال ہوتے ہیں وہ یہ ہیں۔

$۰^\circ \quad ۳۰^\circ \quad ۴۵^\circ \quad ۶۰^\circ \quad ۹۰^\circ$

یاد رہے کہ ان کی جیوب بالترتیب مفصلہ ذیل نسبتوں کے جذروں کے برابر ہیں۔

$$\frac{۰}{۴}،\ \frac{۱}{۴}،\ \frac{۲}{۴}،\ \frac{۳}{۴}،\ \frac{۴}{۴}$$

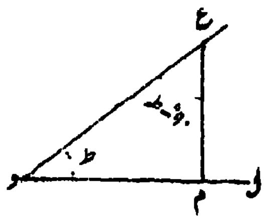
اور ان کی جیوب التمام بالترتیب مفصلہ ذیل نسبتوں کے جذروں کے برابر ہیں۔

$$\frac{۴}{۴}،\ \frac{۳}{۴}،\ \frac{۲}{۴}،\ \frac{۱}{۴}،\ \frac{۰}{۱}$$

اور مماس زاویہ نسبت جیب ÷ جیب التمام کے برابر ہے۔

۴۳۔ متمم زاویئے۔ تعریف۔ اگر دو زاویوں کا مجموعہ ایک قائمہ کے برابر ہو تو ان میں سے ہر ایک کو دوسرے کا متمم کہتے ہیں۔ مثلاً فرض کرو کہ کوئی زاویہ ط ہے اس کا متمم زاویہ ۹۰° - ط ہوگا۔

۴۴۔ دو متمم زاویوں کی مثلثی نسبتوں کے باہمی ارتباطات دریافت کرو



فرض کرو کہ ایک چکر لگانے والا خط و ا سے شروع ہو کر مقام وع پر پہنچتا ہے اور اپنے گھماؤ سے زاویہ اوع یعنی زاویہ ط پیدا کرتا ہے۔ خط دائر وع پر کوئی نقطہ ع مقرر کرو اور اس سے و ا پر عمود ع م نکالو۔

اب چونکہ ایک مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کے برابر ہوتا ہے اور چونکہ زاویہ وم ع قائمہ ہے اس لئے معلوم ہوا کہ زاویہ م وع اور زاویہ وع م کا حاصل جمع ایک قائمہ کے برابر ہے۔ پس یہ دونوں زاوئے ایک دوسرے کے متمم ہوئے۔

یعنی زاویہ وع م = ۹۰° - ط

[جس وقت زاویہ وع م زیر بحث ہو تو یاد رہے کہ خط ع م "قاعدہ" ہے اور م و "عمود"]

پس۔

جب (۹۰° - طہ) = جب م ع و = $\frac{\text{م و}}{\text{ع و}}$ = جم اوع = جم طہ

جم (۹۰° - طہ) = جم م ع و = $\frac{\text{ع م}}{\text{ع و}}$ = جب اوع = جب طہ

مس (۹۰° - طہ) = مس م ع و = $\frac{\text{م و}}{\text{ع م}}$ = مم اوع = مم طہ

مم (۹۰° - طہ) = مم م ع و = $\frac{\text{ع م}}{\text{م و}}$ = مس اوع = مس طہ

قم (۹۰° - طہ) = قم م ع و = $\frac{\text{ع و}}{\text{م و}}$ = قط اوع = قط طہ

قط (۹۰° - طہ) = قط م ع و = $\frac{\text{ع و}}{\text{ع م}}$ = قم اوع = قم طہ

اس لئے معلوم ہوا کہ

کسی زاویہ کی جیب = اسکے متمم کی جیب التمام کے
کسی زاویہ کا مماس = اسکے متمم کے مماس التمام کے
کسی زاویہ کا قاطع = اسکے متمم کے قاطع التمام کے

۴۵ - طالب علم کو آگے جانے سے پیشتر جدول ذیل سے بخوبی واقف ہو جانا چاہیے

زاویہ	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°
جیب	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱
جیب التمام	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	۰
مماس	۰	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	۱	$\sqrt{3}$	∞
مماس التمام	∞	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	۰
قاطع التمام	∞	۲	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	۱
قاطع الزاویہ	۱	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	۲	∞

اگر طالب علم صرف اس حصہ کو بخوبی یاد کرلے جو جلی خط کے اندر ہے تو اُس کی مدد سے باقی مثلثی نسبتوں کا حساب بآسانی لگ سکیگا کیونکہ

(۱) جیوب ۶۰° اور ۹۰° بالترتیب جیوب التمام ۳۰° اور ۰° کے برابر ہیں۔

(۲) جیوب التمام ۶۰° اور ۹۰° جیوب ۳۰° اور ۰° کے برابر ہیں

اس سے دوسری اور تیسری سطریں معلوم ہوتی ہیں۔

(۳) کسی زاویہ کا مماس جیب کو جیب التمام پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ اس لئے معلوم ہوا کہ چوتھی سطر کی کوئی مقدار دوسری سطر کی کسی مقدار کو تیسری سطر کی مطابق مقدار پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے

(۴) چونکہ زاویہ کا مماس التمام اس کے مماس کا مقلوب ہوتا ہے اس لئے اس پانچویں سطر کی مقداریں چوتھی سطر کی مقداروں کے مقلوبوں کے برابر ہیں

(۵) چونکہ قم طہ = $\frac{۱}{\text{جب طہ}}$ اس لئے چھٹی سطر دوسری کی مقادیر کو الٹانے سے حاصل ہوتی ہے۔

(۶) اور چونکہ قط طہ = $\frac{۱}{\text{جم طہ}}$ اس لئے معلوم ہوا کہ ساتویں سطر تیسری سطر کی مقادیر کو الٹانے سے حاصل ہوتی ہے۔

امثلہ نمبری ۷

۱۔ اگر ا = ۳۰° تو تصدیق کرو کہ

(۱) جم ۲ ا = جم^۲ ا − جب^۲ ا = ۲ جم^۲ ا − ۱

(۲) جب ۲ا = ۲ جب ا جم ا

(۳) جم ۳ا = ۴ جم^{۳}ا − ۳ جم ا

(۴) جب ۳ا = ۳ جب ا − ۴ جب^{۳} ا

(۵) مس ۲ا = $\frac{\text{۲ مس ا}}{\text{۱ − مس}^{۲}\text{ا}}$

۲۔ اگر ا = ۴۵° تو اس کی تصدیق کرو کہ

(۱) جب ۲ا = ۲ جب ا جم ا

(۲) جم ۲ا = ۱ − ۲ جب^{۲} ا

(۳) مس ۲ا = $\frac{\text{۲ مس ا}}{\text{۱ − مس}^{۲}\text{ا}}$

اس کی تصدیق کرو کہ

۳۔ جب^{۲} ۳۰° + جب^{۲} ۴۵° + جب^{۲} ۶۰° = $\frac{۳}{۲}$

۴۔ مس^{۲} ۳۰° + مس^{۲} ۴۵° + مس^{۲} ۶۰° = ۴$\frac{۱}{۳}$

۵۔ جب ۳۰° جم ۶۰° + جم ۳۰° جب ۶۰° = ۱

۶۔ جم ۴۵° جم ۶۰° − جب ۴۵° جب ۶۰° = − $\frac{\sqrt{۳} - ۱}{۲\sqrt{۲}}$

۷۔ $\frac{۴}{۳}$ مم^{۲} ۳۰° + ۳ جب^{۲} ۶۰° − ۲ قم^{۲} ۶۰° − $\frac{۳}{۴}$ مس^{۲} ۳۰° = ۳$\frac{۱}{۳}$

۸۔ قم^{۲} ۴۵° × قط^{۲} ۳۰° × جب^{۳} ۹۰° × جم ۶۰° = ۱$\frac{۱}{۳}$

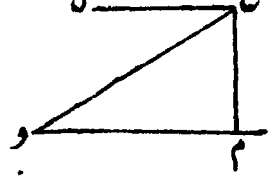
۹۔ ۴ مم^{۲} ۴۵° − قط^{۲} ۶۰° + جب^{۳} ۳۰° = $\frac{۱}{۸}$

باب سوم

بلندیوں اور فاصلوں کے آسان سوالات

۴۶ — علم مثلث کے خاص مقاصد میں سے ایک یہ بھی ہے کہ اس کی مدد سے اشیاء کی بلندیاں اور مختلف نقاط کے باہمی فاصلے حقیقی طور پر ناپے بغیر دریافت ہو سکیں۔

۴۷ — فرض کرو کہ و اور ع دو نقطے ہیں اور ع بہ نسبت و کے اونچی سطح پر واقع ہے۔ نقطہ و سے ایک خط افقی و م کھینچو جو عمودی خط ع م کو نقطہ م پر قطع کرے۔



اگر مقام و پر کھڑے ہو کر نقطہ ع کی سمت میں دیکھیں تو زاویہ م و ع جو خط نظری و ع اور خط اُفقی و م کے درمیان بنتا ہے نقطہ ع کا زاویہ ارتفاع یا زاویہ فراز کہلاتا ہے۔
م و کے متوازی ع ن کھینچو تب نقطہ ع میں سے گزرنے والا خط اُفقی ع ن ہوگا۔ اب اگر مقام ع سے نیچے کی طرف کو نقطہ و کی سیدھ میں دیکھیں تو زاویہ ن ع و جو خط نظری ع و اور

خط اُفقی ع ن کے درمیان بنتا ہے نقطہ و کا زاویہ انخفاض یا زاویہ نشیب کہلاتا ہے۔

۴۸۔ زاویوں کی عملی پیمائش کے لئے دو آلے اکثر استعمال ہوتے ہیں زاویہ بیں (تھیوڈولائیٹ) اور سُدس (سکس ٹنٹ)

زاویہ بیں سے اکثر سطح عمودی میں زاویوں کا اندازہ ہوسکتا ہے اس کی نہایت مساوی صورت یہ ہے۔ ایک دور بیں لکڑی کی چپٹی تختی پر قائم کردی جاتی ہے۔ سہارے کے لئے اس تختی کے تین پائے ہوتے ہیں اور ان کو ہموار سطح پر اس طرح رکھتے ہیں کہ تختی اور دوربیں دونوں سطح اُفقی میں ہوں۔

فرض کرو کہ یہ تختی مقام و پر متوازی الافق ہے اور دوربیں کا رخ ابتدا میں سمت و م میں ہے۔ اب دوربیں کو سطح عمودی میں پھراتے جاؤ جبتک کہ اس کا رخ عین نقطہ ع کی سیدھ میں نہ ہوجائے۔ جب ایسا ہو تو ایک درجہ دار پیمانہ سے ہمکو دوربیں کے گھماؤ کے زاویہ کی مقدار معلوم ہوجائیگی، یعنی ہمکو زاویہ ارتفاع م و ع معلوم ہوجائے گا۔

اسی طرح سے اگر آلہ مقام ع پر ہو تو زاویہ ن ع و جس میں سے دوربیں سمت اُفقی سے نیچے کی طرف نقطہ و کے محاذی ہونیکے لئے پھرے گی زاویہ انخفاض ن ع و ہوگا۔

اس آلہ کی مدد سے اُن زاویوں کی پیمائش بھی ممکن ہے جو سطح اُفقی میں واقع ہوں۔

۴۹۔ سُدس (سکس ٹنٹ) سے ایسے زاویوں کی پیمائش ہوسکتی ہے جو کسی دو نقاط د اور ع کے خط وصل کے محاذی تیسرے

نقطہ ف پر نہیں۔ اکثر یہ آلہ جہازوں پر استعمال ہوتا ہے اس کی بناوٹ اور اس کا استعمال ذرا پیچیدہ ہے۔ لہذا ہم اس جگہ اس کا ذکر نہیں کرتے۔

۵۰۔ اب ہم فاصلوں اور بلندیوں کی چند آسان مثالیں حل کریں گے۔

مثال ا۔ سطح ہموار پر ایک علم قائم ہے اس کے پائین سے ۱۵۰ فٹ کے فاصلہ پر ایک مقام سے اسکی چوٹی کا زاویہ ارتفاع °۳۰ مشاہدہ کیا گیا ہے، علم کی بلندی دریافت کرو۔

فرض کرو کہ م ع (شکل دفعہ ۴۷) علم ہے اور و ایسا نقطہ ہے جس سے زاویہ ارتفاع دیکھا گیا ہے۔

تب و م = ۱۵۰ فٹ اور زاویہ م و ع = °۳۰

اب چونکہ ع م و زاویہ قائمہ ہے۔ اس لئے

$$\frac{\text{م ع}}{\text{و م}} = \text{مس م و ع} = \text{مس } ۳۰^\circ = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \quad (\text{دفعہ } ۳۸)$$

$$\therefore \text{م ع} = \frac{\text{و م}}{\sqrt{۳}} = \frac{۱۵۰}{\sqrt{۳}} = \frac{۱۵۰\sqrt{۳}}{۳} = ۵۰\sqrt{۳}$$

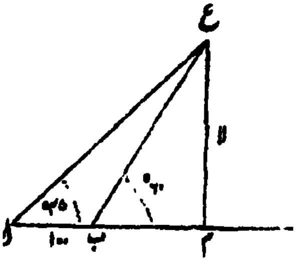
اور استخراج جذر سے $\sqrt{۳} = ۱٫۷۳۲۰۵\ldots\ldots$

اس لئے م ع = ۵۰ × ۱٫۷۳۲۰۵......... فٹ

= ۸۶٫۶۰۲۵......... فٹ

مثال ۲۔ سطح اُفقی پر ایک گرجے کا مینار ہے اور ایک شخص اس کی بلندی دریافت کرنا چاہتا ہے۔ سطح کے کسی مقام سے

اس نے مینار کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ۴۵° مشاہدہ کیا اور ۱۰۰ فٹ برج کی سمت میں جانے پر زاویہ ارتفاع ۶۰° دیکھا۔ برج کی بلندی اور پائین برج سے اس کا ابتدائی فاصلہ دریافت کرو۔



فرض کرو کہ مینار کی چوٹی ع ہے اور ا اور ب دو مقامات ہیں جہاں سے زاویوں کے ارتفاع مشاہدہ کئے گئے ہیں۔ اب ممدودہ پر عمود ع م نکالو اور فرض کرو کہ م ع = لا

ہمیں معلوم ہے اب = ۱۰۰ فٹ

∠ م ا ع = ۴۵°

اور ∠ م ب ع = ۶۰°

اس سے ام / لا = مم ۴۵°

اور ب م / لا = مم ۶۰° = ۱ / √۳

اس لئے ام = لا اور ب م = لا / √۳

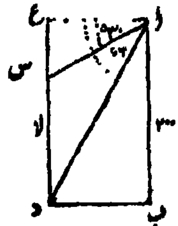
∴ ۱۰۰ = ام − ب م = لا − لا / √۳ = لا (√۳ − ۱) / √۳

∴ لا = ۱۰۰ √۳ / (√۳ − ۱) = ۱۰۰ √۳ (√۳ + ۱) / (۳ − ۱) = ۵۰ (۳ + √۳)

= ۵۰ (۳ + ۱٫۷۳۲۰۵ ....) = ۲۳۶٫۶ .... فٹ

نیز ام = لا، اس سے معلوم ہوا کہ ہر دو مطلوبہ فاصلے ۲۳۶٫۶ .... فٹ ہیں

مثال ۳۔ ایک ۲۰۰ فٹ بلند پہاڑ کی چوٹی سے ایک بُرج کے نقطۂ اسفل اور راس کے انخفاضی زاویے ۶۰° اور ۳۰° مشاہدہ کئے گئے ہیں، بُرج کی بلندی دریافت کرو



فرض کرو کہ س د بُرج ہے۔
ا نقطۂ نگاہ اور ب ا پہاڑ کی بلندی۔
خطِ اُفقی ا ع کھینچو تب زاویہ ع ا س = ۳۰°
اور زاویہ ع ا د = ۶۰°

فرض کرو کہ بُرج کی بلندی لا فٹ ہے، دس کو اتنا خارج کرو کہ وہ ا ع کو نقطہ ع پر ملے یعنی س ع = ا ب - لا = ۲۰۰ - لا
اب چونکہ ∠ ا د ب = ∠ د ا ع = ۶۰° (اقلیدس م ا ش ۲۹)

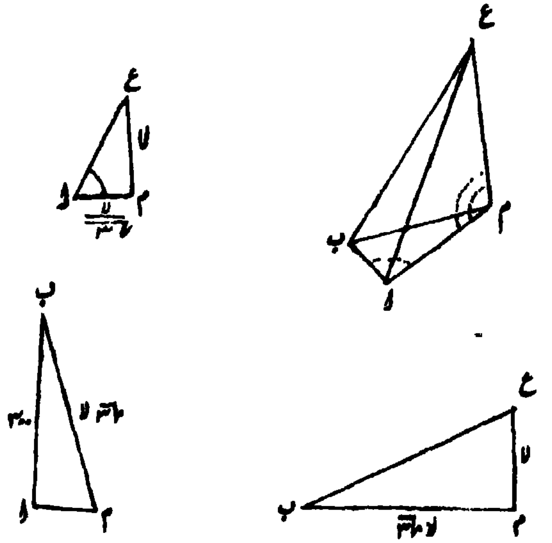
∴ د ب = ا ب مم ا د ب = ۲۰۰ مم ۶۰° = $\frac{۲۰۰}{\sqrt{۳}}$

نیز $\frac{۲۰۰ - لا}{د ب} = \frac{س ع}{ع ا}$ = مس ۳۰° = $\frac{1}{\sqrt{۳}}$

اس لئے ۲۰۰ - لا = $\frac{د ب}{\sqrt{۳}} = \frac{۲۰۰}{۳}$

پس لا = ۲۰۰ - $\frac{۲۰۰}{۳}$ = ۱۳۳ $\frac{1}{۳}$

مثال ۴۔ ایک بُرج کی جانب جنوب میں کسی مقام سے ایک شخص نے بُرج کا زاویہ ارتفاع ۶۰° دیکھا اس کے بعد ایک سطحِ اُفقی پر وہ ۳۰۰ فٹ مغرب کی طرف گیا اور وہاں زاویہ ارتفاع ۳۰° پایا، بُرج کی بلندی اور بُرج سے اُس کا ابتدائی فاصلہ دریافت کرو۔



فرض کرو کہ ع برج کی چوٹی ہے اور ع م بلندی۔ نقطہ ا برج کے جنوب میں اور ب نقطہ ا کی جانب مغرب میں واقع ہے۔
زاویے ع م ا، ع م ب، م ا ب سب قائمے ہیں۔ چونکہ مثلثات ع ا م، ع ب م، ا ب م سب مختلف سطحوں میں واقع ہیں اسلئے سہولت کی خاطر ان کو دوسری، تیسری، چوتھی شکلوں میں جداگانہ موافق ایک مناسب پیمانۂ واحد کے دکھایا گیا ہے۔

ہمیں معلوم ہے کہ ا ب = ۳۰۰ فٹ، اور زاویہ ع ا م = ۶۰°
اور زاویہ ع ب م = ۳۰°

فرض کرو کہ برج کی بلندی لا فٹ ہے۔

دوسری شکل سے $\frac{\text{ام}}{\text{لا}}$ = مم ۶۰° = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

یعنی ام = $\frac{\text{لا}}{\sqrt{3}}$

تیسری شکل سے $\frac{\text{ب م}}{\text{لا}}$ = مم ۳۰° = $\sqrt{3}$

یعنی ب م = $\sqrt{3}$ × لا

آخری شکل سے ب م² = ام² + اب²

یعنی ۳ لا² = $\frac{1}{3}$ لا² + ۳۰۰²

∴ ۸ لا² = ۳ × ۳۰۰²

∴ لا = $\frac{300\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ = ۱۵۰ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ = ۷۵ $\sqrt{6}$

= ۷۵ × ۲٫۴۴۹۴۹..... = ۱۸۳٫۷۱..... فٹ

نیز اس شخص کا برج سے ابتدائی فاصلہ

= لا مم ۶۰° = $\frac{\text{لا}}{\sqrt{3}}$ = ۷۵ × $\sqrt{2}$

= ۷۵ × (۱٫۴۱۴۲.......) = ۱۰۶٫۰۶۵......... فٹ

امثلہ نمبری ۸

۱۔ دریا کے ایک کنارے پر کھڑے ہو کر ایک شخص نے

مقابل کے کنارے پر ایک درخت کے محاذی زاویہ ۶۰° مشاہدہ کیا کنارے سے ۴۰ فٹ پیچھے ہٹنے پر وہی زاویہ ۳۰° دیکھا، درخت کی اونچائی اور دریا کی چوڑائی دریافت کرو۔

۲۔ کسی خاص مقام سے ایک برج کا زاویہ ارتفاع دیکھا تو اس کا مماس التمام $\frac{3}{5}$ تھا، برج کی سیدھ میں ۳۲ فٹ جانے پر پھر وہی زاویہ دیکھا تو اس کا مماس التمام $\frac{2}{5}$ تھا۔ برج کی بلندی دریافت کرو۔

۳۔ مقام ا سے ایک برج کا زاویہ ارتفاع دیکھا گیا اس وقت اس کا مماس $\frac{5}{12}$ تھا۔ برج کی طرف ۲۴۰ فٹ جانے پر زاویہ ارتفاع دوبارہ دیکھا گیا تو اس کا مماس $\frac{3}{4}$ تھا۔ برج کی بلندی دریافت کرو۔

۴۔ ایک ایسے دو دکش کی بلندی دریافت کرو جبکہ اس کی جڑ کی سیدھ میں ۱۰۰ فٹ ایک خط افقی پر جانے سے اس کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ۳۰° سے ۴۵° ہو جائے۔

۵۔ ایک پہاڑ سطح سمندر سے ۲۰۰ فٹ اونچا ہے، اس کی چوٹی سے کسی شخص نے دو جہازوں کے انخفاضی زاویے بالترتیب ۴۵° اور ۳۰° مشاہدہ کئے اگر جہازوں کو ملانے والا خط پہاڑ کے پائین میں سے گذرے تو جہازوں کا باہمی فاصلہ دریافت کرو۔

۶۔ ایک چٹان کی چوٹی سے کسی شخص نے سمندر میں دو لنگروں کے انخفاضی زاویے ۳۹° اور ۲۶° مشاہدہ کئے۔ اگر لنگروں کا درمیانی فاصلہ ۳۰۰ گز ہو اور ان کو ملانے والا خط چٹان کی جڑ میں سے گزرے تو چٹان کی بلندی اور سب سے نزدیک لنگر کا فاصلہ

چٹان کے پائین سے دریافت کرو۔ معلوم ہے۔

مم ۲۶° = ۲٫۰۵۰۳ اور مم ۳۹° = ۱٫۲۳۴۹

۷۔ ایک درخت کے اوپر کا حصہ آندھی سے ٹوٹکر سطح زمین سے زاویہ ۳۰° بناتا ہے اور جڑ سے فاصلہ اُس نقطے کا جہاں درخت کی چوٹی زمین سے مس کرتی ہے ۵۰ فٹ ہے درخت کی بلندی دریافت کرو۔

۸۔ دو برجوں کے درمیان اُفقی فاصلہ ۶۰ فٹ ہے اور دوسرے برج کی چوٹی سے جو ۱۵۰ فٹ بلند ہے پہلے بُرج کی چوٹی کا زاویہ انخفاض ۳۰° مشاہدہ کیا گیا ہے، پہلے بُرج کی بلندی دریافت کرو۔

۹۔ ایک نامکمل برج کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع (۴۵°) ایک ایسے مقام سے مشاہدہ کیا گیا ہے جو پائین برج سے ۱۲۰ فٹ کے فاصلے پر ہے معلوم کرو کہ مینار اور کتنا اونچا کیا جائے کہ اس کا زاویہ ارتفاع اُسی مقام سے ۶۰° ہو۔

۱۰۔ ایک سڑک ۱۰۰ فٹ چوڑی ہے اور اس کے دونوں طرف دو ستون ہیں جن کی اونچائی ایک ہی ہے، ستونوں کے درمیان سڑک کے کسی نقطہ سے ان کی چوٹیوں کے ارتفاع ۶۰° اور ۳۰° مشاہدہ کئے گئے ہیں۔ ستونوں کی بلندی اور نقطہ کا مقام دریافت کرو۔

۱۱۔ ایک بُرج کے راس کا زاویہ ارتفاع ایک مقام سے ۶۰° دیکھا گیا۔ اُس سے ۴۰ فٹ اونچے مقام پر ارتفاع ۴۵° تھا، برج کی بلندی اور مشاہدہ کرنے والے مقامات سے اسکا اُفقی فاصلہ دریافت کرو۔

۱۲۔ دامنِ کوہ میں کسی مقام سے ایک پہاڑ کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ۴۵°

دکھائی دیا، جب ایک سطح مائل پر جو اُفق سے ۳۰° کا زاویہ بناتی تھی ایک میل اوپر چڑھے تو وہی زاویہ ارتفاع ۶۰° تھا۔ پہاڑ کی بلندی دریافت کرو۔

۱۳۔ اگر ایک لکڑی کا سایہ اُس کی بلندی کا $\sqrt{3}$ گنا ہو تو سورج کا زاویہ ارتفاع دریافت کرو۔

۱۴۔ سطح ہموار پر ایک بُرج ہے۔ جب سورج کا ارتفاع ۳۰° ہو تو بُرج کے سایہ کا طول بہ نسبت اُس صورت کے جبکہ ارتفاع ۴۵° ہو ۶۰ فٹ زیادہ ہوتا ہے ثابت کرو کہ بُرج کی بلندی ۳۰ (۱ + $\sqrt{3}$) فٹ ہے۔

۱۵۔ تین مقامات ا، ب، ج سمندر کے سیدھے کنارے پر اس طرح واقع ہیں کہ اب = ب ج = ۲ میل۔ ایک جہاز کنارے کی عمودی سمت میں مقام ب کی طرف آرہا ہے اور راستہ کے کسی مقام پر طول اج کے محاذی جہاز پر زاویہ ۶۰° بنتا ہے اس کے بعد جہاز دس منٹ کے لئے اُس سمت میں اُسی رفتار سے جاتا ہے اور پھر اج کے محاذی زاویہ ۱۲۰° بنتا ہے۔ معلوم کرو کہ جہاز کس رفتار سے جارہا ہے۔

۱۶۔ دو علم سطح ہموار پر قائم ہیں، علموں کے درمیان اور ان کے ملانے والے خط پر ا اور ب دو نقطے ہیں اگر ا سے علموں کے ارتفاعی زاویئے دیکھے جائیں تو وہ ۳۰° اور ۶۰° ہیں اور اگر ب سے دیکھے جائیں تو ۶۰° اور ۴۵° ہیں اگر اب کا طول ۳۰ فٹ ہو تو علموں کی بلندیاں اور ان کا باہمی فاصلہ دریافت کرو۔

۱۷۔ فرض کرو کہ سطح افقی پر ایک مینار ہے، س اُسکا سر اور پ پائیں دو مقامات ا اور ب اُسی سطح میں لئے گئے ہیں، اب = ۳۲ فٹ

اور زاویہ پ اب = ۹۰° نیز یہ معلوم ہے کہ م س ا پ = $\frac{2}{5}$ اور م س ب پ = $\frac{3}{5}$ مینار کی بلندی دریافت کرو۔

۱۸۔ سطح ہموار پر ایک مربع برج ہے سطح کے کسی مقام سے برج کے سر کے تین کونے دکھائی دیتے ہیں اور وہاں کھڑے ہوکر کونوں کے تین ارتفاعی زاوئے ۴۵°، ۶۰°، ۴۵° مشاہدہ کئے گئے ہیں ثابت کرو کہ برج کے ارتفاع کو برج کے ایک ضلع کے طول سے وہی نسبت ہے جو $\sqrt{6}(\sqrt{5}+1)$ کو ۴ سے ہے۔

۱۹۔ ایک روشنی کے مینار کا رخ شمال کی طرف ہے اور اس سے روشنی کی شعاعیں قطاع دائرہ کی شکل میں اسمات شمال مشرق اور شمال مغرب کے درمیانی حصہ میں تقسیم ہوتی ہیں۔ ایک جہاز مغرب کی طرف جارہا تھا اُس پر ایک مسافر کو روشنی کی شعاعیں سب سے اول اُس وقت دکھائی دیں جبکہ جہاز روشنی گھر سے ۵ میل کے فاصلے پر تھا اور وہ شعاعیں $30\sqrt{2}$ منٹ تک دکھائی دیتی رہیں جہاز کی رفتار دریافت کرو۔

۲۰۔ ایک دریا کے کنارے متوازی اور مستقیم ہیں ایک شخص نے ایک کنارے لا ما کے کسی مقام ق پر کھڑے ہوکر دیکھا کہ مقام ق اور مقابل کے کنارے پر کے مقام ط کو ملانے والا خط مستقیم ق ما سے زاویہ ۳۰° بناتا ہے اس کے بعد وہ دریا کے کنارے ۴۰۰ گز تک ق ما تک چلا اور اس نے دیکھا کہ زاویہ ط ما لا = ۶۰° دریا کا عرض دریافت کرو۔

۲۱۔ ایک شخص شمال کی طرف جارہا تھا اُس نے اپنے ٹھیک مشرق کی طرف ایک غبارہ کو شمال مغرب کی طرف جاتے دیکھا غبارہ کا ارتفاع اس وقت ۶۰° تھا جب وہ ۴۰۰ گز آگے چلا تو غبارہ عین اُس کی سمت راس میں تھا اگر غبارہ کا ارتفاع اس اثنا میں یکساں رہا ہو تو اُس کی بلندی دریافت کرو۔

باب چہارم

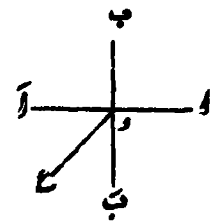
علم مثلث میں علامات جبریہ کا استعمال

۵۱ ـ مثبت اور منفی زاویے ۔ دفعہ ۸ میں جب ہمنے ایسے زاویوں کا ذکر کیا جن کی مقدار پر کم از قائمہ ہونے کی قید نہ تھی تو ہمنے یہ فرض کر لیا تھا کہ خط دائر ہمیشہ گھڑی کی سوئیوں کی مقابل سمت میں چکر لگاتا ہے جبکہ گھڑی کا رخ اوپر کی طرف ہو، اس سمت کو ہم **مقابل سمت ساعت** کہیں گے اور آئندہ جب کوئی خط دائر اس سمت میں حرکت کرے گا تو ہم اس کو یوں بیان کریں گے کہ یہ مثبت سمت میں چکر لگاتا ہے یا مثبت زاویہ مرتسم کرتا ہے ۔

جب خط دائر سمت مذکورۂ بالا کے مخالف یعنی گھڑی کی سوئیوں کی سمت میں حرکت کرے تو اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ یہ منفی سمت میں چکر لگاتا ہے اور منفی زاویہ مرتسم کرتا ہے ۔

اس منفی سمت کو **موافق سمت ساعت** بھی کہتے ہیں ۔

۵۲ ـ فرض کرو کہ خط دائر مقام و ا سے شروع ہو کر چکر لگاتا ہوا مقام و ع پر پہنچتا ہے جو و اَ اور و ب کے



درمیان واقع ہے اور زاویہ اَوبَ
کی تنصیف کرتا ہے اب اگر یہ
مثبت سمت میں گھوم کر اس مقام
پر پہنچا ہو تو اس نے ایک مثبت
زاویہ + ۲۲۵° مرتسم کیا ہے لیکن
اگر اس کی گردش کی سمت منفی
تھی تو اس نے ایک منفی زاویہ - ۱۳۵° اپنی حرکت سے پیدا کیا ہے۔

فرض کرو کہ ہمیں صرف یہی معلوم ہے کہ خط دائر مقام مذکورہ پر ہے۔ اب ممکن ہے کہ اس نے ایک، دو، تین۔...... پورے چکر لگانے کے بعد ایک مثبت زاویہ + ۲۲۵° مرتسم کیا ہو یا ایک، دو، تین، ...... پورے چکر منفی سمت میں لگانے کے بعد ایک منفی زاویہ - ۱۳۵° اپنی گردش سے پیدا کیا ہو۔

صورت اول میں یہ زاویہ مرتسمہ ۲۲۵° ہوگا یا ۳۶۰° + ۲۲۵°،
یا ۲×۳۶۰° + ۲۲۵°، یا ۳×۳۶۰° + ۲۲۵°،......
یعنی ۲۲۵°، یا ۵۸۵°، یا ۹۴۵°، یا ۱۳۰۵°،......

صورت دوم میں زاویہ مرتسمہ - ۱۳۵° ہوگا یا - ۳۶۰° - ۱۳۵°،......
یا - ۲×۳۶۰° - ۱۳۵°، یا - ۳×۳۶۰° - ۱۳۵°،......
یعنی - ۱۳۵°، یا - ۴۹۵°، یا - ۸۵۵°، یا - ۱۲۱۵°،......

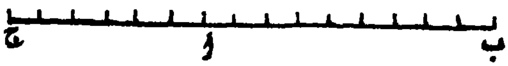
۵۳ — مثبت اور منفی خطوط۔ اس سے پیشتر کہ ہم زاویہ قائمہ سے بڑے زاویوں کی مثلثی نسبتوں کی تعریفیں لکھیں یہ بیان کرنا ضروری ہوگا کہ مختلف سمتوں میں ناپے ہوئے خطوط کی عددی قیمتوں کے

ماقبل علامات جبریہ + اور − کے تصرف سے ہم ان میں کس طرح امتیاز کر سکتے ہیں۔

مثال :- ایک شخص مقام ب سے جو مقام ا کے ۹ میل مشرق کی طرف واقع ہے روانہ ہوتا ہے اور ۳ میل فی گھنٹے کے حساب سے مغرب کی طرف جاتا ہے اس کا **مقام** ۵ گھنٹے کے بعد بلحاظ ا کے دریافت کرو۔

۱ گھنٹہ کے بعد اس کا فاصلہ ا کے مشرق کی طرف ۹−۳ میل یعنی ۶ میل ہوگا

۲ " " " " ا " " " ۶−۳ میل یعنی ۳ میل ہوگا



اب دونوں صورتوں میں ہم نے عدد ۳ کو میلوں کی اُس تعداد سے تفریق کر دیا ہے بقدر جس کے وہ شخص ہر گھنٹے کے شروع میں ا کے مشرق کی طرف ہوتا ہے اگر اسی عمل کو جاری رکھیں تو ہمیں یہ نتیجے حاصل ہوں گے۔

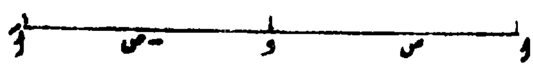
۳ گھنٹوں کے بعد اس شخص کا فاصلہ ا کے مشرق کی طرف ۳−۳ یعنی صفر میل ہوگا

۴ " " " " " ۰−۳ یعنی −۳ میل ہوگا

۵ " " " " " −۳−۳ یعنی −۶ میل ہوگا

لیکن یہ ظاہر ہے کہ ۳ گھنٹے کی مسافت کے بعد وہ شخص مقام ا پر پہنچ جائے گا اور اگر وہ اپنے سفر کو دو گھنٹے اور جاری رکھے تو وہ مقام ج پر ہوگا جو ا کے ۶ میل مغرب کی طرف واقع ہے۔
اس سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ جملہ " ا سے −۶ میل مشرق

کی طرف" کا مطلب وہی ہے جو و سے ۲ میل مغرب کی طرف" کا ہے
اس قسم کی دلائل سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ اگر ایک سمت میں ایک فاصلہ ا سے تعبیر کیا جائے تو اس کی مخالف سمت میں اس کے مساوی فاصلہ - ا سے تعبیر ہوگا



اگر و سے ایک فاصلہ وا ناپا جائے اور وا = ص تو -ص سے فاصلہ وا تعبیر ہوگا جہاں اَ ایک ایسا نقطہ اَو ممدودہ پر ہے کہ اَو = وا

۴۔۵ ترتیب حروف کو ملحوظ رکھنے کی خاص ضرورت

ایک ہندسی خط کی سمت کو اُن حروف کی ترتیب سے تعبیر کرتے ہیں جو اُسے نامزد کرنے میں استعمال کئے جائیں مثلاً اب سے ایک ایسا خط تعبیر ہوتا ہے جو ا سے ب کی سمت میں ناپا گیا ہو لیکن اگر یہی خط ب سے ا کی سمت میں ناپا گیا ہو تو ہم اسکو ب ا کہیں گے نہ کہ اب۔

اگر ا اور ب دو مقامات ایک دوسرے سے ۱۲ میل کے فاصلہ پر ہوں



تو اب سے وہ فاصلہ تعبیر ہوگا جو ایک شخص نے ا سے ب تک چلنے میں طے کیا ہے اور ب ا سے وہ فاصلہ جو ب سے ا تک چلنے میں طے ہوا ہے۔ اگر پہلے فاصلے کو +۱۲ سے تعبیر کریں تو دوسرے کو -۱۲ سے تعبیر کریں گے، اگر کوئی شخص ا سے ب تک چلے اور پھر واپس ا پر آئے تو اس کا کل فاصلہ طے کردہ ا سے صفر ہوگا

اور اس بیان کا طریق کتابت یہ ہے -

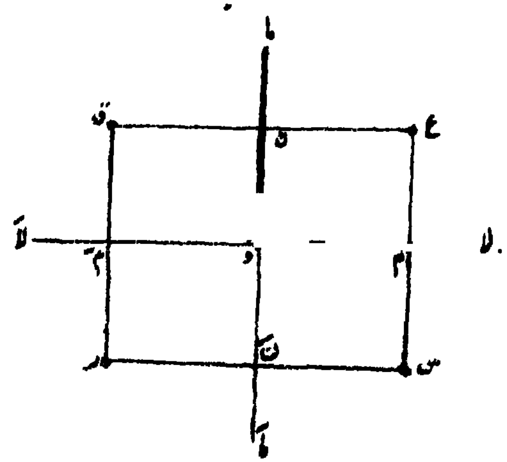
اب + ب ا = ۱۲ + (-۱۲) = ۰

۵۵- جب ایک خط واڑ وع مقام ولا سے شروع ہوکر اپنی گردش سے مختلف زاویے پیدا کرے تو ان زاویوں کی مثلثی نسبتوں کی تعریفات میں قوانین ذیل کا خیال رکھنا چاہئیے -

جو خطوط ولا پر یا اس کے متوازی ناپے جائیں ان کو ہمیشہ مثبت خیال کرنا چاہیئے اگر وہ سمت ولا میں کھینچے جائیں - اور منفی اگر سمت مخالف ولاَ میں کھینچے جائیں -

اب فرض کرو کہ ولا کو وما زاویہ قائمہ پر قطع کرتا ہے تو وہ سب خطوط جو ولا پر عمود ہوں مثبت کہلائیں گے اگر وہ سمت وما میں کھینچے گئے ہوں اور منفی اگر وہ سمت مخالف وماَ میں کھینچے گئے ہوں -

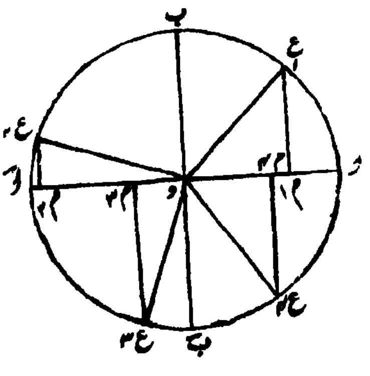
شکل کھینچنے میں یاد رہے کہ ولا کا رُخ دائیں طرف متوازی الافق ہے اور وما سمت راس میں اوپر کی طرف ہے -



فاصلوں کے مثبت اور منفی ہونیکے قوانین کو ذیل کی صورت میں یاد رکھنا آسان ہوگا۔
اُفقی فاصلے جو وما کے دائیں طرف کو ناپے جائیں مثبت ہوتے ہیں
" " " " بائیں " " " " منفی "
عمودی فاصلے جو والا سے اوپر کی طرف کو ناپے جائیں مثبت ہوتے ہیں
" " " " نیچے " " " منفی "
مثلاً اوپر کی شکل میں اُفقی خطوط وم، ن ع، نَ س سب مثبت ہیں
اور ومَ، ن ق، نَ ر سب منفی ہیں۔

اسی طرح سے عمودی خطوط ون، م ع، مَ ق سب مثبت ہیں اور ونَ، م س، مَ ر سب منفی ہیں۔

۵۶ - کسی مقدار کے زاویوں کی مثلثی نسبتیں



فرض کرو کہ خط ابتدائی وا مثبت سمت میں کھینچا گیا ہے اور واَ کی سمت وا کے مقابل ہے۔

فرض کرو کہ ب وبَ خط وا سے زاویہ قائمہ بناتا ہے اور اس کی مثبت سمت وب ہے

فرض کرو کہ خط دائر وع مقام وا سے شروع ہوکر کسی سمت (مثبت یا منفی) میں چکر لگاتا ہے اور اپنی گردش سے کوئی زاویہ پیدا کرتا ہے جس کی مقدار پر کوئی قید نہیں ہے خط دائر پر کسی

نقطہ ع سے او أ پر عمود ع م نکالو۔
[اوپر کی شکل میں چکر لگانے والے خط کے چار مقامات دکھائے گئے ہیں،
ہر ایک ربع میں ایک مقام ہے اور امتیاز کی خاطر اعداد موخرہ ۱، ۲، ۳، ۴
حرف ع سے منسلک کر دئے گئے ہیں]

پس جب زاویوں کی مقدار پر کم از قائمہ ہونے کی قید نہ ہو تو مثلثی نسبتوں کی تعریفات کسی مقدار کے زاویوں کے لئے مفصلۂ ذیل ہوں گی اور یاد رہے کہ زاویہ حادّہ کی صورت میں جو تعریفات ہمنے مثلثی نسبتوں کی دفعہ ۲۵ میں دی ہیں وہ بالکل وہی ہیں جو ہم اب لکھتے ہیں۔

م ع / و ع کو زاویہ او ع کی جیب کہتے ہیں

و م / و ع " " " جیب التمام "

م ع / و م " " " کا مماس "

و م / م ع " " " " مماس التمام "

و ع / و م " " " " قاطع "

و ع / م ع " " " " قاطع التمام "

مقادیر ۱۔ جم او ع اور ۱ ۔ جب او ع کو زاویہ او ع کا بالترتیب سہم (یا جیب معکوس) اور سہم التمام کہتے ہیں۔

۵۷ — بدینہ اُس عمل سے جو دفعہ ۴۹ میں ہوا ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ زاویہ ا و ع (= ط) کی تمام قیمتوں کے لئے

جب^۲ ط + جم^۲ ط = ۱

جب ط / جم ط = مس ط

قط^۲ ط = ۱ + مس^۲ ط

اور قم^۲ ط = ۱ + مم^۲ ط

۵۸ — مثلثی نسبتوں کی علامات

ربع اول — فرض کرو کہ خط دائر ربع اول میں ہے جیسے **و ع**، چکر لگانے والے خط کو ہمیشہ مثبت خیال کرو۔

اس صورت میں **و م** اور م ع دونوں مثبت ہیں جس سے معلوم ہوا کہ مثلثی نسبتیں سب مثبت ہیں۔

ربع دوم — فرض کرو کہ خط دائر و ع ربع دوم میں ہے۔

اس صورت میں م ع مثبت ہے اور **و م** منفی۔

چونکہ جیب زاویہ دو مثبت مقادیر کی باہمی نسبت کے برابر ہے اس لئے وہ مثبت ہے۔ چونکہ جیب التمام ایک ایسی نسبت کے برابر ہے جس کا شمار کنندہ منفی ہے اور نسب نما مثبت، اس لئے وہ منفی ہے۔

مماس زاویہ ایک ایسی نسبت کے برابر ہے جس کا شمار کنندہ

مثبت ہے اور نسبت نما منفی اس لئے وہ منفی ہے۔

مماس التمام منفی ہے

قاطع التمام مثبت ہے

قاطع زاویہ منفی ہے

ربع سوم۔ فرض کرو کہ خط دائر ربع سوم میں ہے جیسے و ع۳
اس صورت میں م۳ع۳ اور و م۳ دونوں منفی ہیں۔

جیب زاویہ منفی ہے

جیب التمام منفی ہے

مماس زاویہ مثبت ہے

مماس التمام مثبت ہے

قاطع التمام منفی ہے

قاطع زاویہ منفی ہے

ربع چہارم۔ فرض کرو کہ چکر لگانے والا خط و ع۴ ربع چہارم میں ہے تب م۴ع۴ منفی ہوگا اور و م۴ مثبت، اس لئے

جیب زاویہ منفی ہے

جیب التمام مثبت ہے

مماس زاویہ منفی ہے

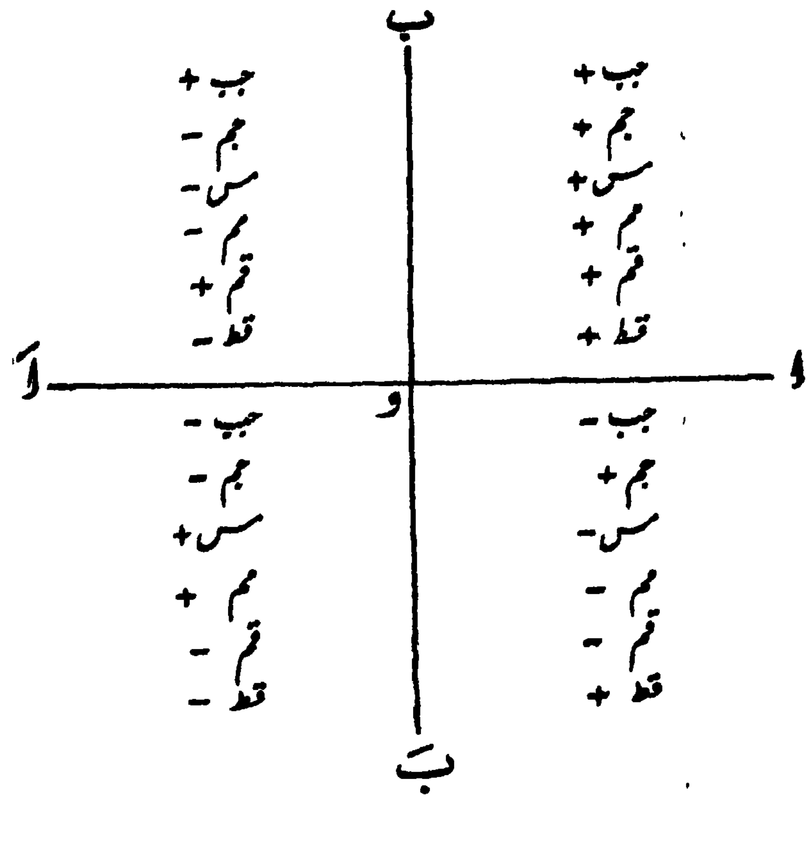
مماس التمام منفی ہے

قاطع التمام منفی ہے

قاطع زاویہ مثبت ہے

جدول ذیل میں مثلثی نسبتوں کی علامات اُن تمام صورتوں میں

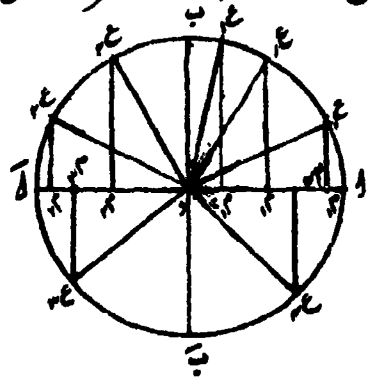
مندرج ہیں جب خط دائر کسی ایک ربع میں واقع ہو اور کسی زاویہ مجوزہ کا ایک طرف سے احاطہ کرے۔



۵۹ — جب زاویہ ۰ سے ۳۶۰° تک بڑھے تو اس کی ہر ایک شلثی نسبت کی مقدار اور علامت کے تغیرات کی تحقیق کرو۔

فرض کرو کہ چکر لگانے والے خط و ع کا مستقل طول ا ہے،
جب یہ و ا پر منطبق ہوتا ہے تو طول و م برابر ا کے ہوتا ہے

اور جب یہ وب پر منطبق ہوتا ہے تو نقطہ م۱ نقطہ و پر منطبق ہوتا ہے اور وم۱ صفر ہوتا ہے، نیز جب خط دائر وا سے وب تک حرکت کرتا ہے تو طول وم۱ کی قیمت ا سے صفر تک گھٹتی ہے



جب خط دائر دوسرے ربع میں وب سے وا' تک حرکت کرتا ہے تو طول وم۲ منفی ہوتا ہے اور تعداداً صفر سے ا تک بڑھتا ہے (یعنی از روئے الجبرا صفر سے -ا تک گھٹتا ہے)

تیسرے ربع میں طول وم۳ از روئے الجبرا -ا سے صفر تک بڑھتا ہے اور چوتھے ربع میں طول وم۴ صفر سے ا تک بڑھتا ہے۔

ربع اول میں طول م۱ع۱ صفر سے ا تک بڑھتا ہے، م۲ع۲ ربع دوم میں ا سے صفر تک گھٹتا ہے، ربع سوم میں م۳ع۳ از روئے الجبرا صفر سے -ا تک گھٹتا ہے اور ربع چہارم میں م۴ع۴ از روئے الجبرا -ا سے صفر تک بڑھتا ہے۔

۶۰ — **جیب** — ربع اول میں جب زاویہ ۰° سے ۹۰° تک بڑھتا ہے تو اس کی جیب (م۱ع۱/ا) متواتر ۰/ا سے ا/ا تک یعنی صفر سے ا تک بڑھتی ہے۔

دوسرے ربع میں جب زاویہ ۹۰° سے ۱۸۰° تک بڑھتا ہے تو اس کی جیب ا/ا سے ۰/ا تک یعنی ا سے صفر تک گھٹتی ہے۔

ربع سوم میں جب زاویہ ۱۸۰° سے ۲۷۰° تک بڑھتا ہے تو اس کی جیب ن/و سے -ا/و تک یعنی صفر سے -۱ تک گھٹتی ہے۔

ربع چہارم میں جب زاویہ ۲۷۰° سے ۳۶۰° تک بڑھتا ہے تو اس کی جیب -ا/و سے ن/و تک یعنی -۱ سے صفر تک گھٹتی ہے۔

۶۱ — **جیب التمام**۔ ربع اول میں جیب التمام وم/و کے برابر ہے اور ا/و سے ن/و یعنی ۱ سے صفر تک گھٹتی ہے۔

ربع دوم میں یہ ن/و سے -ا/و یعنی صفر سے -۱ تک گھٹتی ہے

ربع سوم میں یہ -ا/و سے ن/و تک یعنی -۱ سے صفر تک بڑھتی ہے

ربع چہارم میں یہ ن/و سے ا/و تک یعنی صفر سے ۱ تک بڑھتی ہے

۶۲ — **مماس** ربع اول میں م۱ع۱ متواتر صفر سے ۱ تک بڑھتا ہے اور وم۱ متواتر ۱ سے صفر تک گھٹتا ہے پس نسبت م۱ع۱/وم۱ متواتر بڑھتی ہے (کیونکہ اس کا شمار کنندہ متواتر بڑھتا ہے اور نسب نما متواتر گھٹتا ہے)

جب وا پر وع۱ منطبق ہوتا ہے تو مماس صفر ہوتا ہے اور جب خط دائر ایک ایسے زاویے میں گھوم چکتا ہے جو قائمہ سے ذرا کم ہو یعنی جب وع۱ تقریباً وب پر منطبق ہوتا ہے تو اس وقت م۱ع۱ تقریباً ا کے برابر ہوتا ہے اور طول وم۱ نہایت چھوٹا ہوتا ہے، اس وقت نسبت م۱ع۱/وم۱ کی قیمت نہایت زیادہ

ہوتی ہے اور و ع، جتنا قریب و ب کے آتا جاتا ہے اُتنا ہی اس نسبت کی مقدار بڑھتی جاتی ہے، اس سے معلوم ہوا کہ خط دائر کو و ب کے کافی قریب لانے سے ہم مماس زاویہ کو جتنا چاہیں بڑا بنا سکتے ہیں، اس کو اس طرح بھی بیان کرتے ہیں کہ جب زاویہ ۹۰° ہوتا ہے تو اس کا مماس غیر متناہی ہوتا ہے۔

مقدار غیر متناہی کو تعبیر کرنے کے لئے رمز ∞ استعمال کرتے ہیں۔ پس ربع اول میں مماس صفر سے ∞ تک بڑھتا ہے۔

دوسرے ربع میں جب خط دائر ایک ایسا زاویہ مرتسم کرتا ہے جو قائمہ سے ذرا زیادہ ہو تو اس وقت م۲ع۲ تقریباً ا کے برابر ہوتا ہے اور و م۲ منفی اور نہایت چھوٹا ہوتا ہے یعنی اس وقت مماس زاویہ ایک منفی، غیر متناہی مقدار کے برابر ہوتا ہے۔

نیز جب خط دائر و ب سے و اَ تک حرکت کرتا ہے تو م۲ع۲ مقدار میں ا سے صفر تک گھٹتا ہے اور و م۲ منفی ہوتا ہے اور صفر سے۔ ا تک گھٹتا ہے پس جب چکر لگانے والا خط و اَ پر منطبق ہوتا ہے تو مماس زاویہ صفر کے برابر ہوتا ہے۔

لہذا ثابت ہوا کہ ربع دوم میں مماس -∞ سے صفر تک بڑھتا ہے۔

تیسرے ربع میں م۳ع۳ اور و م۳ دونوں منفی ہوتے ہیں اس لئے ان کی نسبت مثبت ہوتی ہے، نیز جب خط دائر و بَ پر منطبق ہوتا ہے تو مماس غیر متناہی ہوتا ہے۔ اس لئے ثابت ہوا کہ ربع سوم میں مماس صفر سے ∞ تک بڑھتا ہے۔

چوتھے ربع میں م۴ع۴ منفی ہوتا ہے اور وم۴ مثبت اور ان کی نسبت منفی ہوتی ہے، نیز جب خط دائر مقام وبَ پر سے ہوکر گذرتا ہے تو مماس زاویہ کی قیمت $+\infty$ سے $-\infty$ تک بدلتی ہے (جیسا اوپر ہمنے مقام وب پر دیکھا) پس معلوم ہوا کہ ربع چہارم میں مماس $-\infty$ سے صفر تک بڑھتا ہے۔

۴۲- مماس التمام۔ جب خط دائر وا پر منطبق ہوتا ہے تو اُس وقت م۱ع۱ نہایت چھوٹا اور وم۱ تقریباً ا کے برابر ہوتا ہے پس مماس التمام (یعنی نسبت $\frac{وم_1}{م_1ع_1}$) ابتدا میں ہی غیر متناہی ہوتا ہے اور جب خط دائر وا سے وب تک گردش کرتا ہے تو م۱ع۱ مقدار میں صفر سے ا تک بڑھتا ہے اور وم کی قیمت ا سے صفر تک گھٹتی ہے، لہذا ربع اول میں مماس التمام ∞ سے صفر تک گھٹتا ہے

دوسرے ربع میں م۲ع۲ مثبت ہوتا ہے اور وم۲ منفی، پس معلوم ہوا کہ مماس التمام صفر سے $\frac{ا}{-}$ تک یعنی صفر سے $-\infty$ تک گھٹتا ہے۔

تیسرے ربع میں مماس التمام مثبت ہوتا ہے اور ∞ سے صفر تک گھٹتا ہے (کیونکہ جب خط دائر مقام وآ پر سے ہوکر گزرتا ہے تو مماس التمام کی قیمت $-\infty$ سے $+\infty$ تک بدلتی ہے)

ربع چہارم میں مماس التمام منفی ہوتا ہے اور صفر سے $-\infty$ تک گھٹتا ہے۔

۴۳- قاطع۔ جب خط دائر وا پر منطبق ہوتا ہے تو اس وقت

وم کی قیمت ا ہوتی ہے اس لئے قاطع زاویہ کی قیمت بھی ایک ہوتی ہے۔

جب خط دائر وا سے وب تک گردش کرتا ہے تو وم مقدار میں ا سے صفر تک گھٹتا ہے اور جب چکر لگانے والا خط وب پر منطبق ہوتا ہے تو قاطع زاویہ کی قیمت $\frac{1}{0}$ یعنی ∞ ہوتی ہے پس معلوم ہوا کہ ربع اول میں قاطع زاویہ ا سے ∞ تک بڑھتا ہے

ربع دوم میں وم منفی ہوتا ہے اور مقدار میں صفر سے -ا تک گھٹتا ہے اس لئے اس ربع میں قاطع زاویہ -∞ سے -ا تک بڑھتا ہے (کیونکہ جب خط دائر مقام وب پر سے ہو کر گزرتا ہے تو مقدار وم کی علامت بدل جاتی ہے اور اس لئے قاطع زاویہ کی قیمت میں تغیر +∞ سے -∞ تک ہوتا ہے)

ربع سوم میں وم ہمیشہ منفی ہوتا ہے اور -ا سے صفر تک بڑھتا ہے اس لئے قاطع -ا سے -∞ تک گھٹتا ہے۔

ربع چہارم میں وم ہمیشہ مثبت ہوتا ہے اور صفر سے ا تک بڑھتا ہے اس لئے اس ربع میں قاطع الزاویہ ∞ سے +ا تک گھٹتا ہے۔

۶۵ — قاطع التمام — اس کے تغیرات کی تحقیق بھی اسی طرح ہوسکتی ہے جیسے قاطع الزاویہ کے تغیرات کی ہوئی۔

ربع اول میں قاطع التمام ∞ سے +ا تک گھٹتا ہے

ربع دوم میں ” +ا سے +∞ تک بڑھتا ہے

ربع سوم میں ” -∞ سے -ا تک بڑھتا ہے

ربع چہارم میں یہ -۱ سے -∞ تک گھٹتا ہے

۶۶ - اوپر کے سب نتائج جدول ذیل میں جمع کئے گئے ہیں۔

ربع اول میں	ب	ربع دوم میں
جیب ۰ سے ۱ تک بڑھتی ہے		جیب ۱ سے ۰ تک گھٹتی ہے
جیب التمام ۱ سے ۰ تک گھٹتی ہے		جیب التمام ۰ سے -۱ تک گھٹتی ہے
مماس ۰ سے ∞ تک بڑھتا ہے		مماس -∞ سے ۰ تک بڑھتا ہے
مماس التمام ∞ سے ۰ تک گھٹتا ہے		مماس التمام ۰ سے -∞ تک گھٹتا ہے
قاطع ۱ سے ∞ تک بڑھتا ہے		قاطع -∞ سے -۱ تک بڑھتا ہے
قاطع التمام ∞ سے ۱ تک گھٹتا ہے		قاطع التمام ۱ سے ∞ تک گھٹتا ہے
ا	و	ا
ربع چہارم		ربع سوم
جیب -۱ سے ۰ تک بڑھتی ہے		جیب ۰ سے -۱ تک گھٹتی ہے
جیب التمام ۰ سے ۱ تک بڑھتی ہے		جیب التمام -۱ سے ۰ تک بڑھتی ہے
مماس -∞ سے ۰ تک بڑھتا ہے		مماس ۰ سے ∞ تک بڑھتا ہے
مماس التمام ۰ سے -∞ تک گھٹتا ہے		مماس التمام ∞ سے ۰ تک گھٹتا ہے
قاطع ∞ سے ۱ تک گھٹتا ہے		قاطع -۱ سے -∞ تک گھٹتا ہے
قاطع التمام -۱ سے -∞ تک گھٹتا ہے		قاطع التمام -∞ سے -۱ تک بڑھتا ہے

۶۷ - مثلثی جملوں کے ادوار

جب کوئی زاویہ صفر سے $2\pi^{ق}$ تک بڑھتا ہے یعنی جب خط دائر ایک پورا چکر لگاتا ہے تو زاویہ کی جیب پہلے صفر سے ا تک

بڑھتی ہے پھر ۱ سے ۱- تک گھٹتی ہے اور اخیر میں ۱- سے صفر تک بڑھتی ہے اور اس طرح سے پیشتر اس کے کہ جیب اپنی اصلی قیمت پھر اختیار کرے اس کے سب تغیرات ظہور میں آتے ہیں۔

اسی طرح سے جب زاویہ ۲π^ق سے ۴π^ق تک بڑھتا ہے تو جیب کی قیمت میں وہی تغیرات ظہور پذیر ہوتے ہیں۔

نیز جب دو زاویوں کا تفاوت ۴ قائموں کے برابر ہوتا ہے تو ان کی جیبیں باہم مساوی ہوتی ہیں، اس کو اس طرح بیان کرتے ہیں کہ **جیب کا دور ۲π ہے**

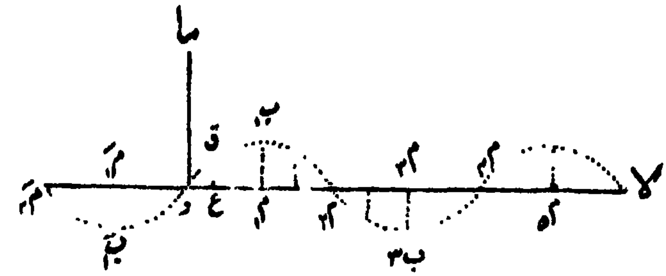
اسی طرح سے جب کوئی زاویہ بقدر ۲π کے بڑھتا ہے تو اس کی جیب، قاطع اور قاطع التمام کی قیمتوں کے سب تغیرات ایک دفعہ ضرور تکرار پاتے ہیں۔

لیکن مماس زاویہ کی صورت میں جب زاویہ صفر سے π^ق تک بڑھتا ہے یعنی جب خط دائر دو قائموں میں حرکت کرتا ہے تو اس کے سب تغیرات ایک مرتبہ وقوع میں آتے ہیں اور مماس التمام کی بھی یہی کیفیت ہے۔

پس معلوم ہوا کہ جیب، جیب التمام، قاطع اور قاطع التمام کا دور ۲π^ق ہے اور مماس اور مماس التمام کا صرف π^ق ہے جب کوئی زاویہ بڑھتا ہے تو اس کے مثلثی جملوں کی قیمتیں باربار تکرار پاتی ہیں اس لئے ان کو **جملات دوریہ** یا جملات مدورہ کہتے ہیں۔

۴۸ — مثلثی نسبتوں کے تغیرات بذریعۂ اشکال اور خطوط

منحنی اس طرح تعبیر ہو سکتے ہیں۔



جیب کی ترسیم

فرض کرو کہ **و لا** اور **وما** دو خطوط ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ قائمہ بناتے ہیں اور **زاویوں** کی مقداریں اُن **طولوں** سے تعبیر ہوتی ہیں جو زاویوں کے متناسب **و لا** پر ناپے جائیں۔
نیز فرض کرو کہ
نقاط م۱، م۲، م۳.......... خط **و لا** پر اس طرح واقع ہیں
کہ وم۱ = م۱م۲ = م۲م۳ = ...
اب اگر وم۱ سے **ایک** قائمہ تعبیر ہو تو وم۲، وم۳، وم۴..... سے دو، تین، چار، ..... قائمے تعبیر ہوں گے۔
نیز اگر ع کوئی نقطہ **و لا** پر ہو تو **و ع** سے ایک ایسا زاویہ تعبیر ہوگا جس کی نسبت ایک قائمہ سے وہی ہوگی جو **و ع** کی **وم۱** سے ہے۔
[مثلاً اگر و ع = $\frac{1}{3}$ وم۱ تو و ع ایک زاویہ قائمہ کے $\frac{1}{3}$ کو تعبیر کریگا اور اگر ع نقطہ تنصیف م۳م۴ کا ہو تو و ع سے $3\frac{1}{2}$ قائمے تعبیر ہوں گے]

وم، کو اس طرح منتخب کرو کہ طول کی ایک اکائی ایک زاویہ نیمقطری کو تعبیر کرے، اب چونکہ وم۲ سے دو قائمے یعنی π نیمقطری زاوئے تعبیر ہوتے ہیں اس لئے طول وم۲ سے طول کی π اکائیاں یعنی تقریباً ۳ ۱/۷ اکائیاں تعبیر ہوں گی۔

اسی طریقے سے منفی زاوئے و کی منفی جانب میں طولوں وم′، وم′۲… سے تعبیر ہوں گے۔

ہر ایک نقطہ (ع) پر کا عمود ع ق اُس زاوئے کی جیب کے متناسب بناؤ جو وع سے تعبیر ہوتا ہے اگر جیب مثبت ہو تو یہ عمود مثبت سمت میں وما کے متوازی ہوگا اور اگر جیب منفی ہو تو یہ منفی سمت میں ہوگا۔

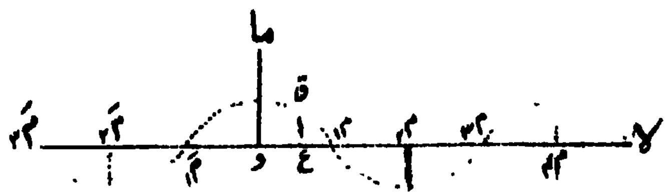
(مثلاً چونکہ وم، ایک قائمہ کو تعبیر کرتا ہے جس کی جیب ۱ ہے اسلئے ہم عمود م۱ب۱ کو طول کی ایک اکائی کے برابر لیں گے، چونکہ وم۲ سے دو قائمے تعبیر ہوتے ہیں اور ان کی جیب صفر ہے اس لئے اس نقطہ پر عمود کا طول صفر ہوگا، چونکہ وم۳ تین قائموں کی مقدار کے متناسب ہے اور ان کی جیب -۱ ہے اس لئے م۳ پر کے عمود کا طول -۱ ہوگا یعنی م۳ب۳ خط ولا کے نیچے کی طرف کھینچا جائے گا اور اس کا طول ایک ہوگا، اگر وع، وم۱ کی ایک تہائی کے برابر ہو تو یہ ۱/۳ قائمہ یعنی ۳۰° کو تعبیر کرے گا اور اس کی جیب ۱/۲ ہوگی پس اِس صورت میں ہم نقطہ ع پر ایک عمود ع ق قائم کریں گے جس کا طول پیمانۂ واحد کے طول کا نصف ہوگا)

ان سب خطوط کے سرے ایک خط منحنی پر واقع ہوں گے

جس کی شکل مندرجۂ بالا منحنی کی سی ہوگی۔

پوری شکل کھینچنے سے معلوم ہوگا کہ خط منحنی کے وب۱م۲ب۲م۴ جیسے اور کئی حصے ہیں اور اس کا یہ مطلب ہے کہ جب کوئی زاویہ بقدر ۲ π کے بڑھتا ہے تو اس کی جیب کی وہی قیمتیں تکرار پاتی ہیں۔

۶۹ــ جیب التمام کی ترسیم



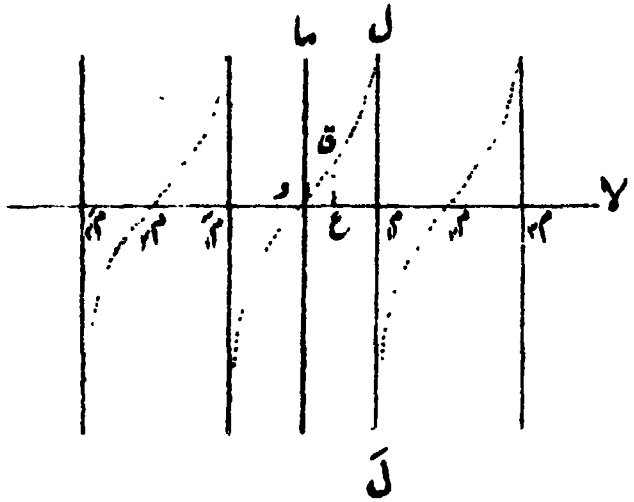
جیب التمام کی ترسیم بھی اُسی طرح سے حاصل ہوتی ہے جیسی جیب کی، صرف فرق یہ ہے کہ جیب التمام کی صورت میں عمود ع ق سے اُس زاویہ کی جیب التمام تعبیر ہوتی ہے جو طول وع سے تعبیر ہوتا ہے۔

اگر شکل دفعہ ۶۸ میں نقطہ و حرکت کرکے م۱ پر آجائے اور وما کا مقام م۱ب۱ سے بدل دیا جائے تو جیب التمام کا خط منحنی جیب کے بالکل متماثل ہوگا۔

۷۰ــ مماس کی ترسیم

چونکہ زاویہ قائمہ کا مماس غیر متناہی ہوتا ہے اور طول وم۱ ایک قائمہ کو تعبیر کرتا ہے اس لئے جو عمود نقطہ م۱ پر قائم ہوگا

اس کا طول غیر متناہی ہوگا اور مماس کا منحنی م ل کو غیر متناہی فاصلے پر ملے گا۔



اگر زاویہ ایک قائمے سے ذرا زیادہ ہو تو اس کا مماس منفی اور غیر متناہی ہوگا اسلئے خط ل م ل کے عین دائیں طرف، مماس کا منحنی ایک ایسے مقام سے شروع ہوگا جو ولا کے نیچے بے انتہا فاصلے پر واقع ہو۔

مماس کی ترسیم میں صریحاً بیشمار متماثل اور متوازی حصے شامل ہیں اور ان میں سے ہر ایک حصہ باقی سب سے الگ ہے۔ اس قسم کے خط منحنی کو غیر مسلسل کہتے ہیں، برخلاف اس کے جیب اور جیب التمام ہر دو کے منحنی مسلسل ہیں۔

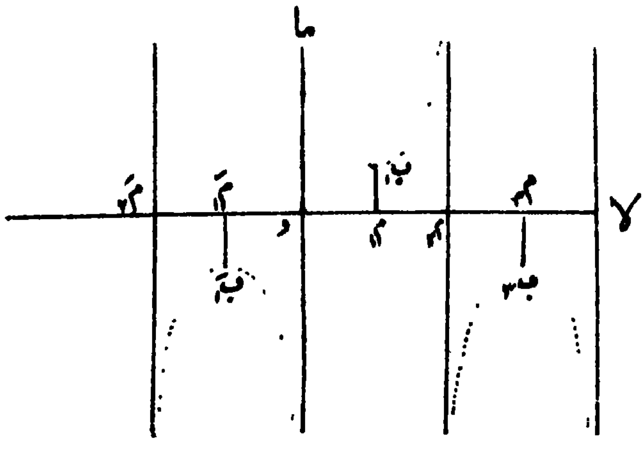
۱۷ — مماس التمام کی ترسیم

اگر مماس التمام کا خط منحنی کھینچا جائے تو وہ وما کو و کے

اوپر غیر متناہی فاصلے پر ملے گا، یہ خط نقطہ م۱ میں سے گذرے گا اور نقطہ م۲ پر جو عمود ہوگا اس کو ولا کی منفی جانب میں غیر متناہی فاصلے پر مس کرے گا، اس کے بعد م کے عین دائیں طرف یہ خط نقطہ م۲ کے اوپر ایک غیر متناہی فاصلے سے شروع ہوگا اور پہلے حصے کی طرح م۳ میں سے گذرے گا اور م۴ پر کے عمود کو ولا کے نیچے غیر متناہی فاصلے پر مس کرے گا وغیرہ وغیرہ۔

مماس التمام کا منحنی غیر متسلسل ہوگا اور اس کے بے شمار حصے ایک دوسرے کے ساتھ ساتھ ترتیب دئے ہوئے ہوں گے۔

۲۷ — قاطع التمام کی ترسیم



جب زاویہ صفر ہوتا ہے تو اس کی جیب صفر ہوتی ہے اور اس لئے اس کا قاطع التمام غیر متناہی ہوتا ہے لہذا منحنی وما کو غیر متناہی فاصلے پر ملتا ہے۔

جب زاویہ ایک قائمہ کے برابر ہوتا ہے تو اس کا قاطع التمام ایک ہوتا ہے اور اس لئے عمود م ب₁ کا طول ایک ہوتا ہے۔

جب زاویہ دو قائموں کے برابر ہوتا ہے تو اس کا قاطع التمام غیر تناہی ہوتا ہے یعنی م م₁ پر جو عمود ہو اس کو خط منحنی غیر تناہی فاصلے پر ملتا ہے۔

نیز جب زاویہ دو قائموں سے ذرا کم ہوتا ہے تو اس کا قاطع التمام + ∞ ہوتا ہے اور جب زاویہ دو قائموں سے ذرا زیادہ ہوتا ہے تو اس وقت قاطع التمام -∞ ہوتا ہے یعنی جب زاویہ کی قیمت "دو قائمہ" میں سے ہوکر گذرتی ہے تو دفعۃً قاطع الزاویہ کی قیمت + ∞ سے - ∞ ہو جاتی ہے پس معلوم ہوا کہ م م₁ کے عین دائیں طرف خط منحنی و لا کے نیچے غیر تناہی فاصلے سے شروع ہوتا ہے

۳۷۔ قاطع الزاویہ کی ترسیم

اگر قاطع الزاویہ کا منحنی اسی طرح مرتسم کیا جائے تو اس کی شکل بالکل وہی ہوگی جو قاطع التمام کے منحنی کی ہے صرف و م ا کو حرکت دیکر م ب₁ پر لے آنا چاہیئے۔

امثلہ متفرقہ نمبری (۹)

۱۔ کسی مثلث کے ایک زاویئے میں فرانسیسی درجوں کی تعداد اتنی ہے جتنی کہ دوسرے زاویئے میں انگریزی درجوں کی تعداد ہے، اور تیسرے زاویئے میں اتنے فرانسیسی ثانئے ہیں جتنے کہ باقی دو کے مجموعہ میں انگریزی

ثانئے ہیں تو ہر ایک زاویے میں نیمقطری زاویوں کی تعداد دریافت کرو۔

۲۔ کسی دائرے کی ۲ فٹ قوس کے محاذی جو مرکزی زاویہ بنتا ہے اس میں انگریزی درجوں، دقیقوں اور ثانیوں کی تعداد دریافت کرو، دائرہ کا نصف قطر ۵ فٹ ہے۔

۳۔ ثابت کرو کہ نیمقطری زاویوں کو ثانیوں میں تبدیل کرنے کے لئے ۲۰۶۲۶۵ سے ضرب دینی چاہئے اور ثانیوں کو نیمقطری زاویوں میں منتقل کرنے کے لئے مضروب فیہ ۴۸ ۰۰۰۰۰ء ہونا چاہئے۔

۴۔ اگر جب طہ $= \frac{لا^2 - ما^2}{لا^2 + ما^2}$ تو جم طہ اور مم طہ کی قیمتیں دریافت کرو۔

۵۔ اگر جب طہ $= \frac{م^2 + ۲ م ن}{م^2 + ۲ م ن + ۲ ن^2}$ تو ثابت کرو کہ

$$س طہ = \frac{م^2 + ۲ م ن}{۲ م ن + ۲ ن^2}$$

۶۔ اگر جم طہ ـ جب طہ $= \sqrt{۲}$ جب طہ تو ثابت کرو کہ

$$جم طہ + جب طہ = \sqrt{۲} \ جم طہ$$

۷۔ ثابت کرو کہ قم^4 عہ ـ مم^4 عہ = ۳ قم^2 عہ مم^2 عہ + ۱

۸۔ ۲ قط^2 ا ـ قط^4 ا ـ ۲ قم^2 ا + قم^4 ا کو س ا کی رقوم میں بیان کرو۔

۹۔ مساوات ۳ قم^2 طہ = ۲ قط طہ کو حل کرو۔

۱۰۔ ایک شخص کسی ٹیلے پر کھڑا ہو کر ایک کشتی کا زاویہ انخفاض ۳۰° مشاہدہ کرتا ہے، کشتی کنارے کے اس مقام کی طرف آرہی ہے جو عین

اُس شخص کے پاؤں کے نیچے ہے، تین منٹ کے بعد کشتی کا زاویہ انخفاض ۶۰° ہوجاتا ہے، معلوم کرو کہ کتنی دیر میں کشتی کنارے پر آ لگے گی ۔

۱۱ ــ ثابت کرو کہ اگر لا حقیقی ہو تو مساوات $\text{جب ط} = \text{لا} + \frac{1}{\text{لا}}$ ناممکن ہے ۔

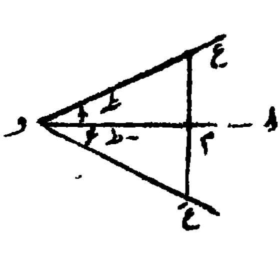
۱۲ ــ ثابت کرو کہ مساوات $\text{قط}^2\,\text{ط} = \frac{4\,\text{لا}\,\text{ما}}{(\text{لا} + \text{ما})^2}$ صرف اُسی صورت میں ممکن ہے جبکہ $\text{لا} = \text{ما}$

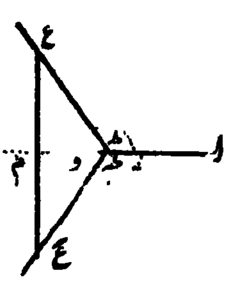
باب پنجم

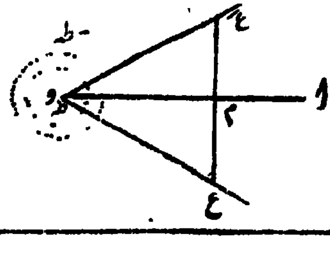
کسی مقدار اور علامت کے زاویوں کی مثلثی نسبتیں

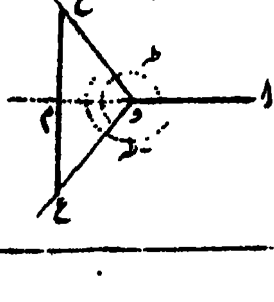
(پہلی مرتبہ اس مضمون کا مطالعہ کرتے وقت طالب علم کو چاہیے کہ دفعات ۴۷، ۷۵، ۷۶، ۷۷ اور ۸۰ کی چار چار شکلوں میں سے صرف پہلی شکلوں پر ہی توجہ محدود رکھے)

۴۷ — ایک زاویہ (– ط) کی مثلثی نسبتیں ط کی تمام قیمتوں کے لئے ط کی رقوم میں دریافت کرو۔









فرض کرو کہ خط دائر مقام و ا سے شروع ہوکر چکر لگاتا ہوا مقام و ع پر پہنچتا ہے اور اس طرح سے زاویہ ط مرتسم کرتا ہے۔

و ا یا و ا ممدودہ پر عمود ع م نکالو اور اس کو عَ تک اتنا خارج کرو کہ ع م اور م عَ باہم برابر ہوں۔

مثلث م و ع اور م و عَ میں اضلاع و م اور م ع، اضلاع و م اور م عَ کے بالترتیب برابر ہیں اور ان کے درمیانی زاویے و م ع اور و م عَ قائمے ہیں اس لئے (بحکم اقلیدس م ا ش ۴) زاویے م و ع اور م و عَ برابر ہیں اور و ع، و عَ کے مساوی ہے۔
ان چاروں شکلوں میں زاویہ ا و ع کی مقدار (اگر زاویے کو گھڑی کی سوئیوں کی مقابل سمت میں ناپا جائے) زاویہ ا و عَ کی مقدار کے برابر ہے (اگر اس زاویے کو گھڑی کی سوئیوں کی موافق سمت میں ناپا جائے) نیز م ع اور م عَ مقدار میں مساوی اور علامت میں مختلف ہیں اسلئے

$$\text{جب}(-\text{ط}) = \frac{\text{م عَ}}{\text{و عَ}} = \frac{-\text{م ع}}{\text{و ع}} = -\text{جب ط}$$

$$\text{جم}(-\text{ط}) = \frac{\text{و م}}{\text{و عَ}} = \frac{\text{و م}}{\text{و ع}} = \text{جم ط}$$

$$\text{مس}(-\text{ط}) = \frac{\text{م عَ}}{\text{و م}} = \frac{-\text{م ع}}{\text{و م}} = -\text{مس ط}$$

$$\text{مم}(-\text{ط}) = \frac{\text{و م}}{\text{م عَ}} = \frac{\text{و م}}{-\text{م ع}} = -\text{مم ط}$$

$$\text{قم}(-\text{ط}) = \frac{\text{و عَ}}{\text{م عَ}} = \frac{\text{و ع}}{-\text{م ع}} = -\text{قم ط}$$

$$\text{قط}(-\text{ط}) = \frac{\text{و عَ}}{\text{و م}} = \frac{\text{و ع}}{\text{و م}} = \text{قط ط}$$

[اس دفعہ میں اور آگے کی دفعات میں شکل کا حوالہ دینے کے بغیر پہلی دو مثلثی نسبتوں کی مدد سے آخری چار مثلثی نسبتیں حاصل ہوسکتی ہیں۔

مثلاً

$$\text{مس}(-\text{ط}) = \frac{\text{جب}(-\text{ط})}{\text{جم}(-\text{ط})} = \frac{-\text{جب ط}}{\text{جم ط}} = -\text{مس ط}$$

$$\text{مم}(-\text{ط}) = \frac{\text{جم}(-\text{ط})}{\text{جب}(-\text{ط})} = \frac{\text{جم ط}}{-\text{جب ط}} = -\text{مم ط}$$

$$\text{قم}(-\text{ط}) = \frac{1}{\text{جب}(-\text{ط})} = \frac{1}{-\text{جب ط}} = -\text{قم ط}$$

اور

$$\text{قط}(-\text{ط}) = \frac{1}{\text{جم}(-\text{ط})} = \frac{1}{\text{جم ط}} = \text{قط ط}]$$

مثال

$$\text{جب}(-30^\circ) = -\text{جب}\ 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\text{مس}(-60^\circ) = -\text{مس}\ 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\text{جم}(-45^\circ) = \text{جم}\ 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

۷۵۔ ط کی تمام قیمتوں کے لئے زاویہ (۹۰ - ط) کی مثلثی نسبتوں کو ط کی رقوم میں دریافت کرو۔

دفعہ ۴۴ میں جہاں زاویہ، قائمہ سے کم تھا ان ارتباطات پر ایک دفعہ بحث ہوچکی ہے۔ فرض کرو کہ خط دائر مقام و ا سے شروع ہوکر زاویہ ا و ع مرتسم کرتا ہے جہاں ا و ع = ط

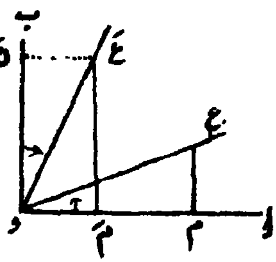
زاویہ ۹۰ - ط حاصل کرنے کے لئے فرض کرو کہ خط دائر ابتدا میں ب تک حرکت کرتا ہے اور اس کے بعد ب سے سمت مخالف میں بقدر زاویہ ط کے اُلٹا پھرتا ہے اور اُس وقت

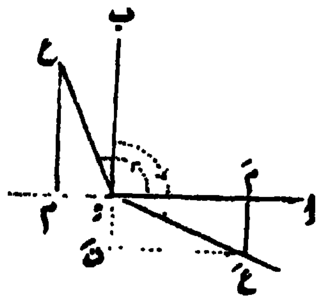
اس کا مقام و عَ ہوتا ہے ۔

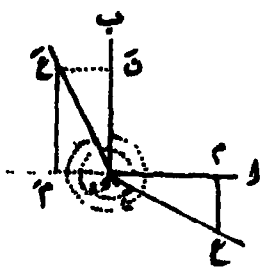
ا و عَ زاویہ مطلوبہ ۹۰ ۔ ط ہے ۔

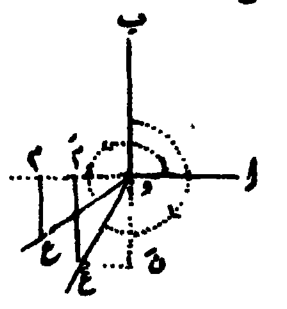
و عَ کو و ع کے مساوی بناؤ اور عمود ع مَ اور ع م خط ابتدائی و ا یا ا و ممدودہ پر نکالو نیز و ب یا ب و ممدودہ پر عمود عَ نَ کھینچو ۔

ہر ایک شکل میں از روئے عمل زاویے ا و ع اور ب و عَ تعداداً برابر ہیں ۔









زاویہ م و ع = ∠ نَ و عَ = ∠ و عَ مَ

چونکہ ہر ایک شکل میں و نَ اور مَ عَ متوازی ہیں

لہذا مثلث م و ع اور مَ عَ و ہر طرح سے مساوی ہیں

اور اس لئے　و م = مَ عَ تعداداً

اور　و مَ = م ع تعداداً

نیز ہر ایک شکل میں وم اور مَ عَ متحد العلامت ہیں اور نیز م ع اور وَمَ کی علامت ایک ہی ہے۔

یعنی وم = + مَ عَ اور وَمَ = + م ع

$$\text{اسلئے جب}\,(۹۰ - ط) = \text{جب ا و عَ} = \frac{\text{مَ عَ}}{\text{و عَ}} = \frac{\text{وم}}{\text{و ع}} = \text{جم ط}$$

$$\text{جم}\,(۹۰ - ط) = \text{جم ا و عَ} = \frac{\text{وَمَ}}{\text{و عَ}} = \frac{\text{م ع}}{\text{و ع}} = \text{جب ط}$$

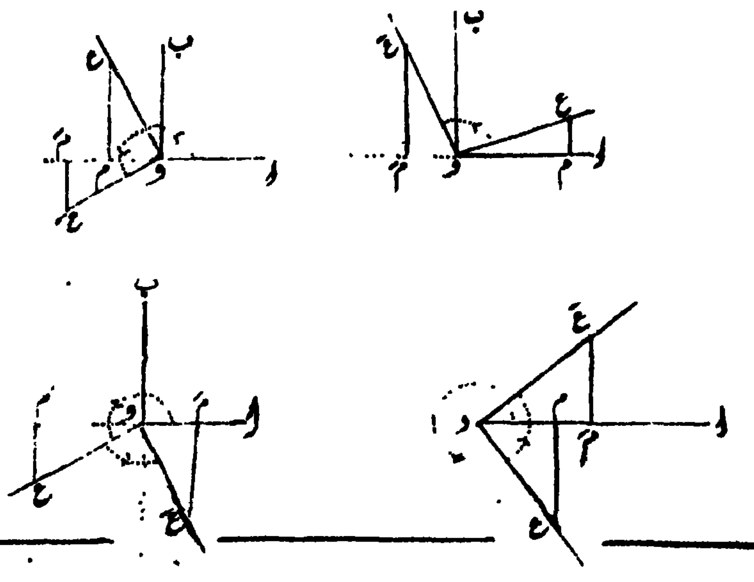
$$\text{مس}\,(۹۰ - ط) = \text{مس ا و عَ} = \frac{\text{مَ عَ}}{\text{وَمَ}} = \frac{\text{وم}}{\text{م ع}} = \text{مم ط}$$

$$\text{مم}\,(۹۰ - ط) = \text{مم ا و عَ} = \frac{\text{وَمَ}}{\text{مَ عَ}} = \frac{\text{م ع}}{\text{وم}} = \text{مس ط}$$

$$\text{قط}\,(۹۰ - ط) = \text{قط ا و عَ} = \frac{\text{و عَ}}{\text{وَمَ}} = \frac{\text{و ع}}{\text{م ع}} = \text{قم ط}$$

$$\text{قم}\,(۹۰ - ط) = \text{قم ا و عَ} = \frac{\text{و عَ}}{\text{مَ عَ}} = \frac{\text{و ع}}{\text{وم}} = \text{قط ط}$$

۷۶ — زاویہ (۹۰ + ط) کی شلثی نسبتوں کو ط کی تمام قیمتوں کے لئے ط کی رقوم میں دریافت کرو۔



فرض کرو کہ خط دائر و ا سے شروع ہوکر زاویہ ط مرتسم کرتا ہے اور اُس وقت اُس کا مقام و ع ہوتا ہے یعنی زاویہ ا و ع = ط

فرض کرو کہ اس کے بعد خط دائر و ع سے مقام و عَ تک ایک زاویہ قائمہ میں حرکت کرتا ہے یعنی فرض کرو کہ زاویہ
ا و عَ = (۹۰° + ط)

و عَ کو و ع کے مساوی قطع کرو اور ع م اور عَ مَ عمود ا و یا ا و ممدودہ پر نکالو، ہر ایک شکل میں چونکہ ع و عَ قائمہ ہے اس لئے زاویوں م و ع اور عَ و مَ کا مجموعہ ایک قائمہ کے برابر ہے۔

اس لئے زاویہ م و ع = ۹۰° - ∠ عَ و مَ = ∠ و عَ مَ

لہٰذا مثلث م و ع اور مَ عَ و ہر طرح سے باہم مساوی ہیں۔

اس لئے و م اور مَ عَ تعداداً مساوی ہیں، اسی طرح سے م ع اور و مَ تعداداً مساوی ہیں

ہر ایک شکل میں و م اور مَ عَ متحد العلامت ہیں لیکن م ع اور و مَ کی علامتیں مختلف ہیں یعنی

مَ عَ = + و م اور و مَ = - م ع

اس لئے

جب (۹۰° + ط) = جب ا و عَ = مَ عَ / و عَ = و م / و ع = جم ط

جم (۹۰° + ط) = جم ا و عَ = و مَ / و عَ = - م ع / و ع = - جب ط

مس (۹۰° + ط) = مس ا و عَ = مَ عَ / و مَ = و م / - م ع = - مم ط

مم (۹۰° + طہ) = مم ا و عَ = $\frac{\text{وَمَ}}{\text{مَعَ}}$ = $\frac{\text{-مع}}{\text{وم}}$ = - مس طہ

قط (۹۰° + طہ) = قط ا و عَ = $\frac{\text{وعَ}}{\text{ومَ}}$ = $\frac{\text{وع}}{\text{-مع}}$ = - قم طہ

اور قم (۹۰° + طہ) = قم ا و عَ = $\frac{\text{وعَ}}{\text{مَعَ}}$ = $\frac{\text{وع}}{\text{وم}}$ = قط طہ

امثلہ جب ۱۵۰° = جب (۹۰° + ۶۰°) = جم ۶۰° = $\frac{1}{2}$

جم ۱۳۵° = جم (۹۰° + ۴۵°) = -جب ۴۵° = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

مس ۱۲۰° = مس (۹۰° + ۳۰°) = - مم ۳۰° = $-\sqrt{3}$

۷۷ — زاویاتِ مکمّلہ

جب دو زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کے برابر ہو تو ان میں سے ہر ایک کو دوسرے کا مکمّل یا **تکملہ** کہتے ہیں مثلاً کسی زاویہ طہ کا تکملہ ۱۸۰° - طہ ہے۔

امثلہ ۳۰° کا تکملہ = ۱۸۰° - ۳۰° = ۱۵۰°

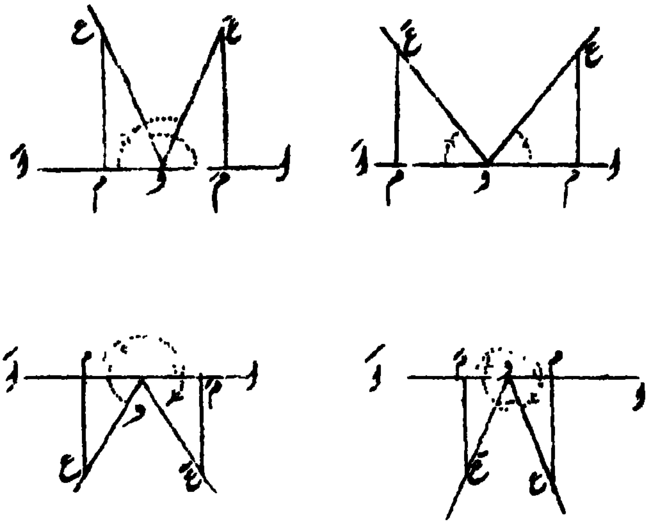
۱۲۰° کا تکملہ = ۱۸۰° - ۱۲۰° = ۶۰°

۲۷۵° کا تکملہ = ۱۸۰° - ۲۷۵° = -۹۵°

-۱۲۶° کا تکملہ = ۱۸۰° - (-۱۲۶°) = ۳۰۶°

-۳۱۰° کا تکملہ = ۱۸۰° - (-۳۱۰°) = ۴۹۰°

۷۸ — زاویہ (۱۸۰° - طہ) کی مثلثی نسبتیں طہ کی تمام قیمتوں کے لئے طہ کی رقوم میں دریافت کرو۔



فرض کرو کہ خط دائر مقام و ا سے شروع ہو کر زاویہ ا و ع (= ط)
مرتسم کرتا ہے۔
زاویہ ۱۸۰° - ط حاصل کرنے کے لئے فرض کرو کہ خط دائر و ا سے
شروع ہو کر دو قائمے مرتسم کرتا ہے اور مقام و اَ پر پہنچتا ہے اسکے بعد
سمت مخالف میں بقدر زاویہ ط کے حرکت کر کے مقام و عَ پر
آتا ہے اور اس طرح سے ایک ایسا زاویہ اَ و عَ مرتسم کرتا ہے
جو مقدار میں زاویہ ا و ع کے مساوی لیکن علامت میں اس سے
مختلف ہوتا ہے۔
ظاہر ہے کہ زاویہ ا و عَ = ۱۸۰° - ط
و عَ کو و ع کے برابر قطع کرو اور ا و اَ پر عَ مَ اور ع م عمود نکالو
زاویے م و ع اور مَ و عَ برابر ہیں اور اس لئے مثلث م و ع
اور مَ و عَ ہر طرح سے مساوی ہیں لہذا و م اور و مَ مقدار میں

برابر ہیں اور نیز م ع اور مَ عَ بھی باہم مساوی ہیں ۔
پھر ایک شکل میں و م اور و مَ مختلف سمتوں میں کھینچے گئے ہیں
لیکن م ع اور مَ عَ ایک ہی سمت میں کھینچے گئے ہیں ۔ یعنی
و مَ = − و م اور مَ عَ = + م ع
اس لئے

$$\text{جب}\ (\text{۱۸۰}^\circ - \text{ط}) = \text{جب ا و عَ} = \frac{\text{مَ عَ}}{\text{و عَ}} = \frac{\text{م ع}}{\text{و ع}} = \text{جب ط}$$

$$\text{جم}\ (\text{۱۸۰}^\circ - \text{ط}) = \text{جم ا و عَ} = \frac{\text{و مَ}}{\text{و عَ}} = \frac{-\text{و م}}{\text{و ع}} = -\ \text{جم ط}$$

$$\text{مس}\ (\text{۱۸۰}^\circ - \text{ط}) = \text{مس ا و عَ} = \frac{\text{مَ عَ}}{\text{و مَ}} = \frac{\text{م ع}}{-\text{و م}} = -\ \text{مس ط}$$

$$\text{مم}\ (\text{۱۸۰}^\circ - \text{ط}) = \text{مم ا و عَ} = \frac{\text{و مَ}}{\text{مَ عَ}} = \frac{-\text{و م}}{\text{م ع}} = -\ \text{مم ط}$$

$$\text{قط}\ (\text{۱۸۰}^\circ - \text{ط}) = \text{قط ا و عَ} = \frac{\text{و عَ}}{\text{و مَ}} = \frac{\text{و ع}}{-\text{و م}} = -\ \text{قط ط}$$

$$\text{قم}\ (\text{۱۸۰}^\circ - \text{ط}) = \text{قم ا و عَ} = \frac{\text{و عَ}}{\text{مَ عَ}} = \frac{\text{و ع}}{\text{م ع}} = \text{قم ط}$$

امثلہ $\text{جب ۱۲۰}^\circ = \text{جب}\ (\text{۱۸۰}^\circ - \text{۶۰}^\circ) = \text{جب ۶۰}^\circ = \frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۲}}$

$\text{جم ۱۳۵}^\circ = \text{جم}\ (\text{۱۸۰}^\circ - \text{۴۵}^\circ) = -\ \text{جم ۴۵}^\circ = -\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲}}}$

$\text{مس ۱۵۰}^\circ = \text{مس}\ (\text{۱۸۰}^\circ - \text{۳۰}^\circ) = -\ \text{مس ۳۰}^\circ = -\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۳}}}$

۷۹ ـ ط کی تمام قیمتوں کے لئے زاویہ (۱۸۰° + ط) کی مثلثی نسبتیں ط کی رقوم میں دریافت کرو ۔

ارتباطات مطلوبہ دفعہ گذشتہ کے موافق بذریعہ اشکال ہندسیہ

حاصل ہو سکتے ہیں، اس مسئلہ کی اشکال کھینچنے میں وقت ہوگی طالبعلم کے لئے وہ برائے مشق چھوڑ دی گئی ہیں ۔

نیز تعلقات مذکورہ کا استنباط نتائج دفعہ ۷۶ سے بھی ہو سکتا ہے جو زاویہ کی کسی مقدار کے لئے صحیح ثابت کئے گئے ہیں مثلاً فرض کرو

کہ ۹۰° + ط = ب

اس لئے جب (۱۸۰° + ط) = جب (۹۰° + ب) = جم ب (دفعہ ۷۶)

= جم (۹۰° + ط) = − جب ط (دفعہ ۷۶)

اور جم (۱۸۰° + ط) = جم (۹۰° + ب) = − جب ب (دفعہ ۷۶)

= − جب (۹۰° + ط) = − جم ط (دفعہ ۷۶)

نیز مس (۱۸۰° + ط) = مس (۹۰° + ب) = − مم ب

= − مم (۹۰° + ط) = مس ط

اور اسی طرح سے مم (۱۸۰° + ط) = مم ط

قط (۱۸۰° + ط) = − قط ط

قم (۱۸۰° + ط) = − قم ط

۸۰ — ط کی تمام قیمتوں کے لئے زاویہ (۳۶۰° + ط) کی مثلثی نسبتیں ط کی رقوم میں دریافت کرو ۔

فرض کرو کہ خط دائر کوئی زاویہ ط مرتسم کرنے کے بعد کسی خاص مقام پر واقع ہے۔ اب اگر یہ مثبت سمت میں ایک پورا چکر لگائے یعنی زاویہ ۳۶۰° + ط مرتسم کرے تو اس کے مقام میں کوئی فرق نہیں آئے گا، خط دائر بعینہٖ اسی مقام پر ہوگا جہاں پہلے تھا ۔

معلوم ہوا کہ زاویہ ۳۶۰° + ط کی مثلثی نسبتیں وہی ہوتی ہیں جو

زاویہ ط کی ہیں ۔

اور اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ کسی زاویہ پر ۳۶۰° یا ۳۶۰° کا کوئی ضعف زیادہ کرنے یا مقدار زاویہ سے ۳۶۰° یا اس کا کوئی ضعف کم کرنے سے اس کی شلثی نسبتوں میں کچھ فرق نہیں آتا ۔

۸۱ — اس باب کے مسائل سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ بڑے سے بڑے زاویے کی شلثی نسبتوں کی تحویل ایک ایسے زاوئے کی شلثی نسبتوں میں ہوسکتی ہے جو ۰ اور ۴۵° کے درمیان واقع ہو ۔

مثلاً جب ۱۷۶۵° = جب (۴ × ۳۶۰° + ۳۲۵°) = جب ۳۲۵° (دفعہ ۸۰)

= جب (۱۸۰° + ۱۴۵°) = − جب ۱۴۵° (دفعہ ۷۹)

= − جب (۱۸۰° − ۳۵°) = − جب ۳۵° (دفعہ ۷۸)

مس ۱۱۹۰° = مس (۳ × ۳۶۰° + ۱۱۰°) = مس ۱۱۰° (دفعہ ۸۰)

= مس (۹۰° + ۲۰°) = − مم ۲۰° (دفعہ ۷۶)

اور قم (− ۱۴۶۵°) = − قم ۱۴۶۵° (دفعہ ۷۴)

= − قم (۴ × ۳۶۰° + ۲۵°) = − قم ۲۵° (دفعہ ۸۰)

اسی طرح سے اور زاویوں کی تحویل ہوسکتی ہے، سب سے اول زاویہ مجوزہ سے ۳۶۰° کے اضعاف تفریق کرتے جاؤ جبتک کہ زاویہ ۰ اور ۳۶۰° کے درمیان نہ آجائے، اب اگر یہ ۱۸۰° سے بڑا ہو تو اس میں سے ۱۸۰° منفی کرو، اس کے بعد اگر یہ ۹۰° سے بڑا ہو تو ضوابط دفعہ ۷۶ کو استعمال کرو اور آخر الامر اگر ضرورت ہو تو ضابطہ دفعہ ۷۵ کی مدد لو ۔

۸۲ — قائمہ سے بڑے چند مشہور زاویوں کی صورت میں جدول دفعہ ۶۴ کی توسیع اس طرح ہوسکتی ہے ۔

زاویہ	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°	۱۸۰°
جیب	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{\sqrt{۲}}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{۱}{\sqrt{۲}}$	$\frac{۱}{۲}$	۰
جیب التمام	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{۱}{\sqrt{۲}}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{\sqrt{۲}}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	−۱
ظل	۰	$\frac{۱}{\sqrt{۳}}$	۱	$\sqrt{۳}$	∞	$-\sqrt{۳}$	−۱	$-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$	۰
ظل التمام	∞	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{۱}{\sqrt{۳}}$	۰	$-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$	−۱	$-\sqrt{۳}$	∞
قاطع التمام	∞	۲	$\sqrt{۲}$	$\frac{۲}{\sqrt{۳}}$	۱	$\frac{۲}{\sqrt{۳}}$	$\sqrt{۲}$	۲	∞
قاطع	۱	$\frac{۲}{\sqrt{۳}}$	$\sqrt{۲}$	۲	∞	−۲	$-\sqrt{۲}$	$-\frac{۲}{\sqrt{۳}}$	−۱

اسئلہ نمبری (۱۰)

ثابت کرو کہ

۱- جب ۴۲۰° جم ۳۹۰° + جم (−۳۰۰°) جب (−۳۳۰°) = ۱

۲- جم ۵۷۰° جب ۵۱۰° − جب ۳۳۰° جم ۳۹۰° = ۰

۳- مس ۲۲۵° مم ۴۰۵° + مس ۷۶۵° مم ۶۷۵° = ۰

اگر ا کی قیمتیں مفصلہ ذیل ہوں تو جم ا − جب ا اور مس ا + مم ا کی قیمتیں دریافت کرو۔

۴- $\frac{\pi}{3}$　　۵- $\frac{2\pi}{3}$　　۶- $\frac{5\pi}{4}$

۷- $\frac{7\pi}{4}$　　۸- $\frac{11\pi}{3}$

ا کی قیمتیں دریافت کرو جو ۰° اور ۳۶۰° کے درمیان ہوں جبکہ

۹- جب ا = $\frac{1}{\sqrt{2}}$　　۱۰- جم ا = $-\frac{1}{2}$

۱۱- مس ا = −۱　　۱۲- مم ا = $-\sqrt{3}$

۱۳- قط ا = $-\frac{2}{\sqrt{3}}$　　۱۴- قم ا = −۲

مقادیر ذیل کو ایک ایسے مثبت زاویہ کی مثلثی نسبتوں کی رقوم میں بیان کرو جو ۴۵° سے کم ہو۔

۱۵- جب (−۶۵°)　　۱۶- جم (−۸۴°)

۱۷- مس ۲۳۷°　　۱۸- جب ۱۶۶°

۱۹- جم ۲۸۷°　　۲۰- مس (−۲۴۶°)

۲۱ — جب ۳۴۳°　　　　۲۲ — جم (−۹۲۸°)

۲۳ — سس ۱۱۴۵°　　　　۲۴ — جم ۱۴۱۰°

۲۵ — مم(−۱۰۵۴°)　　　　۲۶ — قط ۱۳۲۷°

۲۷ — تم(−۷۵۶°)

ا کی مفصلہ ذیل قیمتوں کے لئے جب ا + جم ا کی علامات دریافت کرو

۲۸ — ۱۴۰°　　۲۹ — ۲۷۸°　　۳۰ — −۳۵۶°　　۳۱ — −۱۱۲۵°

ا کی مفصلہ ذیل قیمتوں کے لئے جب ا − جم ا کی علامات دریافت کرو۔

۳۲ — ۲۱۵°　　۳۳ — ۸۲۵°　　۳۴ — −۶۳۴°　　۳۵ — +۴۵۷°

۳۶ — اُن سب زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام دریافت کرو جو پہلے چار ربعوں میں واقع ہوں اور جن کے مماس، جم ۱۳۵° کے برابر ہوں۔

ثابت کرو کہ

۳۷ — جب (۲۷۰° + ا) = −جم ا اور سس (۲۷۰° + ا) = −مم ا

۳۸ — جم (۲۷۰° − ا) = −جب ا اور مم (۲۷۰° − ا) = سس ا

۳۹ — جم ا + جب (۲۷۰° + ا) − جب (۲۷۰° − ا) + جم (۱۸۰° + ا) = ۰

۴۰ — قط (۲۷۰° − ا) قط (۹۰° − ا) − سس (۲۷۰° − ا) سس (۹۰° + ا) + ۱ = ۰

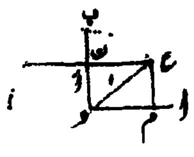
۴۱ — مم ا + سس (۱۸۰° + ا) + سس (۹۰° + ا) + سس (۳۶۰° − ا) = ۰

باب ششم

جملات عامہ اُن سب زاویوں کے لئے جو ایک مقررہ مثلثی نسبت رکھتے ہوں

۸۲- ایک چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ بناؤ جس کی جیب ایک کسر واجب أ کے برابر ہو۔

فرض کرو کہ وا خط ابتدائی ہے اور وب مثبت سمت میں وا پر عمود ہے، وب پر فاصلہ ون برابر أ کے ناپو۔ [اگر أ منفی ہو تو نقطہ ن، ب و ممدودہ پر واقع ہوگا۔]



نقطہ ن سے ن ع متوازی وا کے کھینچو اور و کو مرکز مان کر ایک ایسا دائرہ کھینچو جس کا نصف قطر ایک ہو اور جو خط ن ع کو نقطہ ع پر ملے، تب ا و ع زاویہ مطلوبہ ہوگا۔

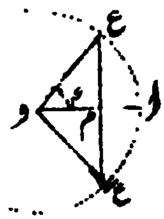
وا پر عمود ع م نکالو پس

جب ا و ع = $\frac{\text{م ع}}{\text{و ع}}$ = $\frac{\text{و ن}}{\text{و ع}}$ = $\frac{\text{أ}}{۱}$ = أ

زاویہ ا و ع کی جیب مقدار معلومہ کے برابر ہے اسلئے ا و ع

زاویہ مطلوبہ ہے

۸۴- ایک چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ بناؤ جسکی جیب التمام ایک کسر واجب ب کے برابر ہو



خط ابتدائی پر ایک فاصلہ وم برابر ب کے قطع کرو اور وا پر عمود م ع نکالو [اگر ب منفی ہو تو م نقطہ و کی دوسری طرف او ممدودہ پر واقع ہوگا]

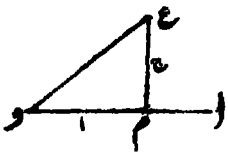
و کو مرکز مان کر ایک ایسا دائرہ کھینچو جس کا نصف قطر ایک ہو اور جو م ع کو نقطہ ع پر ملے۔

اوع زاویہ مطلوبہ ہے کیونکہ

$$\text{جم اوع} = \frac{\text{وم}}{\text{وع}} = \frac{\text{ب}}{۱} = \text{ب}$$

۸۵- ایک چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ بناؤ جس کا مماس ج کے برابر ہو۔

خط ابتدائی پر وم برابر ایک کے لو اور نقطہ م پر ایک عمود م ع برابر ج کے قائم کرو۔ تب



$$\text{مس اوع} = \frac{\text{مع}}{\text{وم}} = \text{ج}$$

پس اوع زاویہ مطلوبہ ہے

۸۶- دفعہ ۵۶ کی تعریفات سے ظاہر ہے کہ جیب کوئی

زاویہ معلوم ہو تو اس کی جیب بھی معلوم ہو سکتی ہے مگر اس کا عکس درست نہیں ہے کیونکہ ایک سے زیادہ زاویئے ایسے ہوتے ہیں جن کی ایک ہی جیب ہو مثلاً ذیل کے سب زاویوں کی جیب $\frac{1}{2}$ کے برابر ہے۔

۳۰°، ۱۵۰°، ۳۹۰°، −۲۱۰°، ......

اس سے ظاہر ہے کہ جب کسی زاویہ کی جیب دی ہوئی ہو تو زاویہ کی مقدار صحیح طور پر معلوم نہیں ہو سکتی، صرف اتنا معلوم ہوتا ہے کہ زاویوں کی تعداد کثیر میں سے کوئی ایک زاویہ مطلوبہ زاویہ ہے۔

جب کسی زاویئے کی جیب التمام، مماس یا اور مثلثی نسبتیں معلوم ہوں تو اسی قسم کے بیانات صادق آتے ہیں۔

پس معلوم ہوا کہ اگر کسی زاویئے کی کوئی ایک مثلثی نسبت دی ہوئی ہو تو مقدار زاویہ بغیر اشتباہ کے معلوم نہیں ہو سکتی

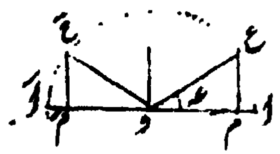
۸۷- فرض کرو کہ خط دائر وع خط ابتدائی وا پر منطبق ہوتا ہے اس سے ہمیں صرف اتنا معلوم ہوتا ہے کہ خط دائر نے مثبت یا منفی سمت میں ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳، .... چکر لگائے ہیں۔

لیکن جب خط دائر ایک چکر لگاتا ہے تو اس کا زاویہ مرتسمہ ۲π نیم قطری زاویوں کے برابر ہوتا ہے، اس لئے جب خط دائر خط ابتدائی وا پر منطبق ہوتا ہے تو اس کا زاویہ مرتسمہ مثبت یا منفی سمت میں ۲π کا ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳، .... گنا ہوتا ہے یعنی ۰ یا ±۲π، یا ±۴π، یا ±۶π، .... ہوتا ہے

اس کو اس طرح بیان کرتے ہیں کہ جب خط دائر خط ابتدائی پر منطبق ہوتا ہے تو اس کا زاویہ مرتسمہ ۲ ن π ہوتا ہے جہاں ن مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

۸۸۔ مسئلہ اُن سب زاویوں کے لئے جن کی ایک ہی جیب ہو ایک جملہ عامہ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ زاویہ ا و ع (=عہ) کی جیب معلوم ہے۔



و ا پر عمود ع م نکالو اور م و کو مَ اتنا خارج کرو کہ و مَ برابر و م کے ہو اور مَ عَ کو متوازی اور مساوی م ع کے بناؤ۔

بموجب دفعہ ۸۷، زاویہ ا و عَ = π - عہ

جب خط دائر مقام و ع یا و عَ پر (اور صرف انہی دو مقامات پر) ہوتا ہے تو اس کے زاویۂ مرتسمہ کی جیب، جیب معلومہ کے برابر ہوتی ہے۔

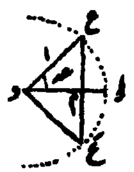
جب خط دائر مقام و ع پر ہو تو ظاہر ہے کہ اس نے چند پورے چکر لگانے کے بعد زاویہ عہ مرتسم کیا ہے یعنی بموجب دفعہ گزشتہ اسنے زاویہ

$$۲ \text{ ر } \pi + \text{عہ} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (۱)$$

مرتسم کیا ہے جہاں ر صفر یا کسی مثبت یا منفی صحیح عدد کے برابر ہوسکتی ہے۔

جب خط دائر مقام وعَ پر ہوتا ہے تو ظاہر ہے کہ اس نے ایک زاویہ ۲ ر π + اوعَ یعنی ایک زاویہ ۲ ر π + π - عہ
یعنی (۲ ر + ۱) π - عہ .... (۲)
مرتسم کیا ہے جہاں ر صفر یا کسی مثبت یا منفی صحیح عدد کے برابر ہو سکتی ہے۔
اوپر کے سب زاوئے جملہ
ن π + (-۱)^ن ا .... (۳)
میں شامل ہیں جہاں ن صفر یا مثبت یا منفی صحیح عدد کے برابر ہو سکتا ہے اور اس کی وجہ یہ ہے کہ اگر ن = ۲ ر تو (-۱)^۲ر = +۱، اور جملہ (۳) میں ن کی یہ قیمت مندرج کرنے سے ۲ ر π + عہ حاصل ہوتا ہے اور یہ بعینہ جملہ (۱) ہے
نیز اگر ن = ۲ ر + ۱ تو (-۱)^۲ر+۱ = -۱، اور جملہ (۳) میں ن کی یہ قیمت رکھنے سے (۲ ر + ۱) π - عہ حاصل ہوتا ہے اور یہ بعینہ جملہ (۲) ہے
نتیجہ صریح - اب چونکہ قاطع التمام جیب کا منکافی ہے اسلئے جن زاویوں کی جیوب باہم برابر ہوں اُن کے قاطع التمام بھی برابر ہونگے اور اس لئے جملہ (۳) میں وہ سب زاوئے شامل ہیں جن کا قاطع التمام وہی ہو جو عہ کا ہے۔
۸۹ - مسئلہ - ان سب زاویوں کے لئے جن کی ایک ہی جیب التمام ہو ایک جملہ عامہ دریافت کرو
فرض کرو کہ زاویہ اوع کی جیب التمام مقدار معلومہ کے برابر ہے

اس زاویہ کو عہ سے تعبیر کرو۔



وا پر عمود ع م نکالو اور اس کو عَ تک

اتنا خارج کرو کہ م عَ = ع م

جب خط دائر مقام وع یا وعَ (اور

صرف انہی دو مقامات) پر ہوتا ہے تب

زاویہ مرتسمہ کی جیب التمام جیب التمام معلومہ کے برابر ہوتی ہے دیکھو دفعہ ۸۴

جب خط دائر مقام وع پر ہو تو اس وقت اس نے چند پورے چکر لگانے کے بعد ایک زاویہ عہ مرتسم کیا ہے یعنی اس وقت اس نے ایک زاویہ ۲ ن π + عہ مرتسم کیا ہے جہاں ن صفر یا کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

جب خط دائر مقام وعَ پر ہو تو اس نے چند پورے چکر لگانے کے بعد زاویہ -عہ مرتسم کیا ہے یعنی ایک زاویہ ۲ ن π - عہ مرتسم کیا ہے۔

اور یہ سب زاویئے جملہ

۲ ن π ± عہ ....(۱)

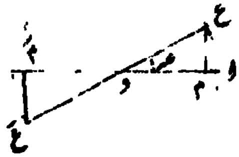
میں شامل ہیں جہاں ن صفر یا کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

نتیجہ صریح۔ جملہ (۱) میں وہ سب زاویے شامل ہیں جن کا قاطع وہی ہے جو عہ کا ہے۔

۹۰ – مسئلہ۔ ان سب زاویوں کے لئے جن کا ایک ہی مماس ہو ایک جملہ عامہ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ کوئی زاویہ اوع = عہ اور اس کا مماس، مماس معلوم کے

برابر ہے عو کو عَ تک خارج
کرو اور وعَ کو وع کے برابر بناؤ
ومَ پر عمود عَ مَ نکالو



بموجب دفعہ ۹۷ مماس زاویہ اوع
مماس زاویہ اوعَ کے مساوی ہے
نیز زاویہ اوعَ = π + عہ

جب خط دائر مقام وع پر ہو تو ظاہر ہے کہ اس نے چند پورے چکر لگانے کے بعد زاویہ عہ مرتسم کیا ہے۔

یعنی اس نے زاویہ

۲ ر π + عہ ....(۱)

مرتسم کیا ہے جہاں ر صفر یا کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے
جب خط دائر مقام وعَ پر ہو تو اس نے زاویہ ۲ رπ + (π + عہ)

یعنی زاویہ (۲ ر + ۱) π + عہ ....(۲)

مرتسم کیا ہے۔

اوپر کے تمام زاویے جملہ

ن π + عہ ....(۳)

میں شامل ہیں جہاں ن صفر یا کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔
اور اس کی وجہ یہ ہے کہ جب ن جفت ہو (یعنی = ۲ ر) تو جملہ (۳) سے وہی زاویے حاصل ہوتے ہیں جو جملہ (۱) میں شامل ہیں۔

نیز جب ن طاق ہو (یعنی = ۲ ر + ۱) تو

جملہ (۳) سے وہ سب زاویے حاصل ہوتے ہیں جو (۲) میں شامل تھے۔

نتیجہ صریح۔ جملہ (۳) میں وہ سب زاویے شامل ہیں جنکا مماس التمام وہی ہو جو ع کا ہے۔

۹۱۔ دفعات ۸۸، ۸۹ اور ۹۰ میں زاویہ ع کوئی زاویہ ہے جو شرائط معلومہ کو پورا کرتا ہے، مگر عملی مثالوں میں بالعموم بہتر ہوگا کہ ع چھوٹے سے چھوٹا وہ مثبت زاویہ منتخب کیا جائے جو شرائط سوال کو پورا کرے۔

مثال ۱۔ اُن سب زاویوں کے لئے ایک جملہ عامہ دریافت کرو۔

(۱) جن کی جیب، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ کے برابر ہو

(۲) جن کی جیب التمام، $-\frac{1}{2}$ کے برابر ہو

(۳) جن کا مماس، $\frac{1}{\sqrt{3}}$ کے برابر ہو

(۱) چھوٹے سے چھوٹا زاویہ جس کی جیب $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہو 60° یعنی $\frac{\pi}{3}$ کے برابر ہوتا ہے، اس لئے بموجب دفعہ ۸۶ اُن سب زاویوں کے لئے جن کی جیب $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہو ایک جملہ عامہ

$$\text{ن}\,\pi + (-1)^{\text{ن}} \frac{\pi}{3}$$ ہوگا

(۲) چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ جس کی جیب التمام $-\frac{1}{2}$ ہو 120° یعنی $\frac{2\pi}{3}$ کے برابر ہوتا ہے

اس لئے بموجب دفعہ ۸۹ اُن سب زاویوں کے لئے جنکی جیب التمام $-\frac{1}{2}$ ہو ایک جملہ عامہ

$$2\,\text{ن}\,\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$ ہوگا

(۳) چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ جس کا مماس $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ہو ۳۰° یعنی $\frac{\pi}{6}$ کے برابر ہوتا ہے۔

اس لئے بموجب دفعہ ۹۰ اُن سب زاویوں کے لئے جن کا مماس $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ہو ایک جملہ عامہ

$$\text{ن}\,\pi + \frac{\pi}{6}$$ ہوگا

مثال ۲۔ ط کی قیمت عامہ دریافت کرو جو شرائط مساوات جب² ط = $\frac{1}{4}$ کو پورا کرے۔

اس صورت میں جب ط = $\pm\frac{1}{2}$

علامت مثبت لینے سے

$$\text{جب ط} = \frac{1}{2} = \text{جب}\ \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore\ \text{ط} = \text{ن}\,\pi + (-1)^{\text{ن}}\frac{\pi}{6}$$

علامت منفی لینے سے

$$\text{جب ط} = -\frac{1}{2} = \text{جب}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore\ \text{ط} = \text{ن}\,\pi + (-1)^{\text{ن}}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

ط کی قیمت کے دونوں جملوں کو اکھٹا کرنے سے

$$\text{ط} = \text{ن}\,\pi + (-1)^{\text{ن}}\frac{\pi}{6}$$

$$\text{یا}\quad \text{ط} = \text{ن}\,\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

مثال ۳۔ ط کی قیمت عامہ دریافت کرو جو شرائط معادلات

جب ط = $-\frac{1}{2}$ اور مس ط = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ کو پورا کرے۔

ط کی قیمتیں جو ۰° اور ۳۶۰° کے درمیان واقع ہیں اور جو شرائط مساوات

جب ط = $-\frac{1}{2}$ کو پورا کرتی ہیں صرف ۲۱۰° اور ۳۳۰° ہیں، اسی طرح

سے طہ کی قیمتیں جبکہ مس طہ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ صرف ۳۰° اور ۲۱۰° ہیں، طہ کی قیمت جو ۰° اور ۳۶۰° کے درمیان واقع ہے اور جو مذکورہ بالا دونوں شرائط کو پورا کرتی ہے صرف ۲۱۰° یعنی $\frac{7\pi}{6}$ ہے

اس لئے طہ کی قیمتِ عامہ اِس زاویہ یعنی $\frac{7\pi}{6}$ پر ۴ قائموں کا کوئی ضعف زیادہ کرنے سے حاصل ہوتی ہے اور اس لئے یہ ۲ن π + $\frac{7\pi}{6}$ ہے جہاں ن کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

امثلہ نمبری ۱۱

طہ کی عام سے عام قیمتیں دریافت کرو جو شرائط معادلات ذیل کو پورا کریں

۱- جب طہ = $\frac{1}{2}$ ۲- جب طہ = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳- جب طہ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۴- جم طہ = $-\frac{1}{2}$

۵- جم طہ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۶- جم طہ = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

۷- مس طہ = $\sqrt{3}$ ۸- مس طہ = ۱-

۹- ظم طہ = ۱ ۱۰- قطہ = ۲

۱۱- قم طہ = $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ۱۲- جب^2 طہ = ۱

۱۳- جم^2 طہ = $\frac{1}{4}$ ۱۴- مس^2 طہ = $\frac{1}{3}$

۱۵- ۴ جب^2 طہ = ۳ ۱۶- ۲ ظم^2 طہ = قم^2 طہ

۱۷- قطہ = $\frac{4}{3}$

۱۸- طہ کی قیمت عامہ دریافت کرو جو شرائط معادلات جم طہ = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

اور مس طہ = ۱ کو پورا کرے

۱۹- طہ کی قیمت عامہ دریافت کرو جو شرائط معادلات مم طہ = $-\sqrt{3}$ اور قم طہ = -۲ کو پورا کرے۔

۲۰- اگر جم (ا - ب) = $\frac{1}{2}$ اور جیب (ا + ب) = $\frac{1}{2}$ تو ا اور ب کی چھوٹی سے چھوٹی مثبت قیمتیں نیز اُن کی عام سے عام قیمتیں دریافت کرو

۲۱- اگر مس (ا - ب) = ۱ اور قط (ا + ب) = $\frac{2}{\sqrt{3}}$ تو ا اور ب کی چھوٹی سے چھوٹی مثبت قیمتیں نیز اُن کی عام سے عام قیمتیں دریافت کرو۔

۲۲- ۰° اور ۳۶۰° کے درمیان جن زاویوں کی (۱) جیوب $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہوں (۲) جیوب التمام $-\frac{1}{2}$ ہوں (۳) مماس $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ہوں، انکو دریافت کرو۔

۲۳- اگر صرف اُن زاویوں کو ملحوظ رکھا جائے جو ۰° اور ۱۸۰° کے درمیان واقع ہوں تو معلوم کرو کہ ذیل کی مختلف صورتوں میں لا کی کتنی قیمتیں ہیں (۱) جب لا = $\frac{5}{7}$ (۲) جم لا = $\frac{1}{5}$ (۳) جم لا = $-\frac{4}{5}$
(۴) مس لا = $\frac{2}{3}$ (۵) مم لا = -۷

۲۴- زاویہ لا معلوم ہے، زاویہ ما بناؤ اگر (۱) جیب ما = ۲ جیب لا
(۲) مس ما = ۳ مس لا (۳) جم ما = $\frac{1}{2}$ جم لا اور (۴) قط ما = قم لا

۲۵- ثابت کرو کہ ذیل کے دونوں ضابطوں سے وہی زاویے تعبیر ہوتے ہیں۔ (۱) (۲ن - ۱) $\frac{\pi}{2} + (-1)^{ن}\frac{\pi}{3}$ اور (۲) ۲ن $\pi \pm \frac{\pi}{6}$ جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے۔

۲۶- ثابت کرو کہ ذیل کے دو ضابطوں
(۱) (۲ن + $\frac{1}{2}$) π ± عہ اور (۲) ن $\pi + (-1)^{ن}(\frac{\pi}{2} -$ عہ) سے وہی زاویے تعبیر ہوتے ہیں جہاں ن کوئی عدد صحیح ہے، شکل سے

اس کی توضیح کرو۔

۲۷۔ اگر ط - ع = ن π + (-۱)^{ن} ب تو

ثابت کرو کہ ط = ۲م π + ع + ب یا

ط = (۲م + ۱) π + ع - ب جہاں م اور ن کوئی دو صحیح عدد ہیں۔

۲۸۔ اگر جم ک ط + جم ق ط = ۰ تو ثابت کرو کہ اس مساوات کو حل کرنے سے ط کی مختلف قیمتوں کے دو حسابیہ سلسلے حاصل ہوتے ہیں، جن میں سے ایک کا فرق مشترک $\frac{۲\pi}{ک + ق}$ ہے اور دوسرے کا $\frac{۲\pi}{ک - ق}$

۲۹۔ ایک ایسا زاویہ بناؤ جس کی جیب $\frac{۳}{\sqrt{۵} + ۲}$ ہو۔

۹۲۔ جس مساوات میں کسی زاویہ غیر معلومہ کی مثلثی نسبتیں شامل ہوں اس کو مثلثی مساوات کہتے ہیں۔

مساوات کا حل پورے طور پر حاصل نہیں ہوتا جب تک کہ اُن سب زاویوں کے لئے جو شرائط مساوات کو پورا کرتے ہیں ایک جملہ عامہ حاصل نہ ہو جائے۔

مثلثی معادلات کی چند آسان مثالیں دفعہ ذیل میں مندرج ہیں۔

۹۳۔ مثال ۱۔ مساوات ۲ جب^{۲}لا + $\sqrt{۳}$ جم لا + ۱ = ۰ کو حل کرو۔

یہ مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے

۲ - ۲ جم^{۲}لا + $\sqrt{۳}$ جم لا + ۱ = ۰

یعنی　۲ جم^{۲}لا - $\sqrt{۳}$ جم لا - ۳ = ۰

یعنی　(جم لا - $\sqrt{۳}$) (۲ جم لا + $\sqrt{۳}$) = ۰

معلوم ہوا کہ شرائط مساوات معلومہ، جم لا = $\sqrt{۳}$ یا جم لا = - $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ سے پوری

ہوتی ہیں۔
چونکہ کسی زاویے کی جیب التمام عدداً ایک سے زیادہ نہیں ہو سکتی اس لئے پہلے جزو ضربی سے کوئی قیمت مساوات حاصل نہیں ہوتی۔

چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ جس کی جیب التمام $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہے ۱۵۰° یعنی $\frac{5\pi}{6}$ ہے۔

اس لئے جس زاویہ کی جیب التمام $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہو اس کی عام سے عام قیمت

$$2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}$$ ہوگی (دفعہ ۸۹)

اور مساوات معلومہ کی قیمت عامہ بھی یہی ہوگی۔

مثال ۲۔ مساوات مس ۵ طہ = مم ۲ طہ کو حل کرو

یہ مساوات اس طرح بھی لکھی جاسکتی ہے

مس ۵ طہ = مس ($\frac{\pi}{2}$ – ۲ طہ)

اس زاویہ کی عام سے عام قیمت جس کا ماس وہی ہو جو $\frac{\pi}{2}$ – ۲ طہ کا ہے بموجب دفعہ ۹۰، ن π + $\frac{\pi}{2}$ – ۲ طہ ہے جہاں ن کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

اس لئے مساوات مجوزہ کا عام سے عام حل

۵ طہ = ن π + $\frac{\pi}{2}$ – ۲ طہ ہے

اس لئے طہ = $\frac{1}{7}$ (ن π + $\frac{\pi}{2}$) جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے۔

امثلہ نمبری ۱۲

معادلات ذیل کو حل کرو

۱– جم² طہ – جب طہ – $\frac{1}{4}$ = ۰

۲- ۲ جب² ط + ۳ جم ط = ۰

۳- ۲ √۳ جم² ط = جب ط

۴- جم ط + جم² ط = ۱

۵- ۴ جم ط - ۳ قط ط = ۲ مس ط

۶- جب² ط - ۲ جم ط + ۱/۴ = ۰

۷- مس² ط - (۱ + √۳) مس ط + √۳ = ۰

۸- مم² ط + (√۳ + ۱/√۳) مم ط + ۱ = ۰

۹- مم ط - ا ب مس ط = ا - ب

۱۰- مس² ط + مم² ط = ۲

۱۱- قط ط - ۱ = (√۲ - ۱) مس ط

۱۲- ۳ (قط² ط + مس² ط) = ۵

۱۳- مم ط + مس ط = ۲ قم ط

۱۴- ۴ جم² ط + √۳ = ۲ (√۳ + ۱) جم ط

۱۵- ۳ جب² ط - ۲ جب ط = ۱ ۔۔۔ ۱۶- جب ۵ ط = ۱/√۲

۱۷- جب ۹ ط = جب ط ۔۔۔ ۱۸- جب ۳ ط = جب ۲ ط

۱۹- جم م ط = جم ن ط ۔۔۔ ۲۰- جب ۲ ط = جم ۳ ط

۲۱- جم ۵ ط = جم ۴ ط ۔۔۔ ۲۲- جم م ط = جب ن ط

۲۳- مم ط = مس ۸ ط ۔۔۔ ۲۴- مم ط = مس ن ط

۲۵- مس ۲ ط = مس ۲/ط ۔۔۔ ۲۶- مس ۲ ط مس ط = ۱

۲۷- مس² ۳ ط = مم² ط ۔۔۔ ۲۸- مس ۳ ط = مم ط

۲۹- مس۲ ۳ طہ = مس۲ عہ ۳۰- ۳ مس۲ طہ = ۱

۳۱- مس م لا + مم ن لا = ۰

۳۲- مس (π مم طہ) = مم (π مس طہ)

۳۳- جب (طہ - عہ) = $\frac{۱}{۲}$ اور جم (طہ + عہ) = $\frac{۱}{۲}$

۳۴- جم (۲ لا + ۳ ما) = $\frac{۱}{۲}$ اور جم (۳ لا + ۲ ما) = $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳۵- وہ سب زاویے دریافت کرو جو ۰ اور ۹۰° کے درمیان واقع ہوں اور جو شرائط مساوات، قط۲ طہ قم۲ طہ + ۲ قم۲ طہ = ۸ کو پورا کریں

۳۶- اگر مس۲ طہ = $\frac{۵}{۴}$ تو سہ طہ دریافت کرو اور مشتبہ جواب کی وجہ بیان کرو

۳۷- اگر کسی زاویہ کا سہم التمام $\frac{۱}{۳}$ ہو تو اس کی جیب التمام اور مماس التمام دریافت کرو۔

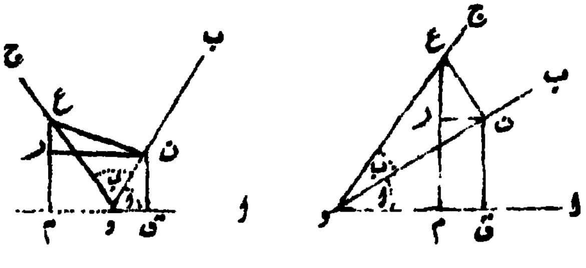
باب ہفتم

دو زاویوں کے حاصل جمع اور حاصل تفریق کی مثلثی نسبتیں

۹۴- مسئلہ- ثابت کرو کہ

جب (ا + ب) = جب ا جم ب + جم ا جب ب

اور جم (ا + ب) = جم ا جم ب − جب ا جب ب



فرض کرو کہ خط دائر مقام ابتدائی وا سے شروع ہو کر زاویہ اوب (= ا) مرتسم کرتا ہے اور اس کے بعد ایک اور زاویہ ب وج (= ب) مرتسم کرتا ہے۔

خط دائر کے آخری مقام وج پر کوئی نقطہ ع مقرر کرو اور وا اور

وب پر بالترتیب عمود ع م اور ع ن نکالو
نقطہ ن میں سے ن ر متوازی او کے اس طرح کھینچو کہ وہ م ع
کو نقطہ ر پر قطع کرے اور وا پر عمود ن ق نکالو۔

زاویہ رع ن = ۹۰ - ∠ع ن ر = ∠ر ن و = ∠ن و ق = ا

اس لئے جب (ا + ب) = جب ا و ع = م ع / و ع

= (م ر + ر ع) / و ع = ق ن / و ع + ر ع / و ع

= ق ن / و ن × و ن / و ع + ر ع / ن ع × ن ع / و ع

= جب ا جم ب + جم رع ن جب ب

∴ جب (ا + ب) = جب ا جم ب + جم ا جب ب

نیز جم (ا + ب) = جم ا و ع = و م / و ع = (و ق - م ق) / و ع

= و ق / و ع - ر ن / و ع = و ق / و ن × و ن / و ع - ر ن / ن ع × ن ع / ر ع

= جم ا جم ب - جب رع ن × جب ب

∴ جم (ا + ب) = جم ا جم ب - جب ا جب ب

۹۵- دفعہ گزشتہ کی اشکال صرف اُس صورت کے لئے کھینچی گئی ہیں جب دونوں زاویئے ا اور ب حادے ہوں لیکن یہی ثبوت ہر مقدار کے زاویوں پر حاوی ہوگا اگر اُن سب مقادیر کی علامات کا جو ایسے حسابات میں شامل ہوں خاص لحاظ رکھا جائے

نتائج مندرجہ بالا کی عمومیت سب زاویوں کے لئے بغیر اور اشکال کھینچنے کے اس طرح ثابت ہوسکتی ہے۔

فرض کروکہ ا اور ب دو حادہ زاوئے ہیں پس بموجب دفعہ ۹۴ ہم جانتے ہیں کہ مسئلہ ا اور ب کے لئے صحیح ہے۔

فرض کروکہ اَ = ۹۰° + ا اسلئے بموجب دفعہ ۷۶

جب اَ = جم ا اور جم اَ = - جب ا

تب جب (اَ + ب) = جب {۹۰° + (ا + ب)} = جم (ا + ب) موافق دفعہ ۷۶

= جم ا جم ب - جب ا جب ب = جب اَ جم ب + جم اَ جب ب

نیز جم (اَ + ب) = جم {۹۰° + (ا + ب)} = - جب (ا + ب)

= - جب ا جم ب - جم ا جب ب

= جم اَ جم ب - جب اَ جب ب

اوراگر زاویہ ب پر ۹۰° زیادہ کردئے جائیں تو بھی اسی طرح کا عمل ہوسکتا ہے لہذا ثابت ہوا کہ ضوابط دفعہ ۹۴ اُس صورت میں بھی درست رہتے ہیں جب مقدار زاویہ ا یا ب پر ۹۰° زیادہ کردئے جائیں یعنی اگر اُنکے ترکیبی زاویوں کی قیمتیں ۰° اور ۱۸۰° کے درمیان واقع ہوں۔

اسی طرح سے اَ کو ۹۰° + اَ کے مساوی رکھنے سے ہم مسائل مذکورہ کی صداقت کو اُس صورت میں بھی قائم کرسکتے ہیں جب ایک یا دونوں ترکیبی زاویوں کی قیمتیں ۰° اور ۲۷۰° کے درمیان واقع ہوں۔

اسی طرح کا عمل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مسائل مذکورہ بالعموم صحیح ہیں۔

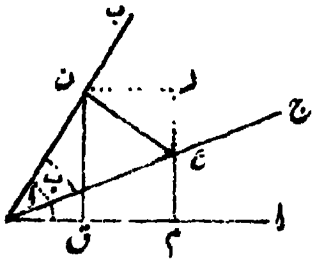
۹۶ - مسئلہ - ثابت کرو کہ

جب (ا - ب) = جب ا جم ب - جم ا جب ب

اور جم (ا - ب) = جم ا جم ب + جب ا جب ب

فرض کرو کہ خط دائر خط ابتدائی و ا سے شروع ہوکر زاویہ ا و ب (= ا) مرتسم کرتا ہے اور اس کے بعد سمت مقابل میں حرکت کرنے سے ایک زاویہ ب و ج پیدا کرتا ہے جس کی مقدار ب ہے اسلئے

زاویہ ا و ج = ا - ب



خط دائر کے آخری مقام و ج پر کوئی نقطہ ع مقرر کرو اور خطوط و ا اور و ب پر بالترتیب عمود ع م اور ع ن کھینچو، نقطہ ن سے خطوط و ا اور م ع پر بالترتیب عمود ن ق اور ن ر نکالو

زاویہ ∠ر ع ن = ۹۰ - ∠ع ن ر = ∠ر ن ب = ∠ق و ن = ا

اس لئے

جب (ا - ب) = جب ا و ج = م ع / و ع = (م ر - ع ر) / و ع

= ق ن / و ع - ع ر / و ع = ق ن / و ن × و ن / و ع - ع ر / ع ن × ع ن / و ع

= جب ا جم ب - جم ر ع ن جب ب

اس لئے جب (ا - ب) = جب ا جم ب - جم ا جب ب

نیز جم (ا - ب) = و م / و ع = (و ق + ق م) / و ع = و ق / و ع + ن ر / و ع

= و ق / و ن × و ن / و ع + ن ر / ن ع × ن ع / و ع

= جم ا جم ب + جب ا جب ب

اس لئے جم (ا - ب) = جم ا جم ب + جب ا جب ب

۹۷۔ دفعہ گزشتہ کے ثبوت ہر مقدار کے زاویوں پر حاوی ہونگے اگر مقادیر زیر بحث کی علامات کا مناسب خیال رکھا جائے۔

اگر حادّے زاویوں کی صورت میں نتائج مندرجہ مان لئے جائیں تو بغیر اور اشکال کھینچنے کے ان کی صداقت بالعموم اس طرح ثابت ہوسکتی ہے

فرض کرو کہ اِ = ۹۰° + ا تب

(چونکہ جب اِ = جم ا اور جم اِ = - جب ا)

جب (اِ - ب) = جب [۹۰° + (ا - ب)] = جم (ا - ب) (دفعہ ۷۶)

= جم ا جم ب + جب ا جب ب

= جب اِ جم ب - جم اِ جب ب

نیز جم (اِ - ب) = جم [۹۰° + (ا - ب)] = - جب (ا - ب) (دفعہ ۷۶)

= - جب ا جم ب + جم ا جب ب

= جم اِ جم ب + جب اِ جب ب

اور اسی طرح کا عمل ہوسکتا ہے اگر زاویہ ب پر ۹۰° زیادہ کر دئے جائیں۔ لہذا یہ مسئلہ اُن سب زاویوں کے لئے صحیح ثابت ہوا جو دو قائموں سے بڑے نہوں۔

اسی طرح اِ کو ۹۰° + اِ کے مساوی رکھنے سے ہم مسائل مذکورہ کو تین قائموں سے کم مقدار کے زاویوں کے لئے بھی ثابت کر سکتے ہیں اور علیٰ ہذا القیاس، لہذا اسی قسم کے عمل سے مسائل کی عام صداقت کسی مقدار کے زاویوں کی صورت میں ثابت ہوسکتی ہے۔

۹۸- مسائل دفعات ۹۴ اور ۹۶ جن کی مدد سے دو زاویوں کے حاصل جمع اور حاصل تفریق کی مثلثی نسبتیں خود ان زاویوں کی رقوم میں حاصل ہوتی ہیں اِن زاویوں کے مسائل جمع و تفریق کہلاتے ہیں

۹۹- مثال ۱- جب ۷۵° اور جم ۷۵° کی قیمتیں دریافت کرو۔

جب ۷۵° = جب (۴۵° + ۳۰°)

= جب ۴۵° جم ۳۰° + جم ۴۵° جب ۳۰°

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

اور جم ۷۵° = جم (۴۵° + ۳۰°)

= جم ۴۵° جم ۳۰° - جب ۴۵° جب ۳۰°

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

مثال ۲- ثابت کرو کہ جب (ا + ب) جب (ا - ب) = جب^{2} ا - جب^{2} ب

اور جم (ا + ب) جم (ا - ب) = جم^{2} ا - جب^{2} ب

دفعات ۹۴ اور ۹۶ کی مدد سے

جب (ا + ب) جب (ا - ب)

= (جب ا جم ب + جم ا جب ب) (جب ا جم ب - جم ا جب ب)

= جب^{2} ا جم^{2} ب - جم^{2} ا جب^{2} ب

= جب^{2} ا (۱ - جب^{2} ب) - (۱ - جب^{2} ا) جب^{2} ب

= جب^{2} ا - جب^{2} ب

نیز انہی دفعات کی مدد سے

جم(ا+ب) جم(ا-ب)

= (جم ا جم ب - جب ا جب ب)(جم ا جم ب + جب ا جب ب)

= جم^{2}ا جم^{2}ب - جب^{2}ا جب^{2}ب

= جم^{2}ا(۱ - جب^{2}ب) - (۱ - جم^{2}ا) جب^{2}ب

= جم^{2}ا - جب^{2}ب

مثال ۳۔ جب(لا+ما) اور جم(لا+ما) کے ضابطوں کو صحیح مان کر اُن سے جلات جب(لا-ما) اور جم(لا-ما) کے ضابطوں کو مستنبط کرو۔

جب لا = جب{(لا-ما) + ما}

= جب(لا-ما) جم ما + جم(لا-ما) جب ما ...... (۱)

اور جم لا = جم{(لا-ما) + ما}

= جم(لا-ما) جم ما - جب(لا-ما) جب ما ...... (۲)

(۱) کو جم ما سے اور (۲) کو جب ما سے ضرب دو اور تفریق کرو

تب جب لا جم ما - جم لا جب ما = جب(لا-ما){جم^{2}ما + جب^{2}ما}

= جب(لا-ما)

نیز (۱) کو جب ما سے اور (۲) کو جم ما سے ضرب دو اور جمع کرو تو حاصل ہوگا۔

جب لا جب ما + جم لا جم ما = جم(لا-ما){جم^{2}ما + جب^{2}ما}

= جم(لا-ما)

لہٰذا دونوں ضابطے ثابت ہوئے

یہ دونوں ضابطے زاویوں کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہیں کیونکہ جن ضابطوں سے انکا استنباط ہوا ہے وہ سب زاویوں کے لئے بالعموم

صحیح ہیں۔

امثلہ نمبری ۱۳

۱۔ اگر جب عہ = ۳/۵ اور جم بہ = ۹/۴۱ تو جب (عہ - بہ) اور جم (عہ + بہ) کی قیمتیں دریافت کرو، نیز شکل اور صحیح پیمائش سے اِن کی تصدیق کرو

۲۔ اگر جب عہ = ۴۵/۵۳ اور جب بہ = ۳۳/۶۵ تو جب (عہ - بہ) اور جب (عہ + بہ) کی قیمتیں دریافت کرو۔

۳۔ اگر جب عہ = ۱۵/۱۷ اور جم بہ = ۱۲/۱۳ تو جب (عہ + بہ)، جم (عہ - بہ) اور مس (عہ + بہ) کی قیمتیں دریافت کرو، نیز شکل اور صحیح پیمائش سے انکی تصدیق کرو۔

ثابت کرو کہ

۴۔ جم (۴۵° - ا) جم (۴۵° - ب) - جب (۴۵° - ا) جب (۴۵° - ب)
= جب (ا + ب)

۵۔ جب (۴۵° + ا) جم (۴۵° - ب) + جم (۴۵° + ا) جب (۴۵° - ب)
= جم (ا - ب)

۶۔ جب (ا - ب) / (جم ا جم ب) + جب (ب - ج) / (جم ب جم ج) + جب (ج - ا) / (جم ج جم ا) = ۰

۷۔ جب ۱۰۵° + جم ۱۰۵° = جم ۴۵°

۸۔ جب ۷۵° - جب ۱۵° = جم ۱۰۵° + جم ۱۵°

۹۔ جم عہ جم (جہ - عہ) - جب عہ جب (جہ - عہ) = جم جہ

۱۰۔ جم (عہ + بہ) جم بہ - جم (بہ + جہ) جم عہ = جب بہ جب (جہ - عہ)

۱۱- جب (ن+۱) ا جب (ن-۱) ا + جم (ن+۱) ا جم (ن-۱) ا = جم ۲ ا

۱۲- جب (ن+۱) ا جب (ن+۲) ا + جم (ن+۱) ا جم (ن+۲) ا = جم ا

۱۰۰- دفعات ۹۴ اور ۹۶ سے ا اور ب کی تمام قیمتوں کے لئے

جب (ا + ب) = جب ا جم ب + جم ا جب ب

جب (ا - ب) = جب ا جم ب - جم ا جب ب

اعمال جمع اور تفریق سے

جب (ا + ب) + جب (ا - ب) = ۲ جب ا جم ب ...... (۱)

جب (ا + ب) - جب (ا - ب) = ۲ جم ا جب ب ...... (۲)

دفعات مذکورہ بالا سے ا اور ب کی تمام قیمتوں کے لئے

جم (ا + ب) = جم ا جم ب - جب ا جب ب

اور جم (ا - ب) = جم ا جم ب + جب ا جب ب

اعمال جمع و تفریق سے

جم (ا + ب) + جم (ا - ب) = ۲ جم ا جم ب ...... (۳)

جم (ا - ب) - جم (ا + ب) = ۲ جب ا جب ب ...... (۴)

اب فرض کرو کہ ا + ب = ج اور ا - ب = د یعنی

ا = (ج + د)/۲ اور ب = (ج - د)/۲

اوپر کے ضابطوں میں ا اور ب کی یہ قیمتیں مندرج کرنے سے ارتباطات (۱) تا (۴) صور ذیل میں تحویل ہوتے ہیں -

جب ج + جب د = ۲ جب (ج + د)/۲ جم (ج - د)/۲ ...... (آ)

جب ج - جب د = ۲ جم $\frac{ج+د}{۲}$ جب $\frac{ج-د}{۲}$ ......(۲)

جم ج + جم د = ۲ جم $\frac{ج+د}{۲}$ جم $\frac{ج-د}{۲}$ ......(۳)

جم ج - جم د = ۲ جب $\frac{ج+د}{۲}$ جب $\frac{د-ج}{۲}$ ......(۴)

{طالب علم کو یاد رکھنا چاہیئے کہ (۴) کے بائیں طرف کا دوسرا جزو ضربی جب $\frac{د-ج}{۲}$ ہے نہ کہ جب $\frac{ج-د}{۲}$}

۱۰۱- ارتباطات (۱) سے (۴) تک نہایت مشہور اور کار آمد ہیں ان کو بڑی احتیاط سے حفظ یاد کر لینا چاہیئے' ان کے کثیر الاستعمال ہونے کی وجہ سے ہم ان کا ایک ہندسی ثبوت اُس صورت میں دینگے جب زاوئے ج اور د دونوں حادّے ہوں۔

فرض کرو کہ ا و ج زاویہ ج سے اور ا و د زاویہ د سے تعبیر ہوتا ہے' زاویہ ج و د کی تنصیف خط وی سے کرو ایک نقطہ ع خط وی پر مقرر کرو اور وع پر عمود ق ع ر نکالو جو وج اور و د کو بالترتیب نقاط ق اور ر پر قطع کرے۔

و ا پر عمود ع ل' ق م' ر ن نکالو اور نقطہ ر سے ع ل یا ق م پر عمود ر س ت کھینچو جو ان کو بالترتیب نقاط س اور ت پر قطع کرے۔

اب چونکہ زاویہ د و ج زاویہ ج - د کے برابر ہے اس لئے د و ی اور ی و ج میں سے ہر ایک زاویہ $\frac{ج-د}{۲}$ کے برابر ہے

اور نیز

زاویہ ادی = زاویہ اود + زاویہ دوی = د + (ج - د)/۲ = (ج + د)/۲

چونکہ مثلث ع ور اور ع وق ہر طرح سے مساوی ہیں

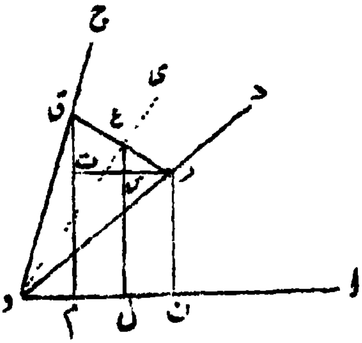
اس لئے وق = ور اور ع ر = ع ق یعنی رق = ۲ رع

اس لئے ق ت = ۲ ع س اور رت = ۲ رس یعنی م ن = ۲ م ل

اس لئے م ق + ن ر = ت ق + ۲ ل س = ۲ س ع + ۲ ل س = ۲ ل ع

نیز وم + ون = ۲ وم + م ن = ۲ وم + ۲ م ل = ۲ و ل

اس لئے جب ج + جب د = م ق/وق + ن ر/ور = (م ق + ن ر)/ور



= ۲ ل ع/ور = ۲ ل ع/وع × وع/ور = ۲ جب ل وع جم ع ور

= ۲ جب (ج + د)/۲ جم (ج - د)/۲

نیز جب ج - جب د = م ق/وق - ن ر/ور

= (م ق - ن د)/ور = ت ق/ور = ۲ س ع/ور

= ۲ س ع/ل ع × ل ع/ور = ۲ جم س ع ر جب ر و ع

= ۲ جم (ج + د)/۲ جب (ج - د)/۲

[کیونکہ زاویہ س ع ر = ۹۰° - زاویہ س ع و = زاویہ ل و ع = (ج + د)/۲]

نیز جم ج + جم د = وم/وق + ون/ور = (وم + ون)/ور

= ۲ ذل/ور = ۲ ول/وع × وع/ور

= ۲ جم ل و ع جم ع ور = ۲ جم (ج + د)/۲ جم (ج - د)/۲

اور آخر میں جم د - جم ج = ون/ور - وم/وق = (ون - وم)/ور

= م ن/ور = ۲ س ر/ور = ۲ س ر/ع ر × ع ر/ور

= ۲ جب س ع ر × جب ع و ر

= ۲ جب (ج + د)/۲ جب (ج - د)/۲

۱۰۲- طالب علم کو خاص ہدایت کی جاتی ہے کہ دفعہ گزشتہ کے ضابطوں سے بخوبی واقف ہو جائے اور ان کے استعمال کی خوب مشق کر لے، ان کی کامل واقفیت اس کی آیندہ ترقی

کو نہایت آسان کر دے گی۔

یہ ضابطے نہایت کار آمد ہیں کیونکہ ان کی وساطت سے مقادیر کے حاصل جمع اور حاصل تفریق بعض اور مقادیر کے حاصل ضربوں میں تحویل ہو سکتے ہیں اور اغلباً طالب علم کو جبر مقابلہ سے معلوم ہے کہ مقادیر کے حاصل ضرب لوکارثم کی مدد سے باآسانی مختصر صورت میں لائے جا سکتے ہیں

اب ہم ان قوانین کے استعمال کی چند مثالیں دیتے ہیں

مثال ۱۔ $\text{جب } ۶\text{طہ} + \text{جب } ۴\text{طہ} = ۲ \text{ جب } \frac{۶\text{طہ} + ۴\text{طہ}}{۲} \text{ جم } \frac{۶\text{طہ} - ۴\text{طہ}}{۲}$

$= ۲ \text{ جب } ۵\text{طہ} \text{ جم طہ}$

مثال ۲۔ $\text{جم } ۳\text{طہ} - \text{جم } ۷\text{طہ} = ۲ \text{ جب } \frac{۳\text{طہ} + ۷\text{طہ}}{۲} \text{ جب } \frac{۷\text{طہ} - ۳\text{طہ}}{۲}$

$= ۲ \text{ جب } ۵\text{طہ} \text{ جب } ۲\text{طہ}$

مثال ۳۔

$$\frac{\text{جب } ۷۵^\circ - \text{جب } ۱۵^\circ}{\text{جم } ۷۵^\circ + \text{جم } ۱۵^\circ} = \frac{۲ \text{ جم } \frac{۷۵^\circ + ۱۵^\circ}{۲} \text{ جب } \frac{۷۵^\circ - ۱۵^\circ}{۲}}{۲ \text{ جم } \frac{۷۵^\circ + ۱۵^\circ}{۲} \text{ جم } \frac{۷۵^\circ - ۱۵^\circ}{۲}}$$

$$= \frac{۲ \text{ جم } ۴۵^\circ \text{ جب } ۳۰^\circ}{۲ \text{ جم } ۴۵^\circ \text{ جم } ۳۰^\circ} = \text{مس } ۳۰^\circ$$

$$= \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \ldots\ldots ۵۷۷۳۵\text{ء}$$

[ان ضابطوں کے استعمال سے تسہیل عمل کی یہ ایک چھوٹی سی مثال ہے اگر ہم جب ۷۵°، جب ۱۵°، جم ۷۵° اور جم ۱۵° کو لوکارثمی جدولوں سے نکالیں اور اس کے بعد ایک طویل کسر اعشاریہ کو دوسری پر تقسیم کریں تو ظاہر ہے کہ یہ نہایت پریشان کن اور طولانی عمل ہوگا]

مثال ۴۔ جملہ $\dfrac{(\text{جم طہ} - \text{جم ۳ طہ})(\text{جب ۸ طہ} + \text{جب ۲ طہ})}{(\text{جب ۵ طہ} - \text{جب طہ})(\text{جم ۴ طہ} - \text{جم ۶ طہ})}$ کو مختصر کرو۔

ضابطہ دفعہ ۱۰۰ کی مدد سے

$$\text{جملہ} = \frac{\text{۲ جب } \frac{\text{طہ} + \text{۳ طہ}}{۲} \text{ جب } \frac{\text{۳ طہ} - \text{طہ}}{۲} \times \text{۲ جب } \frac{\text{۸ طہ} + \text{۲ طہ}}{۲} \text{ جم } \frac{\text{۸ طہ} - \text{۲ طہ}}{۲}}{\text{۲ جم } \frac{\text{۵ طہ} + \text{طہ}}{۲} \text{ جب } \frac{\text{۵ طہ} - \text{طہ}}{۲} \times \text{۲ جب } \frac{\text{۴ طہ} + \text{۶ طہ}}{۲} \text{ جب } \frac{\text{۶ طہ} - \text{۴ طہ}}{۲}}$$

$$= \frac{\text{۴} \times \text{جب ۲ طہ جب طہ} \times \text{جب ۵ طہ جم ۳ طہ}}{\text{۴} \times \text{جم ۳ طہ جب ۲ طہ} \times \text{جب ۵ طہ جب طہ}} = ۱$$

امثلہ نمبری ۱۴

ثابت کرو کہ

۱۔ $\dfrac{\text{جب ۷ طہ} - \text{جب ۵ طہ}}{\text{جم ۷ طہ} + \text{جم ۵ طہ}} = \text{مس طہ}$

۲۔ $\dfrac{\text{جم ۶ طہ} - \text{جم ۴ طہ}}{\text{جب ۶ طہ} + \text{جب ۴ طہ}} = -\text{مس طہ}$

۳۔ $\dfrac{\text{جب ا} + \text{جب ۳ ا}}{\text{جم ا} + \text{جم ۳ ا}} = \text{مس ۲ ا}$

۴۔ $\dfrac{\text{جب ۷ ا} - \text{جب ا}}{\text{جب ۸ ا} - \text{جب ۲ ا}} = \text{جم ۴ ا قطہ ۵ ا}$

۵۔ $\dfrac{\text{جم ۲ ب} + \text{جم ۲ ا}}{\text{جم ۲ ب} - \text{جم ۲ ا}} = \text{مم (ا + ب) مم (ا − ب)}$

۶۔ $\dfrac{\text{جب ۲ ا} + \text{جب ۲ ب}}{\text{جب ۲ ا} - \text{جب ۲ ب}} = \dfrac{\text{مس (ا + ب)}}{\text{مس (ا − ب)}}$

۷۔ (جب ا + جب ۲ا) / (جم ا − جم ۲ا) = مم ا/۲

۸۔ (جب ۵ا − جب ۳ا) / (جم ۳ا + جم ۵ا) = مس ا

۹۔ (جم ۲ب − جم ۲ا) / (جب ۲ب + جب ۲ا) = مس (ا − ب)

۱۰۔ جم (ا + ب) + جب (ا − ب) = ۲ جب (۴۵° + ا) جم (۴۵° + ب)

۱۱۔ (جم ۳ا − جم ا) / (جب ۳ا − جب ا) + (جم ۲ا − جم ۴ا) / (جب ۴ا − جب ۲ا) = جب ا / (جم ۲ا جم ۳ا)

۱۲۔ (جب (۴ا − ۲ب) + جب (۴ب − ۲ا)) / (جم (۴ا − ۲ب) + جم (۴ب − ۲ا)) = مس (ا + ب)

۱۳۔ (مس ۵ط + مس ۳ط) / (مس ۵ط − مس ۳ط) = ۴ جم ۲ط جم ۴ط

۱۴۔ (جم ۳ط + ۲ جم ۵ط + جم ۷ط) / (جم ط + ۲ جم ۳ط + جم ۵ط) = جم ۲ط − جب ۲ط مس ۳ط

۱۵۔ (جب ا + جب ۳ا + جب ۵ا + جب ۷ا) / (جم ا + جم ۳ا + جم ۵ا + جم ۷ا) = مس ۴ا

۱۶۔ (جب (ط + ف) − ۲ جب ط + جب (ط − ف)) / (جم (ط + ف) − ۲ جم ط + جم (ط − ف)) = مس ط

۱۷۔ (جب ا + ۲ جب ۳ا + جب ۵ا) / (جب ۳ا + ۲ جب ۵ا + جب ۷ا) = جب ۳ا / جب ۵ا

۱۸-
$$\frac{\text{جب (ا - ج) + ۲ جب ا + جب (ا + ج)}}{\text{جب (ب - ج) + ۲ جب ب + جب (ب + ج)}} = \frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}}$$

۱۹-
$$\frac{\text{جب ا - جب ۵ا + جب ۹ا - جب ۱۳ا}}{\text{جم ا - جم ۵ا - جم ۹ا + جم ۱۳ا}} = \text{مم ۴ا}$$

۲۰-
$$\frac{\text{جب ا + جب ب}}{\text{جب ا - جب ب}} = \text{مس}\ \frac{\text{ا + ب}}{۲}\ \text{مم}\ \frac{\text{ا - ب}}{۲}$$

۲۱-
$$\frac{\text{جم ا + جم ب}}{\text{جم ب - جم ا}} = \text{مم}\ \frac{\text{ا + ب}}{۲}\ \text{مم}\ \frac{\text{ا - ب}}{۲}$$

۲۲-
$$\frac{\text{جب ا + جب ب}}{\text{جم ا + جم ب}} = \text{مس}\ \frac{\text{ا + ب}}{۲}$$

۲۳-
$$\frac{\text{جب ا - جب ب}}{\text{جم ب - جم ا}} = \text{مم}\ \frac{\text{ا + ب}}{۲}$$

۲۴-
$$\frac{\text{جم (ا + ب + ج) + جم (- ا + ب + ج) + جم (ا - ب + ج) + جم (ا + ب - ج)}}{\text{جب (ا + ب + ج) + جب (- ا + ب + ج) - جب (ا - ب + ج) + جب (ا + ب - ج)}} = \text{مم ب}$$

۲۵- $\text{جم ۳ا + جم ۵ا + جم ۷ا + جم ۱۵ا = ۴ جم ۴ا جم ۵ا جم ۶ا}$

۲۶- $\text{جم (- ا + ب + ج) + جم (ا - ب + ج) + جم (ا + ب - ج) + جم (ا + ب + ج)}$

$\text{= ۴ جم ا جم ب جم ج}$

۲۷- $\text{جب ۵۰}^\circ \text{ - جب ۷۰}^\circ \text{ + جب ۱۰}^\circ \text{ = ۰}$

۲۸- $\text{جب ۱۰}^\circ \text{ + جب ۲۰}^\circ \text{ + جب ۴۰}^\circ \text{ + جب ۵۰}^\circ \text{ = جب ۷۰}^\circ \text{ + جب ۸۰}^\circ$

۲۹- $\text{جب ھ + جب ۲ھ + جب ۴ھ + جب ۵ھ = ۴ جم}\ \frac{\text{ھ}}{۲}\ \text{جم}\ \frac{\text{۳ھ}}{۲}\ \text{جب ۳ھ}$

مختصر کرو

۳۰۔ جم {ط + (ن − $\frac{۳}{۲}$) ف} − جم {ط + (ن + $\frac{۳}{۲}$) ف} کو

۳۱۔ جب {ط + (ن − $\frac{۱}{۲}$) ف} + جب {ط + (ن + $\frac{۱}{۲}$) ف} کو

۱۰۳۔ دفعہ ۱۰۰ کے ضوابط (۱)، (۲)، (۳)، (۴) نہایت کارآمد ہیں ان کو شکل ذیل میں یاد رکھنا چاہیئے۔

۲ جب ا جم ب = جب (ا + ب) + جب (ا − ب) ...(۱)

۲ جم ا جب ب = جب (ا + ب) − جب (ا − ب) ...(۲)

۲ جم ا جم ب = جم (ا + ب) + جم (ا − ب) ...... (۳)

۲ جب ا جب ب = جم (ا − ب) − جم (ا + ب) ...... (۴)

ان کو ہم (دفعہ ۱۰۰) کے ضابطوں (اَ)، (۲َ)، (۳َ)، (۴َ) کا عکس خیال کر سکتے ہیں۔

مثال ۱۔ ۲ جب ۳ ط جم ط = جب ۴ ط + جب ۲ ط

مثال ۲۔ ۲ جب ۵ ط جب ۳ ط = جم ۲ ط − جم ۸ ط

مثال ۳۔ ۲ جم ۱۱ ط جم ۲ ط = جم ۱۳ ط + جم ۹ ط

مثال ۴۔ $\frac{\text{جب ۸ ط جم ط − جب ۶ ط جم ۳ ط}}{\text{جم ۲ ط جم ط − جب ۳ ط جب ۴ ط}}$ کو مختصر کرو

مندرجہ بالا ضابطوں کی مدد سے

جملہ مجوزہ $= \dfrac{\frac{1}{2}\left[\text{جب ۹ طہ + جب ۷ طہ}\right] - \frac{1}{2}\left[\text{جب ۹ طہ + جب ۳ طہ}\right]}{\frac{1}{2}\left[\text{جم ۳ طہ + جم طہ}\right] - \frac{1}{2}\left[\text{جم طہ - جم ۷ طہ}\right]}$

$= \dfrac{\text{جب ۷ طہ - جب ۳ طہ}}{\text{جم ۳ طہ + جم ۷ طہ}}$

$= \dfrac{\text{۲ جم ۵ طہ جب ۲ طہ}}{\text{۲ جم ۵ طہ جم ۲ طہ}}$ ضوابط دفعہ ۱۰۰ کی مدد سے

= مس ۲ طہ

[اس مثال میں سب سے پہلے ہم نے اس دفعہ کے ضابطوں کو استعمال کیا، اس کے بعد مزید اختصار کی خاطر ان کی عکس صورتوں (دفعہ ۱۰۰) سے مدد لی۔ طالب علم کو یہ ترکیب یاد رکھنی چاہیئے جملوں کے اختصار میں یہ اکثر کام آتی ہے]

امثلہ نمبری ۱۵

مفصلہ ذیل کو حاصل جمع یا حاصل تفریق کی صورت میں بیان کرو

۱- ۲ جب ۵ طہ جب ۷ طہ　　　۲- ۲ جم ۷ طہ جب ۵ طہ

۳- ۲ جم ۱۱ طہ جم ۳ طہ　　　۴- ۲ جب ۵۴° جب ۶۶°

ثابت کرو کہ

۵- جب $\frac{\text{طہ}}{\text{۲}}$ جب $\frac{\text{۷ طہ}}{\text{۲}}$ + جب $\frac{\text{۳ طہ}}{\text{۲}}$ جب $\frac{\text{۱۱ طہ}}{\text{۲}}$ = جب ۲ طہ جب ۵ طہ

۶- جم ۲ طہ جم $\frac{\text{طہ}}{\text{۲}}$ - جم ۳ طہ جم $\frac{\text{۹ طہ}}{\text{۲}}$ = جب ۵ طہ جب $\frac{\text{۵ طہ}}{\text{۲}}$

۷- جب ا جب (ا + ۲ ب) - جب ب جب (ب + ۲ ا) = جب (ا - ب) جب (ا + ب)

۸- (جب ۳ ا + جب ا) جب ا + (جم ۳ ا - جم ا) جم ا = ۰

۹- [۲ جب (ا - ج) جم ج - جب (ا - ۲ ج)] / [۲ جب (ب - ج) جم ج - جب (ب - ۲ ج)] = جب ا / جب ب

۱۰- [جب ا جب ۲ ا + جب ۳ ا جب ۶ ا + جب ۴ ا جب ۱۳ ا] / [جب ا جم ۲ ا + جب ۳ ا جم ۶ ا + جب ۴ ا جم ۱۳ ا] = مس ۹ ا

۱۱- [جم ۲ ا جم ۳ ا - جم ۲ ا جم ۷ ا + جم ا جم ۱۰ ا] / [جب ۴ ا جب ۳ ا - جب ۲ ا جب ۵ ا + جب ۴ ا جب ۷ ا] = مم ۶ ا مم ۵ ا

۱۲- جم (۳۶° - ا) جم (۳۶° + ا) + جم (۵۴° + ا) جم (۵۴° - ا) = جم ۲ ا

۱۳- جم ا جب (ب - ج) + جم ب جب (ج - ا) + جم ج جب (ا - ب) = ۰

۱۴- جب (۴۵° + ا) جب (۴۵° - ا) = ½ جم ۲ ا

۱۵- سہ (ا + ب) سہ (ا - ب) = (جم ا - جم ب)^۲

۱۶- جب (ہ - جہ) جم (ع - ل) + جب (جہ - ع) جم (ہ - ل)

+ جب (ع - ہ) جم (جہ - ل) = ۰

۱۷- ۲ جم π/۱۳ جم ۹π/۱۳ + جم ۳π/۱۳ + جم ۵π/۱۳ = ۰

۱۰۴- ثابت کرو کہ مس (ا + ب) = (مس ا + مس ب) / (۱ - مس ا مس ب)

اور مس (ا - ب) = (مس ا - مس ب) / (۱ + مس ا مس ب)

بموجب دفعہ ۹۴ ا اور ب کی تمام قیمتوں کے لئے

مس (ا + ب) = جب (ا + ب) / جم (ا + ب) = (جب ا جم ب + جم ا جب ب) / (جم ا جم ب - جب ا جب ب)

شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو جم ا جم ب پر تقسیم کرنے سے

$$= \frac{\frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}} + \frac{\text{جب ب}}{\text{جم ب}}}{1 - \frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}} \times \frac{\text{جب ب}}{\text{جم ب}}}$$

$$\therefore \text{مس}(\text{ا}+\text{ب}) = \frac{\text{مس ا} + \text{مس ب}}{1 - \text{مس ا مس ب}}$$

نیز بموجب دفعہ ۹۶

$$\text{مس}(\text{ا}-\text{ب}) = \frac{\text{جب}(\text{ا}-\text{ب})}{\text{جم}(\text{ا}-\text{ب})}$$

$$= \frac{\text{جب ا جم ب} - \text{جم ا جب ب}}{\text{جم ا جم ب} + \text{جب ا جب ب}}$$

$$= \frac{\frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}} - \frac{\text{جب ب}}{\text{جم ب}}}{1 + \frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}} \times \frac{\text{جب ب}}{\text{جم ب}}}$$

[شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو جم ا جم ب پر تقسیم کرنے سے]

$$\therefore \text{مس}(\text{ا}-\text{ب}) = \frac{\text{مس ا} - \text{مس ب}}{1 + \text{مس ا مس ب}}$$

۱۰۵ — دفعہ گزشتہ کے ضابطوں کا ہندسی ثبوت اشکال دفعہ ۹۴ اور ۹۶ سے حاصل ہو سکتا ہے۔

(۱) شکل دفعہ ۹۴ میں

$$\text{مس}(\text{ا}+\text{ب})=\frac{\text{م ع}}{\text{و م}}=\frac{\text{ق ن}+\text{ر ع}}{\text{و ق}-\text{ر ن}}$$

$$=\frac{\frac{\text{ق ن}}{\text{و ق}}+\frac{\text{ر ع}}{\text{و ق}}}{1-\frac{\text{ر ن}}{\text{و ق}}}=\frac{\text{مس ا}+\frac{\text{ر ع}}{\text{و ق}}}{1-\frac{\text{ر ن}}{\text{ر ع}}\times\frac{\text{ر ع}}{\text{و ق}}}$$

اب چونکہ زاوئے ر ع ن اور ق و ن برابر ہیں اس لئے مثلث ر ع ن اور ق و ن متشابہ ہیں

پس $\frac{\text{ر ع}}{\text{ع ن}}=\frac{\text{و ق}}{\text{و ن}}$

اور اسلئے $\frac{\text{ر ع}}{\text{و ق}}=\frac{\text{ع ن}}{\text{و ن}}=\text{مس ب}$

اس لئے $\text{مس}(\text{ا}+\text{ب})=\frac{\text{مس ا}+\text{مس ب}}{\text{ا}-\text{مس ر ع ن مس ب}}$

$$=\frac{\text{مس ا}+\text{مس ب}}{1-\text{مس ا مس ب}}$$

(۲) شکل دفعہ ۹۶ میں

$$\text{مس}(\text{ا}-\text{ب})=\frac{\text{م ع}}{\text{و م}}=\frac{\text{ق ن}-\text{ع ر}}{\text{و ق}+\text{ن ر}}$$

$$=\frac{\frac{\text{ق ن}}{\text{و ق}}-\frac{\text{ع ر}}{\text{و ق}}}{1+\frac{\text{ن ر}}{\text{و ق}}}=\frac{\text{مس ا}-\frac{\text{ع ر}}{\text{و ق}}}{1+\frac{\text{ن ر}}{\text{ع ر}}\times\frac{\text{ع ر}}{\text{و ق}}}$$

اب چونکہ زاویئے ی ع ن اور ن و ق مساوی ہیں

اس لئے $\frac{\text{ی ع}}{\text{ع ن}} = \frac{\text{و ق}}{\text{و ن}}$

اور اس لئے $\frac{\text{ع ز}}{\text{د ق}} = \frac{\text{ع ن}}{\text{و ن}} = \text{مس ب}$

اس لئے $\text{مس}(\text{ا} - \text{ب}) = \frac{\text{مس ا} - \text{مس ب}}{\text{ا} + \text{مس ی ع ن مس ب}}$

$= \frac{\text{مس ا} - \text{مس ب}}{\text{ا} + \text{مس ا مس ب}}$

۱۰۶ — مندرجہ بالا ضابطوں کی چند خاص صورتیں اس طرح حاصل ہو سکتی ہیں۔

فرض کرو کہ ب = ۴۵° تب

$\text{مس}(\text{ا} + ۴۵°) = \frac{\text{مس ا} + \text{ا}}{\text{ا} - \text{مس ا}} = \frac{\text{ا} + \text{مس ا}}{\text{ا} - \text{مس ا}}$

اور $\text{مس}(\text{ا} - ۴۵°) = \frac{\text{مس ا} - \text{ا}}{\text{ا} + \text{مس ا}}$

اسی طرح موافق دفعہ ۱۰۴ عمل کرنے سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$\text{مم}(\text{ا} + \text{ب}) = \frac{\text{مم ا مم ب} - \text{ا}}{\text{مم ا} + \text{مم ب}}$

اور $\text{مم}(\text{ا} - \text{ب}) = \frac{\text{مم ا مم ب} + \text{ا}}{\text{مم ب} - \text{مم ا}}$

۱۰۷ — مثال ا۔ $\text{مس } ۷۵° = \text{مس}(۴۵° + ۳۰°)$

$$= \frac{\text{مس}\,۴۵^\circ + \text{مس}\,۳۰^\circ}{۱ - \text{مس}\,۴۵^\circ\ \text{مس}\,۳۰^\circ}$$

$$= \frac{۱ + \frac{۱}{\sqrt{۳}}}{۱ - \frac{۱}{\sqrt{۳}}} = \frac{\sqrt{۳} + ۱}{\sqrt{۳} - ۱}$$

$$= \frac{(\sqrt{۳} + ۱)^۲}{۳ - ۱} = \frac{۴ + ۲\sqrt{۳}}{۲}$$

$$= ۲ + \sqrt{۳} = ۲ + ۱٫۷۳۲۰۵\ldots = ۳٫۷۳۲۰۵\ldots$$

مثال ۲- $\text{مس}\,۱۵^\circ = \text{مس}(۴۵^\circ - ۳۰^\circ)$

$$= \frac{\text{مس}\,۴۵^\circ - \text{مس}\,۳۰^\circ}{۱ + \text{مس}\,۴۵^\circ\ \text{مس}\,۳۰^\circ}$$

$$= \frac{۱ - \frac{۱}{\sqrt{۳}}}{۱ + \frac{۱}{\sqrt{۳}}} = \frac{\sqrt{۳} - ۱}{\sqrt{۳} + ۱} = \frac{(\sqrt{۳} - ۱)^۲}{۳ - ۱}$$

$$= \frac{۴ - ۲\sqrt{۳}}{۲} = ۲ - \sqrt{۳} = ۲ - ۱٫۷۳۲۰۵\ldots$$

$$= ۰٫۲۶۷۹۵\ldots$$

امثلہ نمبری ۱۶

۱- اگر $\text{مس}\,ا = \frac{۱}{۲}$ اور $\text{مس}\,ب = \frac{۱}{۳}$ تو $\text{مس}(۲ا + ب)$ اور $\text{مس}(۲ا - ب)$ کی قیمتیں دریافت کرو

نیز ترسیمی عمل اور صحیح پیمائش سے اس کی تصدیق کرو

۲۔ اگر مس ا = $\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}+۴}$ اور مس ب = $\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}-۴}$ تو ثابت کرو کہ

مس (ا - ب) = ۱٫۳۷۵

۳۔ اگر مس ا = $\frac{ن}{ن+۱}$ اور مس ب = $\frac{۱}{۲ن+۱}$ تو مس (ا+ب) دریافت کرو

۴۔ اگر مس عہ = $\frac{۵}{۶}$ اور مس بہ = $\frac{۱}{۱۱}$ تو ثابت کرو کہ عہ + بہ = $\frac{\pi}{۴}$، عمل ترسیمی اور صحیح پیمائش سے اس کی تصدیق کرو۔

ثابت کرو کہ

۵۔ مس ($\frac{\pi}{۴}$ + طہ) × مس ($\frac{۳\pi}{۴}$ + طہ) = -۱

۶۔ مم ($\frac{\pi}{۴}$ + طہ) مم ($\frac{\pi}{۴}$ - طہ) = ۱

۷۔ ۱ + مس ا مس $\frac{ا}{۲}$ = مس ا مم $\frac{ا}{۲}$ - ۱ = قط ا

۱۰۸۔ اس باب کے ضابطوں کو استعمال کرنے سے اس قسم کی مثالیں بھی حل ہوسکتی ہیں کہ ہم اُن سب زاویوں کے لئے ایک جملہ عامہ دریافت کریں جن کی جیب یا جیب التمام یا مماس معلوم ہو دفعات ۸۸ تا ۹۰ میں اس کے متعلق بحث ہوچکی ہے۔

اُن سب زاویوں کے لئے جو ایک ہی جیب معلوم رکھتے ہوں ایک قیمت عامہ دریافت کرو

فرض کرو کہ عہ کوئی زاویہ ہے جو جیب معلوم رکھتا ہے اور طہ ایک اور زاویہ ہے جس کی جیب وہی ہے جو عہ کی ہے

پس ہمیں طہ کی ایک ایسی عام سے عام قیمت معلوم کرنی ہے جو شرائط مساوات جب طہ = جب عہ یعنی جب طہ - جب عہ = ۰ کو پورا کرے، یہ مساوات اس طرح بھی لکھی جا سکتی ہے۔

$$۲ \text{ جم } \frac{\text{طہ} + \text{عہ}}{۲} \text{ جب } \frac{\text{طہ} - \text{عہ}}{۲} = ۰$$

اور اس لیئے اس کی شرائط معاولات ذیل سے پوری ہونگی

$$\text{جم } \frac{\text{طہ} + \text{عہ}}{۲} = ۰ \quad \text{اور جب } \frac{\text{طہ} - \text{عہ}}{۲} = ۰$$

اس لیئے لازماً $\frac{\text{طہ} + \text{عہ}}{۲} = \frac{\pi}{۲}$ کے کسی طاق ضعف کے

اور $\frac{\text{طہ} - \text{عہ}}{۲} = \pi$ کے کسی ضعف کے

یعنی طہ = - عہ + π کا کوئی طاق ضعف

اور طہ = عہ + π کا کوئی جفت ضعف

یعنی لازماً طہ = $(-۱)^{\text{ن}}$ عہ + ن π جہاں ن کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

کیونکہ جب ن طاق ہو تو جملہ عامہ سے جملہ (۱) حاصل ہوتا ہے اور جب ن جفت ہو تو جملہ (۲) حاصل ہوتا ہے

۱۰۹- اُن سب زاویوں کے لیئے جن کی ایک ہی جیب التمام ہو ایک قیمت عامہ دریافت کرو۔

اس صورت میں مساوات

جم طہ = جم عہ

یعنی جم طہ - جم عہ = ۰

یعنی ۲ جب $\frac{\text{طہ} + \text{عہ}}{2}$ جب $\frac{\text{طہ} - \text{عہ}}{2}$ = ۰ کو حل کرنا مطلوب ہے

شرائط مساوات مذکورہ

جب $\frac{\text{طہ} + \text{عہ}}{2}$ = ۰ سے اور جب $\frac{\text{طہ} - \text{عہ}}{2}$ = ۰ سے پوری ہوتی ہیں

اس سے ظاہر ہے کہ $\frac{\text{طہ} + \text{عہ}}{2}$ = π کے کسی ضعف کے

اور $\frac{\text{طہ} - \text{عہ}}{2}$ = π کے کسی ضعف کے

یعنی طہ = - عہ + ۲ π کا کوئی ضعف

اور طہ = عہ + ۲ π کا کوئی ضعف

دونوں نظام ان قیمتوں کے جملہ طہ = ۲ ن π ± عہ میں شامل ہیں جہاں ن کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے

۱۱۰ - اُن سب زاویوں کے لئے جو ایک ہی مماس معلوم رکھتے ہوں ایک جملہ عامہ دریافت کرو۔

اس صورت میں مساوات

مس طہ - مس عہ = ۰

یعنی جب طہ جم عہ - جم طہ جب عہ = ۰

یعنی جب (طہ - عہ) = ۰

کو حل کرنا مطلوب ہے۔

∴ طہ - عہ = π کے کسی ضعف کے

= ن π جہاں ن کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے

اس لئے مساوات کا عام سے عام حل ط = ن π + ع ہے

امثلہ نمبری ۱۶ (ا)

۱۔ دو حادّے زاوئے بناؤ جن کے مماس $\frac{۱}{۳}$ اور $\frac{۱}{۲}$ ہوں اور پیمائش سے تصدیق کرو کہ ان کا مجموعہ °۴۵ ہے

۲۔ دو حادّے زاویوں کے مماس بالترتیب ۳ اور ۲ ہیں، عمل ترسیمی سے ثابت کرو کہ ان کے تفاوت کا مماس $\frac{۱}{۷}$ ہے

۳۔ ایک حادّے زاوئے کی جیب ۶ء ہے اور ایک اور زاوئے کی جیب التمام ۵ء ہے، عمل ترسیمی سے، نیز حساب لگانے سے ثابت کرو کہ ان کے حاصل تفریق کی جیب قریب قریب ۳۹ء ہے

۴۔ ایک ایسا زاویہ بناؤ جس کی جیب التمام ۴ء ہو اور حساب اور پیمائش دونوں سے ثابت کرو کہ ایک ایسے زاوئے کی جیب اور جیب التمام جو زاویہ مذکورہ سے بقدر °۴۵ کے زیادہ ہو تقریباً ۹۳ء اور - ۳۶۵ء ہیں

۵۔ ایک زاویہ حادّہ بناؤ جس کا مماس ۷ ہو اور ایک اور زاویہ حادہ بناؤ جس کی جیب ۷ء ہو، حساب اور پیمائش دونوں سے ثابت کرو کہ ان کے تفاوت کی جیب قریب قریب ۶۱ء ہے۔

باب ہشتم

اضعافی اور کسری زاویوں کی مثلثی نسبتیں

۱۱۱ - زاویہ ۲ا کی مثلثی نسبتوں کو زاویہ ا کی نسبتوں کی رقوم میں دریافت کرو۔

اگر دفعہ ۹۴ کے ضابطوں میں ہم فرض کریں کہ ب = ا تو حاصل ہوگا

جب ۲ا = جب ا جم ا + جم ا جب ا = ۲ جب ا جم ا

جم ۲ا = جم ا جم ا - جب ا جب ا = جم^{2} ا - جب^{2} ا

= (۱ - جب^{2} ا) - جب^{2} ا = ۱ - ۲ جب^{2} ا

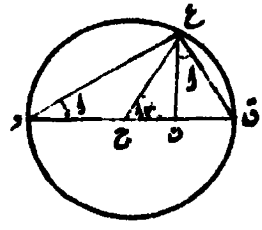
اور نیز = جم^{2} ا - (۱ - جم^{2} ا) = ۲ جم^{2} ا - ۱

اور مس ۲ا = (مس ا + مس ا) ÷ (۱ - مس ا مس ا) = ۲ مس ا ÷ (۱ - مس^{2} ا)

اب دفعہ ۹۴ کے ضابطے ا اور ب کی تمام قیمتوں کے لئے صحیح ہیں اس لئے جو صورتیں اُن سے مستنبط ہوتی ہیں وہ بھی زاویوں کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہیں اور بالخصوص مندرجہ بالا ضابطے ا کی تمام قیمتوں کے لئے

درست ہیں۔

۱۱۲۔ جب زاویہ ا قائمہ سے کم ہو تو دفعہ گزشتہ کے ضابطوں کا ہندسی ثبوت اس طرح بلا واسطہ حاصل ہوسکتا ہے۔



فرض کرو کہ ق ج ع زاویہ ۲ا کے برابر ہے، مرکز ج اور نصف قطر ج ع پر ایک دائرہ بناؤ اور فرض کرو کہ ق ج ممدودہ دائرہ مذکورہ کو نقطہ و پر ملتا ہے، وع اور ع ق کو ملاؤ اور وق پر عمود ع ن نکالو۔

بحکم اقلیدس م۳ ش ۲۰

زاویہ ی وع = ½ ∠ ق ج ع = ا

اور زاویہ ن ع ق = ∠ ق و ع = ا

اس لئے جب ۲ا = ن ع / ج ع = ۲ن ع / ۲ج ق = ۲ ن ع / و ق

= ۲ ن ع / و ع × و ع / و ق

= ۲ جب ن و ع جم ع و ق چونکہ و ع ق زاویہ قائمہ ہے

$$= \text{۲ جب ا جم ا}$$

نیز $$\text{جم ۲ا} = \frac{\text{ج ن}}{\text{ج ع}} = \frac{\text{۲ ج ن}}{\text{۲ ج ع}}$$

$$= \frac{\text{۲ ج ن}}{\text{و ق}} = \frac{(\text{و ج} + \text{ج ن}) - (\text{و ج} - \text{ج ن})}{\text{و ق}}$$

$$= \frac{\text{و ن} - \text{ن ق}}{\text{و ق}} = \frac{\text{و ن}}{\text{و ع}} \times \frac{\text{و ع}}{\text{و ق}} - \frac{\text{ن ق}}{\text{ع ق}} \times \frac{\text{ع ق}}{\text{و ق}}$$

$$= \text{جم}^2\text{ا} - \text{جب}^2\text{ا}$$

اور $$\text{مس ۲ا} = \frac{\text{ن ع}}{\text{ج ن}} = \frac{\text{۲ ن ع}}{\text{و ن} - \text{ن ق}}$$

$$= \frac{\frac{\text{۲ ن ع}}{\text{و ن}}}{\text{۱} - \frac{\text{ن ق}}{\text{ع ن}} \times \frac{\text{ع ن}}{\text{و ن}}}$$

$$= \frac{\text{۲ مس ا}}{\text{۱} - \text{مس}^2\text{ا}}$$

مثال- جب ۱۵° اور جم ۱۵° کی قیمتیں دریافت کرو

فرض کرو کہ زاویہ ۲ا برابر ۳۰° کے ہے یعنی ا = ۱۵°

نیز فرض کرو کہ نصف قطر دائرہ ج ع برابر ۲ر کے ہے اسلئے حاصل ہوگا

$$\text{ج ن} = \text{۲ر جم ۳۰°} = \text{ر}\sqrt{\text{۳}}$$

اور $$\text{ن ع} = \text{۲ر جب ۳۰°} = \text{ر}$$

اس لئے ون = وج + ج ن = ر(۲ + $\sqrt{}$۳)

اور ن ق = ج ق − ج ن = ر(۲ − $\sqrt{}$۳)

∴ وع^{2} = ون × وق = ر(۲ + $\sqrt{}$۳) × ۴ر (اقلیدس ۶ ش ۸)

یعنی وع = ر$\sqrt{}$۲ ($\sqrt{}$۳ + ۱)

اور عق^{2} = ق ن × ق و = ر(۲ − $\sqrt{}$۳) × ۴ ر

یعنی ع ق = ر$\sqrt{}$۲ ($\sqrt{}$۳ − ۱)

اس لئے جب ۱۵° = ع ق / و ق = ($\sqrt{}$۳ − ۱) $\sqrt{}$۲ / ۴ = ($\sqrt{}$۳ − ۱) / ۲$\sqrt{}$۲

اور جم ۱۵° = و ع / و ق = ($\sqrt{}$۳ + ۱) $\sqrt{}$۲ / ۴ = ($\sqrt{}$۳ + ۱) / ۲$\sqrt{}$۲

۱۱۳ — زاویہ ۳ا کی مثلثی نسبتوں کو زاویہ ا کی نسبتوں کی رقوم میں دریافت کرو۔

دفعہ ۹۴ میں ب کیجگہ ۲ا رکھنے سے حاصل ہوگا

جب ۳ا = جب (ا + ۲ا) = جب ا جم ۲ا + جم ا جب ۲ا

= جب ا (۱ − ۲ جب^{2} ا) + جم ا × ۲ جب ا جم ا [بموجب دفعہ ۱۱۱]

= جب ا (۱ − ۲ جب^{2} ا) + ۲ جب ا (۱ − جب^{2} ا)

اس لئے جب ۳ا = ۳ جب ا − ۴ جب^{3} ا .... (۱)

اسی طرح سے جم ۳ا = جم (ا + ۲ا) = جم ا جم ۲ا − جب ا جب ۲ا

= جم ا (۲ جم^{2} ا − ۱) − جب ا × ۲ جب ا جم ا

= جم ا (۲ جم^{2} ا − ۱) − ۲ جم ا (۱ − جم^{2} ا)

اس لئے $\text{جم}\,3\text{ا} = 4\,\text{جم}^3\text{ا} - 3\,\text{جم}\,\text{ا}$ .... (۲)

نیز $\text{مس}\,3\text{ا} = \text{مس}(\text{ا} + 2\text{ا}) = \dfrac{\text{مس}\,\text{ا} + \text{مس}\,2\text{ا}}{1 - \text{مس}\,\text{ا}\,\text{مس}\,2\text{ا}}$

$$= \dfrac{\text{مس}\,\text{ا} + \dfrac{2\,\text{مس}\,\text{ا}}{1 - \text{مس}^2\text{ا}}}{1 - \text{مس}\,\text{ا} \times \dfrac{2\,\text{مس}\,\text{ا}}{1 - \text{مس}^2\text{ا}}}$$

$$= \dfrac{\text{مس}\,\text{ا}(1 - \text{مس}^2\text{ا}) + 2\,\text{مس}\,\text{ا}}{(1 - \text{مس}^2\text{ا}) - 2\,\text{مس}^2\text{ا}}$$

اس لئے $\text{مس}\,3\text{ا} = \dfrac{3\,\text{مس}\,\text{ا} - \text{مس}^3\text{ا}}{1 - 3\,\text{مس}^2\text{ا}}$

[طالب علم کو شاید مندرجہ بالا ضابطوں (۱) اور (۲) کو یاد رکھنے میں دقت ہو، ان صورتوں میں کچھ مشابہت ہے مگر ترتیب علامات میں اختلاف ہے اگر کسی قسم کا شک ہو تو طالب علم کو ان ضابطوں کی خاص صورتوں کے لئے تصدیق کر لینی چاہیئے، مثلاً صورت (۱) میں فرض کرو کہ ا = ۹۰° اور (۲) میں ا = ۰°]

۱۱۴ - دفعہ گزشتہ کے موافق عمل کرنے سے طہ کے کسی اعلیٰ ضعف کی مثلثی نسبتیں طہ کی نسبتوں کی رقوم میں بیان ہو سکتی ہیں مگر یہ طریقہ طولانی اور پریشان کن ہوگا آگے چل کر آیندہ باب میں اس سے اچھی ترکیبیں دیجائیں گی۔

تمثیلاً فرض کرو کہ جم ۵ طہ کو جم طہ کی رقوم میں بیان کرنا مطلوب ہے

جم۵طہ = جم (۳طہ + ۲طہ)

= جم۳طہ جم۲طہ - جب۳طہ جب۲طہ

= (۴ جم^{۳}طہ - ۳ جم طہ)(۲جم^{۲}طہ - ۱)

- (۳جب طہ - ۴جب^{۳}طہ) × ۲جب طہ جم طہ

= (۸ جم^{۵}طہ - ۱۰جم^{۳}طہ + ۳ جم طہ)

- ۲ جم طہ × جب^{۲}طہ (۳ - ۴ جب^{۲} طہ)

= (۸جم^{۵}طہ - ۱۰جم^{۳}طہ + ۳ جم طہ)

- ۲جم طہ (۱ - جم^{۲}طہ)(۴ جم^{۲}طہ - ۱)

= (۸جم^{۵}طہ - ۱۰جم^{۳}طہ + ۳جم طہ)

- ۲جم طہ (۵جم^{۲}طہ - ۴جم^{۴}طہ - ۱)

= ۱۶جم^{۵}طہ - ۲۰جم^{۳}طہ + ۵ جم طہ

امثلہ نمبری ۱۷

۱- جب ۲عہ کی قیمت دریافت کرو جبکہ

(۱) جم عہ = $\frac{۳}{۵}$ (۲) جب عہ = $\frac{۱۲}{۱۳}$ اور (۳) مس عہ = $\frac{۱۶}{۶۳}$

۲- جم۲عہ کی قیمت دریافت کرو جبکہ

(۱) جم عہ = $\frac{۱۵}{۱۷}$ (۲) جب عہ = $\frac{۴}{۵}$ اور (۳) مس عہ = $\frac{۵}{۱۲}$،

ہر ایک صورت میں ترسیم اور صحیح پیمائش سے تصدیق کرو

۳- اگر مس طہ = $\frac{ب}{ا}$ تو ا جم۲طہ + ب جب۲طہ کی قیمت دریافت کرو

ثابت کرو کہ

۴۔ $\frac{\text{جب ۲ا}}{\text{۱ + جم ۲ا}} = \text{مس ا}$　　۵۔ $\frac{\text{جب ۲ا}}{\text{۱ − جم ۲ا}} = \text{مم ا}$

۶۔ $\frac{\text{۱ − جم ۲ا}}{\text{۱ + جم ۲ا}} = \text{مس}^{2}\text{ا}$　　۷۔ $\text{مس ا} + \text{مم ا} = \text{۲ قم ۲ا}$

۸۔ $\text{مس ا} - \text{مم ا} = -\text{۲ مم ۲ا}$　　۹۔ $\text{قم ۲ا} + \text{مم ۲ا} = \text{مم ا}$

۱۰۔ $\frac{\text{۱ − جم ا + جم ب − جم (ا + ب)}}{\text{۱ + جم ا − جم ب − جم (ا + ب)}} = \text{مس}\frac{\text{ا}}{\text{۲}}\,\text{مم}\frac{\text{ب}}{\text{۲}}$

۱۱۔ $\frac{\text{جم ا}}{\text{۱ ∓ جب ا}} = \text{مس}\left(\text{۴۵}^{\circ} \pm \frac{\text{ا}}{\text{۲}}\right)$

۱۲۔ $\frac{\text{قط ۸ا − ۱}}{\text{قط ۴ا − ۱}} = \frac{\text{مس ۸ا}}{\text{مس ۲ا}}$

۱۳۔ $\frac{\text{۱ + مس}^{2}\text{(۴۵}^{\circ}\text{ − ا)}}{\text{۱ − مس}^{2}\text{(۴۵}^{\circ}\text{ − ا)}} = \text{قم ۲ا}$

۱۴۔ $\frac{\text{جب عہ + جب بہ}}{\text{جب عہ − جب بہ}} = \frac{\text{مس}\frac{\text{عہ + بہ}}{\text{۲}}}{\text{مس}\frac{\text{عہ − بہ}}{\text{۲}}}$

۱۵۔ $\frac{\text{جب}^{2}\text{ا − جب}^{2}\text{ب}}{\text{جب ا جم ا − جب ب جم ب}} = \text{مس (ا + ب)}$

۱۶۔ $\text{مس}\left(\frac{\pi}{\text{۴}} + \text{طہ}\right) - \text{مس}\left(\frac{\pi}{\text{۴}} - \text{طہ}\right) = \text{۲ مس ۲طہ}$

۱۷۔ $\frac{\text{جم ا + جب ا}}{\text{جم ا − جب ا}} - \frac{\text{جم ا − جب ا}}{\text{جم ا + جب ا}} = \text{۲ مس ۲ا}$

۱۸۔ $\text{مم (ا + ۱۵}^{\circ}\text{)} - \text{مس (ا − ۱۵}^{\circ}\text{)} = \frac{\text{۴ جم ۲ا}}{\text{۱ + ۲ جب ۲ا}}$

۱۹- $\frac{\text{جب ط + جب ۲ط}}{\text{۱ + جم ط + جم ۲ط}} = \text{مس ط}$ ۲۰- $\frac{\text{۱ + جب ط − جم ط}}{\text{۱ + جب ط + جم ط}} = \text{مس}\ \frac{\text{ط}}{\text{۲}}$

۲۱- $\frac{\text{جب (ن + ۱) ا − جب (ن − ۱) ا}}{\text{جم (ن + ۱) ا + ۲ جم ن ا + جم (ن − ۱) ا}} = \text{مس}\ \frac{\text{ا}}{\text{۲}}$

۲۲- $\frac{\text{جب (ن + ۱) ا + ۲ جب ن ا + جب (ن − ۱) ا}}{\text{جم (ن − ۱) ا − جم (ن + ۱) ا}} = \text{مم}\ \frac{\text{ا}}{\text{۲}}$

۲۳- $\text{جب (۲ ن + ۱) ا جب ا = جب}^{۲}\text{(ن + ۱) ا − جب}^{۲}\text{ ن ا}$

۲۴- $\frac{\text{جب (ا + ۳ ب) + جب (۳ ا + ب)}}{\text{جب ۲ ا + جب ۲ ب}} = \text{۲ جم (ا + ب)}$

۲۵- $\text{جب ۳ ا + جب ۲ ا − جب ا = ۴ جب ا جم}\ \frac{\text{ا}}{\text{۲}}\ \text{جم}\ \frac{\text{۳ ا}}{\text{۲}}$

۲۶- $\text{مس ۲ ا = (قط ۲ ا + ۱)}\sqrt{\text{قط}^{۲}\text{ ا − ۱}}$

۲۷- $\text{جم}^{۳}\text{ ۲ ط + ۳ جم ۲ ط = ۴ (جم}^{۶}\text{ ط − جب}^{۶}\text{ ط)}$

۲۸- $\text{۱ + جم}^{۲}\text{ ۲ ط = ۲ (جم}^{۴}\text{ ط + جب}^{۴}\text{ ط)}$

۲۹- $\text{قط}^{۲}\text{ ا (۱ + قط ۲ ا) = ۲ قط ۲ ا}$

۳۰- $\text{قم ا − ۲ مم ۲ ا جم ا = ۲ جب ا}$

۳۱- $\text{مم ا} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\left(\text{مم}\ \frac{\text{ا}}{\text{۲}} - \text{مس}\ \frac{\text{ا}}{\text{۲}}\right)$

۳۲- $\text{جب عہ جب (۶۰° − عہ) جب (۶۰° + عہ)} = \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\ \text{جب ۳ عہ}$

۳۳- $\text{جم عہ جم (۶۰° − عہ) جم (۶۰° + عہ)} = \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\ \text{جم ۳ عہ}$

۳۴- $\text{مم عہ + مم (۶۰° + عہ) − مم (۶۰° − عہ) = ۳ مم ۳ عہ}$

۳۵- جم ۲۰° جم ۴۰° جم ۶۰° جم ۸۰° = $\frac{۱}{۱۶}$

۳۶- جب ۲۰° جب ۴۰° جب ۶۰° جب ۸۰° = $\frac{۳}{۱۶}$

۳۷- جم ۴ عہ = ۱ - ۸ جم^{۲} عہ + ۸ جم^{۴} عہ

۳۸- جب ۴ ا = ۴ جب ا جم^{۳} ا - ۴ جم ا جب^{۳} ا

۳۹- جم ۶ عہ = ۳۲ جم^{۶} عہ - ۴۸ جم^{۴} عہ + ۱۸ جم^{۲} عہ - ۱

۴۰- مس ۳ ا مس ۲ ا مس ا = مس ۳ ا - مس ۲ ا - مس ا

۴۱- $\frac{\text{۲ جم ۲}^{ن}\text{ طہ + ۱}}{\text{۲ جم طہ + ۱}}$ = (۲ جم طہ - ۱)(۲ جم ۲ طہ - ۱)(۲ جم ۲^{۲} طہ - ۱) .... (۲ جم ۲$^{ن-۱}$ طہ - ۱)

کسری زاوئے

۱۱۵- چونکہ دفعہ ۱۱۱ کے تعلقات ا کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہیں اس لئے اگر ہم ا کی بجائے $\frac{ا}{۲}$ اور اس لئے ۲ ا کی بجائے ۲ × $\frac{ا}{۲}$ یعنی ا رکھدیں تو بھی وہ درست رہینگے اس طرح سے ہمیں ذیل کے ارتباط حاصل ہونگے ۔

جب ا = ۲ جب $\frac{ا}{۲}$ جم $\frac{ا}{۲}$ .... (۱)

جم ا = جم^{۲} $\frac{ا}{۲}$ - جب^{۲} $\frac{ا}{۲}$

= ۲ جم^{۲} $\frac{ا}{۲}$ - ۱ = ۱ - ۲ جب^{۲} $\frac{ا}{۲}$ .... (۲)

اور مس ا = $\frac{\text{۲ مس } \frac{ا}{۲}}{\text{۱ - مس}^{۲} \frac{ا}{۲}}$ .... (۳)

(۱) سے نیز ہمیں حاصل ہوگا۔

$$\text{جب}\ ا = \frac{۲\ \text{جب}\ \frac{ا}{۲}\ \text{جم}\ \frac{ا}{۲}}{\text{جم}^{۲}\ \frac{ا}{۲} + \text{جب}^{۲}\ \frac{ا}{۲}}$$

$$= \frac{۲\ \text{مس}\ \frac{ا}{۲}}{۱ + \text{مس}^{۲}\ \frac{ا}{۲}}$$ شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو $\text{جم}^{۲}\ \frac{ا}{۲}$ پر تقسیم کرنے سے

اسی طرح سے $$\text{جم}\ ا = \frac{\text{جم}^{۲}\ \frac{ا}{۲} - \text{جب}^{۲}\ \frac{ا}{۲}}{\text{جم}^{۲}\ \frac{ا}{۲} + \text{جب}^{۲}\ \frac{ا}{۲}}$$

$$= \frac{۱ - \text{مس}^{۲}\ \frac{ا}{۲}}{۱ + \text{مس}^{۲}\ \frac{ا}{۲}}$$

۱۱۶- زاویہ $\frac{ا}{۲}$ کی مثلثی نسبتوں کو جم ا کی رقوم میں بیان کرو

دفعہ گزشتہ کی مساوات (۲) کے مطابق

$$\text{جم}\ ا = ۱ - ۲\ \text{جب}^{۲}\ \frac{ا}{۲}$$

یعنی $$۲\ \text{جب}^{۲}\ \frac{ا}{۲} = ۱ - \text{جم}\ ا$$

اور اس لئے $$\text{جب}\ \frac{ا}{۲} = \pm \sqrt{\frac{۱ - \text{جم}\ ا}{۲}} \quad \text{.........} \quad (۱)$$

نیز $$\text{جم}\ ا = ۲\ \text{جم}^{۲}\ \frac{ا}{۲} - ۱$$

یعنی $$۲\ \text{جم}^{۲}\ \frac{ا}{۲} = ۱ + \text{جم}\ ا$$

اور اس لئے $\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲} = \pm\sqrt{\frac{۱+\text{جم ا}}{۲}}$ .... (۲)

اسلئے $\text{مس}\,\frac{\text{ا}}{۲} = \frac{\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}}{\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲}} = \pm\sqrt{\frac{۱-\text{جم ا}}{۱+\text{جم ا}}}$ .... (۳)

۱۱۷۔ مندرجہ بالا ضابطوں میں سے ہر ایک میں ایک مشتبہ علامت ہے، کسی خاص صورت میں مناسب علامت اس طرح معلوم ہو سکتی ہے، دیکھو امثلہ ذیل

مثال ۱۔ معلوم ہے $\text{جم}\,۴۵^\circ = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$، $\text{جب}\,۲۲\tfrac{۱}{۲}^\circ$ اور $\text{جم}\,۲۲\tfrac{۱}{۲}^\circ$ کی قیمتیں دریافت کرو۔

اگر دفعہ گزشتہ کی مساوات (۱) میں ا برابر ۴۵° رکھیں تو حاصل ہوگا۔

$$\text{جب}\,۲۲\tfrac{۱}{۲}^\circ = \pm\sqrt{\frac{۱-\text{جم}\,۴۵^\circ}{۲}} = \pm\sqrt{\frac{۱-\frac{۱}{\sqrt{۲}}}{۲}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{۲-\sqrt{۲}}{۴}} = \pm\frac{۱}{۲}\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$$

اب $\text{جب}\,۲۲\tfrac{۱}{۲}^\circ$ لازماً مثبت ہے اس لئے اوپر کی علامت لینی چاہیئے

اس لئے $\text{جب}\,۲۲\tfrac{۱}{۲}^\circ = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$

اسی طرح سے $\text{جم}\,۲۲\tfrac{۱}{۲}^\circ = \pm\sqrt{\frac{۱+\text{جم}\,۴۵^\circ}{۲}} = \sqrt{\frac{۲+\sqrt{۲}}{۴}}$

$$= \pm\frac{۱}{۲}\sqrt{۲+\sqrt{۲}}$$

نیز $\text{جم}\,۲۲\tfrac{۱}{۲}^\circ$ مثبت ہے۔

$$\text{جم}\ 22\tfrac{1}{2}^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

مثال ۲۔ اگر جم ۳۳۰° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ تو جب ۱۶۵° اور جم ۱۶۵° کی قیمتیں دریافت کرو

مساوات (۱) سے حاصل ہوگا۔

$$\text{جب}\ 165^\circ = \pm\sqrt{\frac{1-\text{جم}\ 330^\circ}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{8}} = \pm\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{نیز}\quad \text{جم}\ 165^\circ = \pm\sqrt{\frac{1+\text{جم}\ 330^\circ}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{8}} = \pm\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

اب زاویہ ۱۶۵°، ۹۰° اور ۱۸۰° کے درمیاں واقع ہے یعنی بموجب دفعہ ۵۸ اس کی جیب مثبت ہے اور جیب التمام منفی

$$\text{اس لئے}\quad \text{جب}\ 165^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{اور}\quad \text{جم}\ 165^\circ = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

اوپر کی مثالوں سے ظاہر ہے کہ جب زاویہ ا اور اس کی جیب التمام دونوں معلوم ہوں تو زاویہ $\frac{ا}{2}$ کی مثلثی نسبتیں بغیر مشتبہ علامت کے معلوم ہوسکتی ہیں لیکن جب صرف جم ا معلوم ہوتو جب $\frac{ا}{2}$ اور جم $\frac{ا}{2}$ کو دریافت کرنے میں ہمیشہ مشتبہ علامات واقع ہوں گی، اس اشتباہ کی وجہ دفعہ ذیل میں مندرج ہے

۱۱۸- جب ہم جم $\frac{\text{ا}}{۲}$ اور جب $\frac{\text{ا}}{۲}$ کو جم ا کی رقوم میں
کرتے ہیں تو معلوم کرو کہ جواب میں مشتبہ علامت کیوں
ہوتی ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر ن کوئی صحیح عدد ہو تو

جم ا = جم (۲ ن π ± ا) = ک (فرض کرو)

اس لئے ظاہر ہے کہ جس ضابطے سے ہمکو جم $\frac{\text{ا}}{۲}$ کی قـ
ک کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے اُسی ضابطے سے $\frac{\text{۲ ن π}}{۲}$
کی جیب التمام بھی حاصل ہوگی۔

اب $$\text{جم}\ \frac{\text{۲ ن π ± ا}}{۲} = \text{جم}\left(\text{ن π} \pm \frac{\text{ا}}{۲}\right)$$

$$= \text{جم ن π جم}\ \frac{\text{ا}}{۲} \mp \text{جب ن π جب}\ \frac{\text{ا}}{۲}$$

$$= \text{جم ن π جم}\ \frac{\text{ا}}{۲} = \pm\ \text{جم}\ \frac{\text{ا}}{۲}$$

جہاں مثبت علامت لینی چاہئے اگر ن جفت ہو اور

اگر ن طاق ہو

اسی طرح جس ضابطے سے ہمکو جب $\frac{\text{ا}}{۲}$ کی قیمت ک کی
میں حاصل ہوتی ہے۔ اُسی صورت سے ضرور ہے کہ $\frac{\text{۲ ن}}{}$
کی جیب بھی حاصل ہو۔

نیز $$\text{جب}\ \frac{\text{۲ ن π ± ا}}{۲} = \text{جب}\left(\text{ن π} \pm \frac{\text{ا}}{۲}\right)$$

$$= \text{جب ن π جم}\ \frac{\text{ا}}{۲} \pm \text{جم ن π جب}\ \frac{\text{ا}}{۲}$$

$$= \pm \text{جم ن ۳۱ جب } \frac{ا}{۲} = \pm \text{ جب } \frac{ا}{۲}$$

پس معلوم ہوا کہ ہر ایک صورت میں ہمیں جم $\frac{ا}{۲}$ اور جب
کی دو قیمتیں ملنی چاہئیں اور یہی تعداد دفعہ ۱۱۶ کے ضا
سے حاصل ہوتی ہے۔

{طالب علم اس دفعہ کی ہندسی توضیح زوایا $\frac{۲ ن ۳۱ \pm ا}{۲}$ یعنی ن ۳۱
کو شکل میں کھینچنے سے کرسکتا ہے' ان زاویوں کو احاطہ کرنے والے خط
چار مقامات ہونگے ان میں سے دو مقام خط ابتدائی کی مثبت سمت
زاوئے $\frac{ا}{۲}$ اور $-\frac{ا}{۲}$ بنائیں گے اور دو مقام خط ابتدائی کی سمت منف
زاوئے $\frac{ا}{۲}$ اور $-\frac{ا}{۲}$ بنائیں گے، شکل سے ظاہر ہوگا کہ جم $\frac{ا}{۲}$ کی د
ہیں اور ایسے ہی جب $\frac{ا}{۲}$ کی دو قیمتیں ہیں}

۱۱۹۔ زاویہ $\frac{ا}{۲}$ کی مثلثی نسبتوں کو جب ا کی رقوم میں
بیان کرو۔

دفعہ ۱۱۵ کی مساوات (۱) سے

$$\text{۲ جب } \frac{ا}{۲} \text{ جم } \frac{ا}{۲} = \text{جب ا} \quad \text{.........} \; (\text{۱})$$

نیز

$$\text{جب}^۲ \frac{ا}{۲} + \text{جم}^۲ \frac{ا}{۲} = ۱ \quad \text{.........} \; (\text{۲})$$

سب سے اول ان مساواتوں کو جمع کرو اور پھر (۱) کو (۲)
سے تفریق کرو، تو حاصل ہوگا

$$\text{جب}^۲ \frac{ا}{۲} + \text{۲ جب } \frac{ا}{۲} \text{ جم } \frac{ا}{۲} + \text{جم}^۲ \frac{ا}{۲} = ۱ + \text{جب ا}$$

$$\text{اور} \quad \text{جب}^۲ \frac{ا}{۲} - \text{۲ جب } \frac{ا}{۲} \text{ جم } \frac{ا}{۲} + \text{جم}^۲ \frac{ا}{۲} = ۱ - \text{جب ا}$$

$$\text{یعنی} \quad \left(\text{جب } \frac{ا}{۲} + \text{جم } \frac{ا}{۲}\right)^۲ = ۱ + \text{جب ا}$$

اور (جب ا/۲ − جم ا/۲)^۲ = ۱ − جب ا

پس جب ا/۲ + جم ا/۲ = ± √(۱ + جب ا) .... (۳)

اور جب ا/۲ − جم ا/۲ = ± √(۱ − جب ا) .... (۴)

معادلات (۳) اور (۴) کو جمع کرنے اور تفریق کرنے سے

۲ جب ا/۲ = ± √(۱ + جب ا) ± √(۱ − جب ا) .. (۵)

اور ۲ جم ا/۲ = ± √(۱ + جب ا) ∓ √(۱ − جب ا) ... (۶)

زاویہ ا/۲ کی باقی مثلثی نسبتیں بآسانی حاصل ہو سکتی ہیں ۔

۱۲۰ ۔ ضوابط (۵) اور (۶) میں دو مشتبہ علامات ہیں ۔ امثلہ ذیل سے معلوم ہوگا کہ کسی خاص صورت میں یہ اشتباہ کس طرح دور ہو سکتا ہے ۔

مثال ۱ ۔ جب ۳۰° کی قیمت ½ معلوم ہے، جب ۱۵° اور جم ۱۵° کی قیمتیں دریافت کرو ۔

اگر ا = ۳۰° تو معادلات (۳) اور (۴) سے حاصل ہوگا ۔

جب ۱۵° + جم ۱۵° = ± √(۱ + جب ۳۰°) = ± √۳/√۲

جب ۱۵° − جم ۱۵° = ± √(۱ − جب ۳۰°) = ± ۱/√۲

اب چونکہ جب ۱۵° اور جم ۱۵° دونوں مثبت ہیں اور جم ۱۵° بہ نسبت جب ۱۵° کے بڑی ہے اس لئے جملات جب ۱۵° + جم ۱۵° اور جب ۱۵° − جم ۱۵° بالترتیب مثبت اور منفی ہیں اس لئے معلوم ہوا کہ

جب ۱۵° + جم ۱۵° = + √۳/√۲

اور $\text{جب } 15^\circ - \text{جم } 15^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

اس لئے $\text{جب } 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

اور $\text{جم } 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

مثال ۲۔ اگر جب ۵۷۰° = $-\frac{1}{2}$ تو جب ۲۸۵° اور جم ۲۸۵° کی قیمتیں دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ا = ۵۷۰° تو حاصل ہوگا

$$\text{جب } 285^\circ + \text{جم } 285^\circ = \pm\sqrt{1 + \text{جب } 570^\circ} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

اور
$$\text{جب } 285^\circ - \text{جم } 285^\circ = \pm\sqrt{1 - \text{جب } 570^\circ} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

شکل سے معلوم ہوگا کہ جب ۲۸۵° منفی ہے اور جم ۲۸۵° مثبت ہے، نیز زاویہ ۲۸۵° کی جیب تعداداً جیب التمام سے بڑی ہے اس لئے جملہ جب ۲۸۵° + جم ۲۸۵° منفی ہے اور جب ۲۸۵° - جم ۲۸۵° بھی منفی ہے

$$\therefore \text{جب } 285^\circ + \text{جم } 285^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

اور $\text{جب } 285^\circ - \text{جم } 285^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

اس لئے $\text{جب } 285^\circ = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

اور $\text{جم } 285^\circ = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

۱۲۱۔ جب ہم جم $\frac{ا}{۲}$ اور جب $\frac{ا}{۲}$ کو جب ا کی رقوم میں بیان کرتے ہیں تو معلوم کرو کہ جواب میں مشتبہ علامت کیوں واقع ہوتی ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر ن کوئی صحیح عدد ہو تو

$\text{جب}\{ن\,\pi + (-1)^{ن}\, ا\} = \text{جب } ا = ک$ (فرض کرو) ...... (دفعہ ۸۸)

اس سے ظاہر ہے کہ جس ضابطے سے ہمکو جب ا/۲ کی قیمت ک
کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے اُسی ضابطے سے (ن π + (-۱)^ن ا)/۲ کی
جیب کی قیمت بھی حاصل ہوگی

صورت اول۔ فرض کرو کہ ن جفت ہے اور ۲م کے برابر ہے تو جب (ن π + (-۱)^ن ا)/۲ = جب (م π + ا/۲)

= جب م π جم ا/۲ + جم م π جب ا/۲ = جم م π جب ا/۲

= ± جب ا/۲ جہاں علامت مثبت لینی چاہیئے اگر م جفت ہو

اور منفی اگر طاق ہو

صورت دوم۔ فرض کرو کہ ن طاق ہے اور = ۲ع + ۱ تب

جب (ن π + (-۱)^ن ا)/۲ = جب (۲ع π + π - ا)/۲

= جب {ع π + (π - ا)/۲}

= جب ع π جم (π - ا)/۲ + جم ع π جب (π - ا)/۲

= جم ع π جم ا/۲ = ± جم ا/۲ اس میں علامت مثبت لو اگر ع جفت ہو اور منفی اگر ع طاق ہو

پس معلوم ہوا کہ جس ضابطے سے ہمکو جب ا/۲ کی قیمت جب ا کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے اسی ضابطے سے علاوہ اس کے جب ا/۲، جم ا/۲، - جم ا/۲ کی قیمتیں یعنی کل چار قیمتیں حاصل ہونی چاہیئیں۔ اور ضوابط دفعہ ۱۱۹ میں مشتبہ علامات کے تمام مختلف اجتماع لینے سے قیمتوں کی یہی تعداد حاصل ہوتی ہے

اسی قسم کے عمل سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر جم $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$ کو جب ا کی رقوم میں دریافت کیا جائے تو چار قیمتیں حاصل ہونگی۔

[اگر ایک شکل ہندسیہ میں زاویے $\frac{\text{ن}\,\pi + (-1)^{\text{ن}}\,\text{ا}}{\text{۲}}$ یعنی ن $\frac{\pi}{\text{۲}} + (-1)^{\text{ن}} \frac{\text{ا}}{\text{۲}}$ اس صورت میں کھینچے جائیں جہاں $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$ زاویہ قائمہ سے کم ہو تو معلوم ہوگا کہ احاطہ کرنے والے خط کے چار مقامات ہیں؛ اُن میں سے دو ربع اول میں خط ابتدائی سے زاویے $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$ اور $\frac{\pi}{\text{۲}} - \frac{\text{ا}}{\text{۲}}$ بناتے ہیں اور دو ربع سوم میں خط ابتدائی کی منفی سمت سے زاویے $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$ اور $\frac{\pi}{\text{۲}} - \frac{\text{ا}}{\text{۲}}$ بناتے ہیں، شکل سے ظاہر ہوگا کہ ہمیں چار قیمتیں جب $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$ کی اور چار قیمتیں جم $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$ کی حاصل ہونی چاہئیں اور زاویہ $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$ کی باقی قیمتوں کی بھی یہی کیفیت ہے]

۱۲۲- کسی صورت عامہ میں ہم دفعہ ۱۱۹ کے ارتباطات (۳) اور (۴) کی مشتبہ علامات اس طرح دور کر سکتے ہیں۔

$$\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{\text{۲}} + \text{جم}\,\frac{\text{ا}}{\text{۲}} = \sqrt{\text{۲}}\left(\frac{1}{\sqrt{\text{۲}}}\,\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{\text{۲}} + \frac{1}{\sqrt{\text{۲}}}\,\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{\text{۲}}\right)$$

$$= \sqrt{\text{۲}}\left[\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{\text{۲}}\,\text{جم}\,\frac{\pi}{\text{۴}} + \text{جم}\,\frac{\text{ا}}{\text{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\pi}{\text{۴}}\right]$$

$$= \sqrt{\text{۲}}\,\text{جب}\left(\frac{\text{ا}}{\text{۲}} + \frac{\pi}{\text{۴}}\right)$$

اور $\sqrt{\text{۲}}$ جب $\left(\frac{\pi}{\text{۴}} + \frac{\text{ا}}{\text{۲}}\right)$ مثبت ہوگا اگر $\frac{\pi}{\text{۴}} + \frac{\text{ا}}{\text{۲}}$، ۲ ن π اور ۲ ن $\pi + \pi$ کے درمیان واقع ہو

یعنی اگر $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$، ۲ ن $\pi - \frac{\pi}{\text{۴}}$ اور ۲ ن $\pi + \frac{\text{۳}\pi}{\text{۴}}$ کے درمیان واقع ہو

اسلئے جملہ جب $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$ + جم $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$ مثبت ہوگا اگر زاویہ $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$

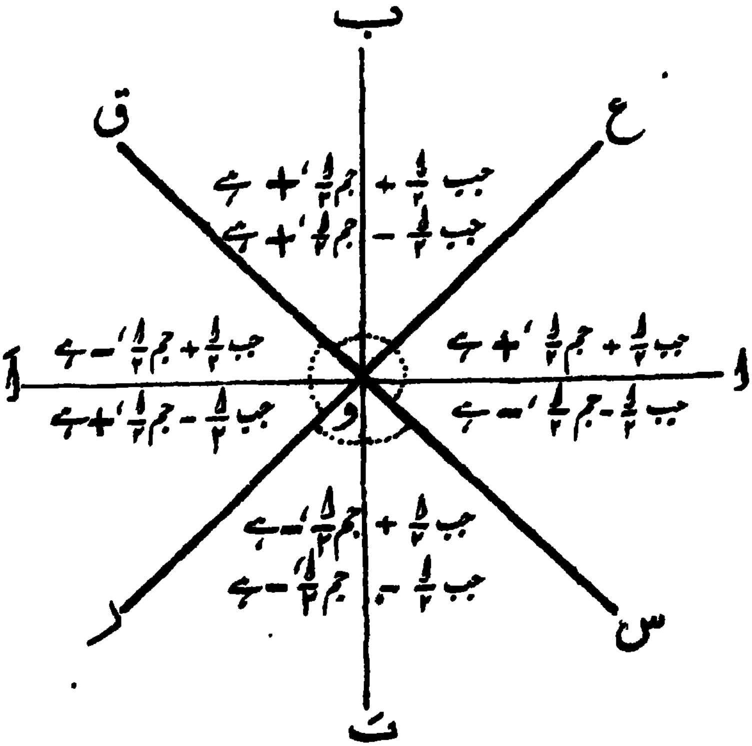
۲ ن π − $\frac{π}{۴}$ اور ۲ ن π + $\frac{۳π}{۴}$ کے درمیان واقع ہو ورنہ یہ منفی ہوگا۔

اور اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\text{جب}\ \frac{ا}{۲} - \text{جم}\ \frac{ا}{۲} = \sqrt{۲}\ \text{جب}\left(\frac{ا}{۲} - \frac{π}{۴}\right)$$

اس لئے جب $\frac{ا}{۲}$ − جم $\frac{ا}{۲}$ مثبت ہوگا اگر زاویہ $\left(\frac{ا}{۲} - \frac{π}{۴}\right)$، ۲ ن π اور ۲ ن π + π کے درمیان واقع ہو، یعنی اگر زاویہ $\frac{ا}{۲}$، ۲ ن π + $\frac{π}{۴}$ اور ۲ ن π + $\frac{۵π}{۴}$ کے درمیان واقع ہو ورنہ یہ منفی ہوگا

اس دفعہ کے نتائج کی توضیح ترسیمی طور پر شکل ذیل میں کی گئی ہے



و ا خط ابتدائی ہے اور خطوط وع، وق، ود، وس بالترتیب ربع اول، دوم، سوم، چہارم کے زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔

مثال عددی۔ اگر ۲ جب ا/۲ = ± √(۱ + جب ا) ± √(۱ − جب ا) تو دریافت کرو کہ زاویہ ا/۲ کو کن حدود کے درمیان واقع ہونا چاہیئے۔

اس صورت میں دفعہ ۱۱۹ کے ضابطے لازماً یہ ہونے چاہئیں۔

جب ا/۲ + جم ا/۲ = ± √(۱ + جب ا) ....(۱)

جب ا/۲ − جم ا/۲ = ± √(۱ − جب ا) ....(۲)

کیونکہ ان دونوں ضابطوں کو جمع کرنے سے ضابطہ معلومہ حاصل ہوتا ہے مساوات (۱) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ جو خط زاویہ ا/۲ کا احاطہ کرتا ہے اسکو خطوط وق اور ود کے درمیان یا ود اور وس کے درمیان واقع ہونا چاہیئے اور مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ خط دائر کو خطوط ود اور وس یا وس اور وع کے درمیان واقع ہونا چاہیئے۔

اور یہ دونوں شرائط پوری ہوتی ہیں جب خط دائر ود اور وس کے درمیان واقع ہو یعنی جب زاویہ ا/۲،

۲ن π − ۳π/۴ اور ۲ن π − π/۴ کے درمیان واقع ہو

۱۲۳۔ زاویہ ا/۲ کی مثلثی نسبتوں کو مس ا کی رقوم میں بیان کرو۔

مساوات (۳) دفعہ ۱۱۵ سے

$$مس\ ا = \frac{۲\ مس\ \frac{ا}{۲}}{۱ - مس^{۲}\ \frac{ا}{۲}}$$

$$\therefore \quad ۱ - \text{مس}^۲\,\frac{\text{ا}}{۲} = \frac{۲}{\text{مس ا}}\,\text{مس}\,\frac{\text{ا}}{۲}$$

یعنی $$\text{مس}^۲\,\frac{\text{ا}}{۲} + \frac{۲}{\text{مس ا}}\,\text{مس}\,\frac{\text{ا}}{۲} = ۱$$

طرفین پر $\frac{۱}{\text{مس}^۲\,\text{ا}}$ زیادہ کرنے سے حاصل ہوگا

$$\text{مس}^۲\,\frac{\text{ا}}{۲} + \frac{۲}{\text{مس ا}}\,\text{مس}\,\frac{\text{ا}}{۲} + \frac{۱}{\text{مس}^۲\,\text{ا}} = ۱ + \frac{۱}{\text{مس}^۲\,\text{ا}} = \frac{۱ + \text{مس}^۲\,\text{ا}}{\text{مس}^۲\,\text{ا}}$$

$$\therefore \quad \text{مس}\,\frac{\text{ا}}{۲} + \frac{۱}{\text{مس ا}} = \pm \frac{\sqrt{۱ + \text{مس}^۲\,\text{ا}}}{\text{مس ا}}$$

$$\therefore \quad \text{مس}\,\frac{\text{ا}}{۲} = \frac{\pm\sqrt{۱ + \text{مس}^۲\,\text{ا}} - ۱}{\text{مس ا}} \quad \cdots\cdots \ (۱)$$

۱۲۴۔ مساوات (۱) کی مشتبہ علامت صرف اُس صورت میں دور ہوسکتی ہے جب ہمیں ا کی مقدار کے متعلق کچھ معلوم ہو۔

مثال۔ اگر مس ۱۵° = ۲ − $\sqrt{۳}$ تو مس $۷\frac{۱}{۲}$° دریافت کرو

دفعہ گزشتہ کی مساوات (۱) فرض کرو کہ ا = ۱۵°

$$\text{مس}\,۷\tfrac{۱}{۲}^\circ = \frac{\pm\sqrt{۱ + (۲ - \sqrt{۳})^۲} - ۱}{۲ - \sqrt{۳}}$$

$$= \frac{\pm\sqrt{۸ - ۴\sqrt{۳}} - ۱}{۲ - \sqrt{۳}} \quad \cdots\cdots \ (۱)$$

اب چونکہ مس $۷\frac{۱}{۲}$° مثبت ہے اسلئے ہمیں اوپر کی علامت لینی چاہیئے۔

اس لئے $$\text{مس}\,۷\tfrac{۱}{۲}^\circ = \frac{+(\sqrt{۶} - \sqrt{۲}) - ۱}{۲ - \sqrt{۳}}$$

$$= (\sqrt{۶} - \sqrt{۲} - ۱)(۲ + \sqrt{۳})$$

$$= \sqrt{۶} - \sqrt{۳} + \sqrt{۲} - ۲ = (\sqrt{۳} - \sqrt{۲})(\sqrt{۲} - ۱)$$

چونکہ مس ۱۵° = مس ۱۹۵° اس لئے جس مساوات سے ہمکو مس $\frac{۱۵^\circ}{۲}$ کی قیمت مس ۱۵° کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے اُسی مساوات سے ہمکو مس $\frac{۱۹۵^\circ}{۲}$ کی قیمت مس ۱۹۵° کی رقوم میں حاصل ہونے کی توقع رکھنی چاہیئے۔ دراصل جو قیمت مساوات (۱) میں علامت جذر کے ماقبل منفی علامت لینے سے حاصل ہوتی ہے وہ مس $\frac{۱۹۵^\circ}{۲}$ کی قیمت ہے

$$\text{لہذا مس } \frac{۱۹۵^\circ}{۲} = \frac{-\sqrt{۸ - ۴\sqrt{۳}} - ۱}{۲ - \sqrt{۳}}$$

$$= \frac{-(\sqrt{۶} - \sqrt{۲}) - ۱}{۲ - \sqrt{۳}} = (-\sqrt{۶} + \sqrt{۲} - ۱)(۲ + \sqrt{۳})$$

$$= -(\sqrt{۳} + \sqrt{۲})(\sqrt{۲} + ۱)$$

$$\text{اس لئے } -\text{مم } ۷\tfrac{۱}{۲}^\circ = \text{مس } ۹۷\tfrac{۱}{۲}^\circ$$

$$= -(\sqrt{۳} + \sqrt{۲})(\sqrt{۲} + ۱)$$

۱۲۵ - اس امر کی تحقیق کرو کہ جب ہم مس $\frac{ا}{۲}$ کو مس ا کی رقوم میں دریافت کرتے ہیں تو جواب میں مشتبہ علامت کیوں واقع ہوتی ہے؟

دفعہ ۹۰ سے ہمکو معلوم ہے کہ اگر ن کوئی عدد صحیح ہو تو

$$\text{مس } (ن\pi + ا) = \text{مس } ا = ک \quad \text{(فرض کرو)}$$

اُس سے معلوم ہوا کہ جس مساوات سے ہمکو مس $\frac{ا}{۲}$ کی قیمت ک کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے اُسی مساوات سے

مس $\frac{\text{ن}\pi + \text{ا}}{۲}$ کی قیمت بھی حاصل ہونی چاہیئے۔

صورت اول۔ فرض کرو کہ ن جفت ہے اور ۲م کے برابر ہے۔

$$\text{تب مس}\ \frac{\text{ن}\pi + \text{ا}}{۲} = \text{مس}\ \frac{۲\text{م}\pi + \text{ا}}{۲}$$

$$= \text{مس}\left(\text{م}\pi + \frac{\text{ا}}{۲}\right) = \text{مس}\ \frac{\text{ا}}{۲}\ \text{بموجب دفعہ ۹۰}$$

صورت دوم۔ فرض کرو کہ ن طاق ہے اور = ۲ع + ۱

$$\text{تب مس}\ \frac{\text{ن}\pi + \text{ا}}{۲} = \text{مس}\ \frac{(۲\text{ع}+۱)\pi + \text{ا}}{۲}$$

$$= \text{مس}\left(\text{ع}\pi + \frac{\pi + \text{ا}}{۲}\right) = \text{مس}\ \frac{\pi + \text{ا}}{۲}\ (\text{دفعہ ۹۰})$$

$$= -\text{مم}\ \frac{\text{ا}}{۲}\qquad (\text{دفعہ ۷۶})$$

اس سے معلوم ہوا کہ جس ضابطے سے ہمکو مس $\frac{\text{ا}}{۲}$ کی قیمت حاصل ہوگی اُسی ضابطے سے ـ مم $\frac{\text{ا}}{۲}$ کی قیمت بھی حاصل ہونی چاہیئے۔

اس کی توضیح دفعہ گزشتہ کی ایک مثال میں ہوچکی ہے۔

امثلہ نمبری ۱۸

۱۔ اگر جب طہ = $\frac{۱}{۲}$ اور جب فہ = $\frac{۱}{۳}$ تو جب (طہ + فہ) اور جب (۲طہ + ۲فہ) کی قیمتیں دریافت کرو۔

۲۔ کسی زاویہ کا ماس ۲٫۴ ہے، اس کا قاطع التمام، اس کے نصف زاویہ کا قاطع التمام اور اس کے دوچند زاویہ کے تکملہ کا قاطع التمام دریافت کرو۔

۳۔ اگر جم عہ $= \frac{۱۱}{۶۱}$ اور جیب بہ $= \frac{۴}{۵}$ تو جب$^{۲}\,\frac{\text{عہ}-\text{بہ}}{۲}$ اور جم$^{۲}\,\frac{\text{عہ}+\text{بہ}}{۲}$ کی قیمتیں دریافت کرو، دونوں زاویے عہ اور بہ مثبت اور حادّے ہیں۔

۴۔ اگر جم عہ $= \frac{۳}{۵}$ اور جم بہ $= \frac{۴}{۵}$ تو جم $\frac{\text{عہ}-\text{بہ}}{۲}$ کی قیمت دریافت کرو دونوں زاویے عہ اور بہ مثبت اور حادّے ہیں۔

۵۔ معلوم ہے قط طہ $= ۱\frac{۱}{۴}$، دریافت کرو مس $\frac{\text{طہ}}{۲}$ اور مس طہ، ترسیمی عمل سے اس کی تصدیق کرو

۶۔ اگر جم ا = ۲۸٫ تو مس $\frac{\text{ا}}{۲}$ کی قیمت دریافت کرو اور جواب میں مشتبہ علامت کی وجہ بیان کرو۔

۷۔ مفصلہ ذیل کی قیمتیں دریافت کرو۔ (۱) جب $۷\frac{۱}{۲}°$ (۲) جم $۷\frac{۱}{۲}°$ (۳) مس $۲۲\frac{۱}{۲}°$ (۴) مس $۱۱\frac{۱}{۴}°$

۸۔ اگر جب طہ + جب فہ = ا اور جم طہ + جم فہ = ب تو مس $\frac{\text{طہ}-\text{فہ}}{۲}$ کی قیمت دریافت کرو۔

ثابت کرو کہ

۹۔ $(\text{جم عہ} + \text{جم بہ})^{۲} + (\text{جب عہ} - \text{جب بہ})^{۲} = ۴\,\text{جم}^{۲}\,\frac{\text{عہ}+\text{بہ}}{۲}$

۱۰۔ $(\text{جم عہ} + \text{جم بہ})^{۲} + (\text{جب عہ} + \text{جب بہ})^{۲} = ۴\,\text{جم}^{۲}\,\frac{\text{عہ}-\text{بہ}}{۲}$

۱۱۔ $(\text{جم عہ} - \text{جم بہ})^{۲} + (\text{جب عہ} - \text{جب بہ})^{۲} = ۴\,\text{جب}^{۲}\,\frac{\text{عہ}-\text{بہ}}{۲}$

۱۲۔ $\text{جب ا} = \frac{۲\,\text{مس}\,\frac{\text{ا}}{۲}}{۱ + \text{مس}^{۲}\,\frac{\text{ا}}{۲}}$ ۱۳۔ $\text{جم ا} = \frac{۱ - \text{مس}^{۲}\,\frac{\text{ا}}{۲}}{۱ + \text{مس}^{۲}\,\frac{\text{ا}}{۲}}$

۱۴۔ $\text{قط}\left(\frac{\pi}{۴} + \text{طہ}\right)\,\text{قط}\left(\frac{\pi}{۴} - \text{طہ}\right) = ۲\,\text{قط}\,۲\,\text{طہ}$

۱۵۔ $\text{مس}\left(۴۵° + \frac{\text{ا}}{۲}\right) = \sqrt{\frac{۱ + \text{جب ا}}{۱ - \text{جب ا}}} = \text{قط ا} + \text{مس ا}$

۱۶- جب² (π/۸ + ا/۲) - جب² (π/۸ - ا/۲) = ۱/√۲ جب ا

۱۷- جم² عہ + جم² (عہ + ۱۲۰°) + جم² (عہ - ۱۲۰°) = ۳/۲

۱۸- جم⁴ π/۸ + جم⁴ ۳π/۸ + جم⁴ ۵π/۸ + جم⁴ ۷π/۸ = ۳/۲

۱۹- جب⁴ π/۸ + جب⁴ ۳π/۸ + جب⁴ ۵π/۸ + جب⁴ ۷π/۸ = ۳/۲

۲۰- جم ۲طہ جم ۲فہ + جب² (طہ - فہ) - جب² (طہ + فہ) = جب (۲طہ + ۲فہ)

۲۱- مس (۴ا + مس ۲ا) (۱ - مس² ۳ا مس² ا) = ۲ مس ۳ا قط² ا

۲۲- (۱ + مس عہ/۲ - قط عہ/۲) (۱ + مس عہ/۲ + قط عہ/۲) = جب عہ قط² عہ/۲

ذیل کی تین صورتوں میں علامات جذر کے ماقبل جو مناسب علامات جبریہ لکھی جانی چاہئیں انہیں دریافت کرو۔

۲۳- ۲ جم ا/۲ = ± √(۱ - جب ا) ± √(۱ + جب ا) جہاں ا/۲ = ۲۷۸°

۲۴- ۲ جب ا/۲ = ± √(۱ - جب ا) ± √(۱ + جب ا) جہاں ا/۲ = ۱۹π/۱۱

۲۵- ۲ جم ا/۲ = ± √(۱ - جب ا) ± √(۱ + جب ا) جہاں ا/۲ = -۱۴۰°

۲۶- اگر ا = ۳۴۰° تو ثابت کرو کہ

۲ جب ا/۲ = - √(۱ + جب ا) + √(۱ - جب ا)

اور ۲ جم ا/۲ = - √(۱ + جب ا) - √(۱ - جب ا)

۲۷- اگر ا = ۴۶۰° تو ثابت کرو کہ

۲ جم ا/۲ = - √(۱ + جب ا) + √(۱ - جب ا)

۲۸۔ اگر ا = ۵۸۰° تو ثابت کرو کہ

$$۲ \text{ جب } \frac{ا}{۲} = -\sqrt{۱ + \text{جب } ا} - \sqrt{۱ - \text{جب } ا}$$

۲۹۔ کن حدود کے درمیان $\frac{ا}{۲}$ کو واقع ہونا چاہیئے کہ

$$(۱)\quad ۲ \text{ جب } \frac{ا}{۲} = \sqrt{۱ + \text{جب } ا} + \sqrt{۱ - \text{جب } ا}$$

$$(۲)\quad ۲ \text{ جب } \frac{ا}{۲} = -\sqrt{۱ + \text{جب } ا} + \sqrt{۱ - \text{جب } ا}$$

$$(۳)\quad ۲ \text{ جب } \frac{ا}{۲} = +\sqrt{۱ + \text{جب } ا} - \sqrt{۱ - \text{جب } ا}$$

اور

$$(۴)\quad ۲ \text{ جم } \frac{ا}{۲} = \sqrt{۱ + \text{جب } ا} - \sqrt{۱ - \text{جب } ا}$$

۳۰۔ کن حدود کے درمیان $\frac{ا}{۲}$ کو واقع ہونا چاہیئے کہ ضابطہ

$$۲ \text{ جم } \frac{ا}{۲} = \pm\sqrt{۱ + \text{جب } ا} \pm \sqrt{۱ - \text{جب } ا}$$

میں (۱) دونوں علامات مثبت لیجا سکیں

(۲) دونوں علامات منفی لیجا سکیں

(۳) پہلی علامت منفی ہو اور دوسری مثبت

۳۱۔ اگر ن کوئی عدد صحیح ہو اور کوئی زاویہ $۲\text{ن}\pi - \frac{۳\pi}{۴}$ اور $۲\text{ن}\pi + \frac{\pi}{۴}$ کے درمیان واقع ہو تو ثابت کرو کہ اس کی جیب از روئے الجبرا جیب التمام سے کم ہوگی۔

۳۲۔ اگر جب $\frac{ا}{۳}$ کی قیمت مساوات

$$\text{جب } ا = ۳ \text{ جب } \frac{ا}{۳} - ۴ \text{ جب}^{۳} \frac{ا}{۳}$$

سے دریافت کی جائے تو ثابت کرو کہ اس کے علاوہ اسی مساوات سے ہمکو جب $\frac{\pi - ا}{۳}$ اور − جب $\frac{\pi + ا}{۳}$ کی قیمتیں حاصل کرنے کی توقع رکھنی چاہیئے

ہندسی طریق سے اس کی توضیح کرو۔

۴۳۔ اگر جم $\frac{ا}{۳}$ کی قیمت مساوات

$$جم ا = ۴ جم^۳ \frac{ا}{۳} - ۳ جم \frac{ا}{۳}$$

سے دریافت کی جائے تو ثابت کرو کہ علاوہ اس کے اُسی مساوات سے ہمکو

جم $\frac{۲ ؔط - ا}{۳}$ اور جم $\frac{۲ ؔط + ا}{۳}$ کی قیمتیں حاصل کرنے کی توقع رکھنی چاہیئے۔

ہندسی طریق سے اس کی توضیح کرو

۱۲۶۔ اس باب کے ضابطوں کے استعمال سے اب ہم چند مشہور زاویوں کی مثلثی نسبتیں دریافت کر سکتے ہیں۔

زاویہ ۱۸° کی مثلثی نسبتیں دریافت کرو

فرض کرو کہ طہ = ۱۸° پس ۲ طہ = ۳۶° اور ۳ طہ = ۵۴°

نیز ۲ طہ = ۹۰° - ۳ طہ

اس لئے جب ۲ طہ = جب (۹۰° - ۳ طہ) = جم ۳ طہ

∴ ۲ جب طہ جم طہ = ۴ جم^۳ طہ - ۳ جم طہ (دفعات ۱۱۱ اور ۱۱۳)

اس سے معلوم ہوا کہ جم طہ = ۰ جس سے طہ = ۹۰°

یا ۲ جب طہ = ۴ جم^۲ طہ - ۳ = ۱ - ۴ جب^۲ طہ

∴ ۴ جب^۲ طہ + ۲ جب طہ = ۱

اس مساوات درجہ دوم کو حل کرنے سے حاصل ہوگا

$$جب طہ = \frac{\pm \sqrt{۵} - ۱}{۴}$$

مگر اس صورت میں جب طہ لازماً ایک مثبت مقدار ہے
اس لئے ہمکو مثبت علامت لینی چاہیئے - پس

$$\text{جب}\ ۱۸^\circ = \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۴}$$

اور $$\text{جم}\ ۱۸^\circ = \sqrt{۱ - \text{جب}^{۲}\ ۱۸^\circ} = \sqrt{۱ - \frac{۶ - ۲\sqrt{۵}}{۱۶}}$$

$$= \sqrt{\frac{۱۰ + ۲\sqrt{۵}}{۱۶}} = \frac{\sqrt{۱۰ + ۲\sqrt{۵}}}{۴}$$

اب زاویہ ۱۸° کی باقی مثلثی نسبتیں بآسانی معلوم ہو سکتی ہیں
چونکہ زاویہ ۱۸° کا متمم ۷۲° ہے اسلئے زاویہ ۷۲° کی مثلثی نسبتیں
دفعہ ۷۵ کی اعانت سے بآسانی معلوم ہو سکتی ہیں -

۱۲۷ - زاویہ ۳۶° کی مثلثی نسبتیں دریافت کرو-

چونکہ $\text{جم}\ ۲\ \text{طہ} = ۱ - ۲\ \text{جب}^{۲}\ \text{طہ}$　　(دفعہ ۱۱۱)

$$\therefore \text{جم}\ ۳۶^\circ = ۱ - ۲\ \text{جب}^{۲}\ ۱۸^\circ = ۱ - ۲\left(\frac{۶ - ۲\sqrt{۵}}{۱۶}\right) = ۱ - \frac{۳ - \sqrt{۵}}{۴}$$

پس $$\text{جم}\ ۳۶^\circ = \frac{\sqrt{۵} + ۱}{۴}$$

اس لئے $$\text{جب}\ ۳۶^\circ = \sqrt{۱ - \text{جم}^{۲}\ ۳۶^\circ} = \sqrt{۱ - \frac{۶ + ۲\sqrt{۵}}{۱۶}} = \frac{\sqrt{۱۰ - ۲\sqrt{۵}}}{۴}$$

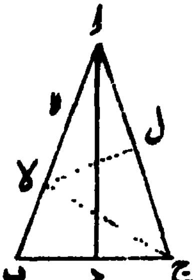
اب زاویہ ۳۶° کی باقی مثلثی نسبتیں معلوم ہو سکتی ہیں
نیز چونکہ زاویہ ۳۶° کا متمم ۵۴° ہے اس لئے ۵۴° کی مثلثی نسبتیں
بھی دفعہ ۷۵ کی مدد سے بآسانی معلوم ہو سکتی ہیں -

۱۲۸ - جب ۱۸° اور جم ۳۶° کی قیمتیں بطریق ہندسیہ اس طرح

حاصل ہوسکتی ہیں۔

بموجب اقلیدس م۶ ش ۱۰ ایک مثلث ا ب ج بناؤ یعنی مثلث کے زاویوں ب اور ج میں سے ہر ایک زاویہ ا کا دوچند ہو۔ تب

۱۸۰° = ا + ب + ج = ا + ۲ا + ۲ا



اس لئے ا = ۳۶°

پس اگر ب ج پر عمود ا د نکالا جائے تو

∠ ب ا د = ۱۸°

اب اقلیدس کے عمل سے ہم جانتے ہیں کہ ب ج برابر ا لا کے ہے جہاں لا ایسا نقطہ ا ب پر ہے کہ

$$\text{ا ب} \times \text{ب لا} = (\text{ا لا})^2$$

فرض کرو کہ ا ب = ما اور ا لا = لا

اوپر کے ربط سے حاصل ہوگا

$$\text{ما}\,(\text{ما} - \text{لا}) = \text{لا}^2$$

یعنی $\text{لا}^2 + \text{ما لا} = \text{ما}^2$

یعنی $\text{لا} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\,\text{ما}$

اس لئے $\text{جب } 18^\circ = \text{جب ب ا د} = \frac{\text{ب د}}{\text{ب ا}} = \frac{1}{2} \times \frac{\text{ب ج}}{\text{ب ا}}$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\text{لا}}{\text{ما}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

نیز بموجب اقلیدس م۶ ش ۱۰، ا لا اور لا ج باہم مساوی ہیں۔

اس لیئے اگر اج پر عمود لال نکالا جائے تو اج کی تنصیف نقطہ ل پر ہوگی۔

اس لیئے جم ۳۶° = ال/الا = م/۲ ÷ لا = ۱/(√۵ − ۱)

= (√۵ − ۱)/((√۵ − ۱)(√۵ + ۱)) = (√۵ − ۱)/۴

۱۲۹۔ زاویہ ۹° کی مثلثی نسبتیں دریافت کرو

چونکہ جب ۹° اور جم ۹° دونوں مثبت ہیں اسلیئے ربط (۳) دفعہ ۱۱۹ سے حاصل ہوگا۔

جب ۹° + جم ۹° = √(۱ + جب ۱۸°)

= √(۱ + (√۵ − ۱)/۴) = √(۳ + √۵)/۲ .... (۱)

نیز چونکہ جم ۹° مقدار میں جب ۹° سے بڑا ہے (دفعہ ۵۹) اسلیئے جملہ جب ۹° − جم ۹° منفی ہے لہذا ربط ۴ دفعہ (۱۱۹) سے حاصل ہوگا

جب ۹° − جم ۹° = − √(۱ − جب ۱۸°)

= − √(۱ − (√۵ − ۱)/۴)

= − √(۵ − √۵)/۲ .... (۲)

(۱) اور (۲) کو جمع کرنے سے

جب ۹° = (√(۳ + √۵) − √(۵ − √۵))/۴

نیز (۲) کو (۱) سے تفریق کرنے سے

$$\text{جم}\ ۹^\circ = \frac{\sqrt{۳+\sqrt{۵}} + \sqrt{۵-\sqrt{۵}}}{۴}$$

اب زاویہ ۹° کے باقی جملے دریافت ہو سکتے ہیں
نیز چونکہ ۸۱° زاویہ ۹° کا متمم ہے اسلئے دفعہ ۷۵ کی مدد سے ۸۱° کی مثلثی نسبتیں معلوم ہو سکتی ہیں۔

امثلہ نمبری ۱۹

ثابت کرو کہ

۱۔ $\text{جب}^۲\ ۷۲^\circ - \text{جب}^۲\ ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۸}$

۲۔ $\text{جم}^۲\ ۴۸^\circ - \text{جب}^۲\ ۱۲^\circ = \frac{\sqrt{۵}+۱}{۸}$

۳۔ $\text{جم}\ ۱۲^\circ + \text{جم}\ ۶۰^\circ + \text{جم}\ ۸۴^\circ = \text{جم}\ ۲۴^\circ + \text{جم}\ ۴۸^\circ$ عمل ترسیمی سے اس کی تصدیق کرو۔

۴۔ $\text{جب}\frac{\pi}{۵}\ \text{جب}\frac{۲\pi}{۵}\ \text{جب}\frac{۳\pi}{۵}\ \text{جب}\frac{۴\pi}{۵} = \frac{۵}{۱۶}$

۵۔ $\text{جب}\frac{\pi}{۱۰} + \text{جب}\frac{۱۳\pi}{۱۰} = -\frac{۱}{۲}$

۶۔ $\text{جب}\frac{\pi}{۱۰}\ \text{جب}\frac{۱۳\pi}{۱۰} = -\frac{۱}{۴}$

۷۔ $\text{مس}\ ۶^\circ\ \text{مس}\ ۴۲^\circ\ \text{مس}\ ۶۶^\circ\ \text{مس}\ ۷۸^\circ = ۱$

۸۔ $\text{جم}\frac{\pi}{۱۵}\ \text{جم}\frac{۲\pi}{۱۵}\ \text{جم}\frac{۳\pi}{۱۵}\ \text{جم}\frac{۴\pi}{۱۵}\ \text{جم}\frac{۵\pi}{۱۵}\ \text{جم}\frac{۶\pi}{۱۵}\ \text{جم}\frac{۷\pi}{۱۵} = \frac{۱}{۲^۷}$

۹۔ $۱۶\ \text{جم}\frac{۲\pi}{۱۵}\ \text{جم}\frac{۴\pi}{۱۵}\ \text{جم}\frac{۸\pi}{۱۵}\ \text{جم}\frac{۱۴\pi}{۱۵} = ۱$

۱۰- ایک دائرہ کے دو متوازی وتر مرکز کی ایک ہی جانب میں واقع ہیں اور اُن کے محاذی دائرہ کے مرکز پر زاویے ۷۲° اور ۱۴۴° بالترتیب بنتے ہیں، ثابت کرو کہ وتروں کے درمیان عمودی فاصلہ دائرہ کے نصف قطر کے برابر ہے۔

۱۱- ثابت کرو کہ کسی دائرہ کا ایک وتر جس کے محاذی ۱۰۸° کا زاویہ مرکز پر بنتا ہے دو ایسے وترون کے مجموعہ کے برابر ہوگا جن کے مقابل مرکز پر زاویے ۳۶° اور ۶۰° بنتے ہیں۔

۱۲- ایک ایسا زاویہ بناؤ جس کی جیب التمام اُس کے ظل کے برابر ہو۔

۱۳- مساوات ذیل کو حل کرو۔

جب ۵ طہ جم ۳ طہ = جب ۹ طہ جم ۷ طہ

باب نہم

متماثلات اور مثلثی معادلات

۱۳۰- ضوابط دفعہ ۹۴ اور ۹۶ کی مدد سے دو سے زیادہ زاویوں کے حاصل جمع کی مثلثی نسبتیں حاصل ہوسکتی ہیں، مثلاً

جب (ا + ب + ج) = جب (ا + ب) جم ج + جم (ا + ب) جب ج

= (جب ا جم ب + جم ا جب ب) جم ج

+ (جم ا جم ب - جب ا جب ب) جب ج

= جب ا جم ب جم ج + جم ا جب ب جم ج

+ جم ا جم ب جب ج - جب ا جب ب جب ج

اسی طرح سے

جم (ا + ب + ج) = جم (ا + ب) جم ج - جب (ا + ب) جب ج

= (جم ا جم ب - جب ا جب ب) جم ج

- (جب ا جم ب + جم ا جب ب) جب ج

= جم ا جم ب جم ج - جم ا جب ب جب ج - جب ا جم ب جب ج

- جب ا جب ب جم ج

نیز مس (ا + ب + ج) = مس (ا + ب) + مس ج / ا - مس (ا + ب) مس ج

$$= \frac{\dfrac{\text{مس ا} + \text{مس ب}}{\text{۱} - \text{مس ا مس ب}} + \text{مس ج}}{\text{۱} - \dfrac{\text{مس ا} + \text{مس ب}}{\text{۱} - \text{مس ا مس ب}} \times \text{مس ج}}$$

$$= \frac{\text{مس ا} + \text{مس ب} + \text{مس ج} - \text{مس ا مس ب مس ج}}{\text{۱} - \text{مس ب مس ج} - \text{مس ج مس ا} - \text{مس ا مس ب}}$$

۱۳۱ دفعہ گزشتہ کا آخری ضابطہ ایک ایسے مسئلہ عامہ کی خاص صورت ہے جس کی مدد سے زاویوں کی کسی تعداد کے مجموعہ کا مماس خود اُن زاویوں کے مماسوں کی رقوم میں دریافت ہو سکتا ہے مسئلہ مذکورہ یہ ہے

$$\text{مس}\left(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 + \cdots + \text{ا}_n\right)$$

$$= \frac{\text{ص}_1 - \text{ص}_3 + \text{ص}_5 - \text{ص}_7 + \cdots}{\text{۱} - \text{ص}_2 + \text{ص}_4 - \text{ص}_6 + \cdots} \quad \cdots\cdots (\text{۱})$$

جہاں $\text{ص}_1 = \text{مس ا}_1 + \text{مس ا}_2 + \text{مس ا}_3 + \cdots + \text{مس ا}_n$

= مختلف زاویوں کے مماسوں کا مجموعہ

$\text{ص}_2 = \text{مس ا}_1 \text{مس ا}_2 + \text{مس ا}_1 \text{مس ا}_3 + \cdots\cdots$

= دو دو مماسوں کے حاصل ضرب کا مجموعہ

$\text{ص}_3 = \text{مس ا}_1 \text{مس ا}_2 \text{مس ا}_3 + \text{مس ا}_1 \text{مس ا}_2 \text{مس ا}_4 + \cdots\cdots$

= تین تین مماسوں کے حاصل ضرب کا مجموعہ

اور علیٰ ہذا القیاس

مان لو کہ ن زاویوں کے لئے ربط (۱) درست ہے۔

ایک اور زاویہ $\text{ا}_{\text{ن}+1}$ کا اضافہ کرو

تب $\text{مس}\left(\text{ا}_1+\text{ا}_2+\text{ا}_3+\cdots\cdots+\text{ا}_{\text{ن}+1}\right)$

$$=\text{مس}\left[\left(\text{ا}_1+\text{ا}_2+\text{ا}_3+\cdots\cdots+\text{ا}_\text{ن}\right)+\text{ا}_{\text{ن}+1}\right]$$

$$=\frac{\text{مس}\left(\text{ا}_1+\text{ا}_2+\text{ا}_3+\cdots\cdots+\text{ا}_\text{ن}\right)+\text{مس}\,\text{ا}_{\text{ن}+1}}{1-\text{مس}\left(\text{ا}_1+\text{ا}_2+\text{ا}_3+\cdots\cdots+\text{ا}_\text{ن}\right)\times\text{مس}\,\text{ا}_{\text{ن}+1}}$$

$$=\frac{\dfrac{\text{ص}_1-\text{ص}_3+\text{ص}_5-\text{ص}_7+\cdots\cdots}{1-\text{ص}_2+\text{ص}_4-\cdots\cdots}+\text{مس}\,\text{ا}_{\text{ن}+1}}{1-\dfrac{\text{ص}_1-\text{ص}_3+\text{ص}_5-\text{ص}_7+\cdots}{1-\text{ص}_2+\text{ص}_4-\cdots\cdots}\,\text{مس}\,\text{ا}_{\text{ن}+1}}$$

فرض کرو کہ $\text{مس}\,\text{ا}_1$، $\text{مس}\,\text{ا}_2$، $\text{مس}\,\text{ا}_3$ ..... $\text{مس}\,\text{ا}_{\text{ن}+1}$ کو ہم بالترتیب م_1، م_2، م_3 ..... $\text{م}_{\text{ن}+1}$ سے تعبیر کرتے ہیں

تب $\text{مس}\left(\text{ا}_1+\text{ا}_2+\text{ا}_3+\cdots\cdots+\text{ا}_{\text{ن}+1}\right)$

$$=\frac{\left(\text{ص}_1-\text{ص}_3+\text{ص}_5-\cdots\cdots\right)+\text{م}_{\text{ن}+1}\left(1-\text{ص}_2+\text{ص}_4-\cdots\cdots\right)}{\left(1-\text{ص}_2+\text{ص}_4-\cdots\cdots\right)-\left(\text{ص}_1-\text{ص}_3+\text{ص}_5-\cdots\cdots\right)\text{م}_{\text{ن}+1}}$$

$$=\frac{\left(\text{ص}_1+\text{م}_{\text{ن}+1}\right)-\left(\text{ص}_3+\text{ص}_2\text{م}_{\text{ن}+1}\right)+\left(\text{ص}_5+\text{ص}_4\text{م}_{\text{ن}+1}\right)+\cdots}{1-\left(\text{ص}_2+\text{ص}_1\text{م}_{\text{ن}+1}\right)+\left(\text{ص}_4+\text{ص}_3\text{م}_{\text{ن}+1}\right)-\left(\text{ص}_6+\text{ص}_5\text{م}_{\text{ن}+1}\right)\cdots}$$

لیکن $\text{ص}_1 + \text{م}_{\text{ن}+1} = (\text{م}_1 + \text{م}_2 + \text{م}_3 + \cdots\cdots + \text{م}_\text{ن}) + \text{م}_{\text{ن}+1}$

= (ن + ۱) مماسوں کا مجموعہ

$\text{ص}_2 + \text{ص}_1 \text{م}_{\text{ن}+1} = (\text{م}_1\text{م}_2 + \text{م}_2\text{م}_3 + \cdots\cdots) + (\text{م}_1 + \text{م}_2 + \text{م}_3 + \cdots)\text{م}_{\text{ن}+1}$

= (ن + ۱) مماسوں میں سے دو دو کے حاصل ضرب کا مجموعہ

$\text{ص}_3 + \text{ص}_2 \text{م}_{\text{ن}+1} = (\text{م}_1\text{م}_2\text{م}_3 + \text{م}_2\text{م}_3\text{م}_4 + \cdots) + (\text{م}_1\text{م}_2 + \text{م}_2\text{م}_3 + \cdots) \times \text{م}_{\text{ن}+1}$

= (ن + ۱) مماسوں میں سے تین تین کے حاصل ضرب کا مجموعہ

اور علیٰ ہذا القیاس

اس سے معلوم ہوا کہ (ن + ۱) زاویوں کے لئے بھی وہی قانون درست ہے جو ن زاویوں کے لئے ہے، اس لئے اگر مسئلہ ن زاویوں کے لئے صحیح ہو تو یہ (ن + ۱) زاویوں کے لئے بھی صحیح ہوتا ہے لیکن بموجب دفعات ۱۰۴ اور ۱۳۰ یہ ۲ اور ۳ زاویوں کے لئے صحیح ہے، اس لئے یہ ۴ زاویوں کے لئے صحیح ہے، اس لئے ۵ زاویوں کے لئے، ....

اس لئے ثابت ہوا کہ یہ بالعموم صحیح ہے،

نتیجہ صریح — اگر کل زاویئے تعداد میں ن ہوں اور ان میں سے ہر ایک ط کے برابر ہو تو

$\text{ص}_1 = \text{ن} \times \text{مس ط}،\ \text{ص}_2 = {}^{\text{ن}}\text{ج}_2\ \text{مس}^2\text{ط}،\ \text{ص}_3 = {}^{\text{ن}}\text{ج}_3\ \text{مس}^3\text{ط} \cdots\cdots$

مثال — مس ۴ط کی قیمت دریافت کرو۔

یہاں $\text{مس } 4\text{ط} = \dfrac{\text{ص}_1 - \text{ص}_3}{1 - \text{ص}_2 + \text{ص}_4}$

$= \dfrac{4\,\text{مس ط} - {}^{4}\text{ج}_3\ \text{مس}^3\text{ط}}{1 - {}^{4}\text{ج}_2\ \text{مس}^2\text{ط} + {}^{4}\text{ج}_4\ \text{مس}^4\text{ط}}$

= (۴ مس ط − ۴ مس^{3} ط) ÷ (۱ − ۶ مس^{2} ط + مس^{4} ط)

مثال۔ ثابت کرو کہ مس ۵ط = (۵ مس ط − ۱۰ مس^{3} ط + مس^{5} ط) ÷ (۱ − ۱۰ مس^{2} ط + ۵ مس^{4} ط)

۱۳۲۔ ترکیب دفعہ گذشتہ کے موافق ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

جب (ا$_{1}$ + ا$_{2}$ + ا$_{3}$ + ... + ا$_{n}$)

= جم ا$_{1}$ جم ا$_{2}$ جم ا$_{3}$ ...... جم ا$_{n}$ (ص$_{1}$ − ص$_{3}$ + ص$_{5}$ − ...)

اور جم (ا$_{1}$ + ا$_{2}$ + ا$_{3}$ + ... + ا$_{n}$)

= جم ا$_{1}$ جم ا$_{2}$ جم ا$_{3}$ ...... جم ا$_{n}$ (۱ − ص$_{2}$ + ص$_{4}$ ......)

جہاں ص$_{1}$، ص$_{2}$، ص$_{3}$، ...... کی وہی قیمتیں ہیں جو دفعہ گذشتہ میں بیان ہوئیں۔

۱۳۳۔ مثلث کے زاویوں کی مثلثی نسبتوں کے باہمی ارتباطات

جب تین زاوئے ا، ب، ج ایسے ہوں کہ ان کا مجموعہ ۱۸۰° ہو تو ان کی مثلثی نسبتوں کے کئی ایک باہمی تعلقات بآسانی حاصل ہو سکتے ہیں ترکیب ثبوت کی توضیح امثلہ ذیل سے ہوگی۔

مثال ۱۔ اگر ا + ب + ج = ۱۸۰° تو ثابت کرو کہ

جب ۲ا + جب ۲ب + جب ۲ج = ۴ جب ا جب ب جب ج

اور جب ۲ا + جب ۲ب + جب ۲ج

= ۲ جب (ا + ب) جم (ا − ب) + ۲ جب ج جم ج

اب چونکہ ا + ب + ج = ۱۸۰°

اِس لئے ا + ب = ۱۸۰° - ج

اور اِس لئے جب (ا + ب) = جب ج

اور جم (ا + ب) = - جم ج ...... (دفعہ ۷۶)

اس لئے جملہ = ۲ جب ج جم (ا - ب) + ۲ جب ج جم ج

= ۲ جب ج [جم (ا - ب) + جم ج]

= ۲ جب ج [جم (ا - ب) - جم (ا + ب)]

= ۲ جب ج × ۲ جب ا جب ب

= ۴ جب ا جب ب جب ج

مثال ۲ ـ اگر ا + ب + ج = ۱۸۰° تو ثابت کرو کہ

جم ا + جم ب - جم ج = -۱ + ۴ جم ا/۲ جم ب/۲ جب ج/۲

جملہ = جم ا + (جم ب - جم ج)

= ۲ جم² ا/۲ - ۱ + ۲ جب (ب + ج)/۲ جب (ج - ب)/۲

اب ب + ج = ۱۸۰° - ا

یعنی (ب + ج)/۲ = ۹۰° - ا/۲

اور اس لئے جب (ب + ج)/۲ = جم ا/۲

اور جم (ب + ج)/۲ = جب ا/۲

اس لئے جملہ = ۲ جم² ا/۲ - ۱ + ۲ جم ا/۲ جب (ج - ب)/۲

$$= ۲\,\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲}\left[\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲} + \text{جب}\,\frac{\text{ج} - \text{ب}}{۲}\right] - ۱$$

$$= ۲\,\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲}\left(\text{جب}\,\frac{\text{ب} + \text{ج}}{۲} + \text{جب}\,\frac{\text{ج} - \text{ب}}{۲}\right) - ۱$$

$$= ۲\,\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲} \times ۲\,\text{جب}\,\frac{\text{ج}}{۲}\,\text{جم}\,\frac{\text{ب}}{۲} - ۱$$

$$= -۱ + ۴\,\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲}\,\text{جم}\,\frac{\text{ب}}{۲}\,\text{جب}\,\frac{\text{ج}}{۲}$$

مثال ۳ — اگر $\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} = ۱۸۰^\circ$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب}^۲\,\text{ا} + \text{جب}^۲\,\text{ب} + \text{جب}^۲\,\text{ج} = ۲ + ۲\,\text{جم}\,\text{ا}\,\text{جم}\,\text{ب}\,\text{جم}\,\text{ج}$$

فرض کرو کہ $\text{ص} = \text{جب}^۲\,\text{ا} + \text{جب}^۲\,\text{ب} + \text{جب}^۲\,\text{ج}$

تب $۲\,\text{ص} = ۲\,\text{جب}^۲\,\text{ا} + ۱ - \text{جم}\,۲\text{ب} + ۱ - \text{جم}\,۲\text{ج}$

$$= ۲\,\text{جب}^۲\,\text{ا} + ۲ - ۲\,\text{جم}\,(\text{ب} + \text{ج})\,\text{جم}\,(\text{ب} - \text{ج})$$

$$= ۲ - ۲\,\text{جم}^۲\,\text{ا} + ۲ - ۲\,\text{جم}\,(\text{ب} + \text{ج})\,\text{جم}\,(\text{ب} - \text{ج})$$

اس لئے $\text{ص} = ۲ + \text{جم}\,\text{ا}\left[\text{جم}\,(\text{ب} - \text{ج}) + \text{جم}\,(\text{ب} + \text{ج})\right]$

چونکہ $\text{جم}\,\text{ا} = \text{جم}\left[۱۸۰^\circ - (\text{ب} + \text{ج})\right] = -\text{جم}\,(\text{ب} + \text{ج})$

$$\therefore\ \text{ص} = ۲ + \text{جم}\,\text{ا} \times ۲\,\text{جم}\,\text{ب}\,\text{جم}\,\text{ج}$$

$$= ۲ + ۲\,\text{جم}\,\text{ا}\,\text{جم}\,\text{ب}\,\text{جم}\,\text{ج}$$

مثال ۴ — اگر $\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} = ۱۸۰^\circ$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس}\,\text{ا} + \text{مس}\,\text{ب} + \text{مس}\,\text{ج} = \text{مس}\,\text{ا}\,\text{مس}\,\text{ب}\,\text{مس}\,\text{ج}$$

بموجب دفعہ ۱۳۰ ضابطہ تین میں

مس (ا + ب + ج) = (مس ا + مس ب + مس ج − مس ا مس ب مس ج) / (۱ − (مس ب مس ج + مس ج مس ا + مس ا مس ب))

لیکن مس (ا + ب + ج) = مس ۱۸۰° = ۰

اسلئے مس ا + مس ب + مس ج − مس ا مس ب مس ج = ۰

یعنی مس ا + مس ب + مس ج = مس ا مس ب مس ج

اس کو براہ راست اس طرح بھی ثابت کرسکتے ہیں

مس (ا + ب) = مس (۱۸۰° − ج) = − مس ج

∴ (مس ا + مس ب) / (۱ − مس ا مس ب) = − مس ج

∴ مس ا + مس ب = − مس ج + مس ا مس ب مس ج

یعنی مس ا + مس ب + مس ج = مس ا مس ب مس ج

مثال ۵ — اگر لا + ما + ی = لا ما ی تو ثابت کرو کہ

۲لا / (۱ − لا²) + ۲ما / (۱ − ما²) + ۲ی / (۱ − ی²) = ۲لا / (۱ − لا²) × ۲ما / (۱ − ما²) × ۲ی / (۱ − ی²)

فرض کرو کہ لا = مس ا، ما = مس ب اور ی = مس ج

تو حاصل ہوگا

مس ا + مس ب + مس ج = مس ا مس ب مس ج

∴ (مس ا + مس ب) / (۱ − مس ا مس ب) = − مس ج

یعنی مس (ا + ب) = مس (π − ج) ....(دفعہ ۷۸)

اسلئے ا + ب + ج = ن π + π

∴ ۲لا/(۱-لا²) + ۲ما/(۱-ما²) + ۲ی/(۱-ی²) = ۲مس ا/(۱-مس²ا) + ۲مس ب/(۱-مس²ب) + ۲مس ج/(۱-مس²ج)

= مس ۲ا + مس ۲ب + مس ۲ج = مس ۲ا مس ۲ب مس ۲ج

(اسی قسم کے عمل سے جو آخری مثال میں ہوا)

= ۲لا/(۱-لا²) × ۲ما/(۱-ما²) × ۲ی/(۱-ی²)

اشتلہ نمبری ۲۰

اگر ا+ب+ج = ۱۸۰° تو ثابت کرو کہ

۱ — جب ۲ا + ۱ جب ۲ب - جب ۲ج = ۴ جم ا جم ب جب ج

۲ — جم ۲ا + جم ۲ب + جم ۲ج = –۱–۴ جم ا جم ب جم ج

۳ — جم ۲ا + جم ۲ب - جم ۲ج = ۱–۴ جب ا جب ب جم ج

۴ — جب ا + جب ب + جب ج = ۴ جم ا/۲ جم ب/۲ جم ج/۲

۵ — جب ا + جب ب - جب ج = ۴ جب ا/۲ جب ب/۲ جم ج/۲

۶ — جم ا + جم ب + جم ج = ۱ + ۴ جب ا/۲ جب ب/۲ جب ج/۲

۷ — جب²ا + جب²ب - جب²ج = ۲ جب ا جب ب جم ج

۸ — جم²ا + جم²ب + جم²ج = ۱ - ۲ جم ا جم ب جم ج

۹ — جم²ا + جم²ب - جم²ج = ۱ - ۲ جب ا جب ب جم ج

۱۰ — جب² ا/۲ + جب² ب/۲ + جب² ج/۲ = ۱-۲ جب ا/۲ جب ب/۲ جب ج/۲

۱۱— جب² ا/۲ + جب² ب/۲ − جب² ج/۲ = ۱ − ۲ جم ا/۲ جم ب/۲ جب ج/۲

۱۲— مس ا/۲ مس ب/۲ + مس ب/۲ مس ج/۲ + مس ج/۲ مس ا/۲ = ۱

۱۳— مم ا/۲ مم ب/۲ + مم ج/۲ = مم ا/۲ مم ب/۲ مم ج/۲

۱۴— مم ب مم ج + مم ج مم ا + مم ا مم ب = ۱

۱۵— جب (ب + ۲ج) + جب (ج + ۲ا) + جب (ا + ۲ب)

= ۴ جب (ب − ج)/۲ جب (ج − ا)/۲ جب (ا − ب)/۲

۱۶— جب ا/۲ + جب ب/۲ + جب ج/۲ − ۱ = ۴ جب (π − ا)/۴ جب (π − ب)/۴ جب (π − ج)/۴

۱۷— جم ا/۲ + جم ب/۲ − جم ج/۲ = ۴ جم (π + ا)/۴ جم (π + ب)/۴ جم (π − ج)/۴

۱۸— (جب ۲ا + جب ۲ب + جب ۲ج)/(جب ا + جب ب + جب ج) = ۸ جب ا/۲ جب ب/۲ جب ج/۲

۱۹— جب (ب + ج − ا) + جب (ج + ا − ب) + جب (ا + ب − ج)

= ۴ جب ا جب ب جب ج

اگر ا + ب + ج = ۲ص تو ثابت کرو کہ

۲۰— جب (ص − ا) جب (ص − ب) + جب ص جب (ص − ج) = جب ا جب ب

۲۱— ۴ جب ص جب (ص − ا) جب (ص − ب) جب (ص − ج)

= ۱ − جم² ا − جم² ب − جم² ج + ۲ جم ا جم ب جم ج

۲۲— جب (ص − ا) + جب (ص − ب) + جب (ص − ج) − جب ص

= ۴ جب ا/۲ جب ب/۲ جب ج/۲

۲۳۔ جم² ص + جم² (ص - ا) + جم² (ص - ب) + جم² (ص - ج)
= ۲ + ۲ جم ا جم ب جم ج

۲۴۔ جم² ا + جم² ب + جم² ج + ۲ جم ا جم ب جم ج
= ۱ + ۴ جم ص جم (ص - ا) جم (ص - ب) جم (ص - ج)

۲۵۔ اگر عہ + بہ + جہ + لہ = ۲ π تو ثابت کرو کہ
(۱) جم عہ + جم بہ + جم جہ + جم لہ + ۴ جم (عہ + بہ)/۲ جم (عہ + جہ)/۲ جم (عہ + لہ)/۲ = ۰
(۲) جب عہ - جب بہ + جب جہ - جب لہ + ۴ جم (عہ + بہ)/۲ جب (عہ + جہ)/۲ جم (عہ + لہ)/۲ = ۰
اور (۳) مس عہ + مس بہ + مس جہ + مس لہ
= مس عہ مس بہ مس جہ مس لہ (مم عہ + مم بہ + مم جہ + مم لہ)

۲۶۔ اگر چار زاویوں کا مجموعہ ۱۸۰° ہو تو ثابت کرو کہ ان کی جیوب التمام میں سے دو دو کے حاصل ضرب کا مجموعہ ان کی جیوب میں سے دو دو کے حاصل ضرب کے مجموعہ کے برابر ہوگا۔

۲۷۔ اگر عہ + بہ + جہ = ۰ تو ثابت کرو کہ
جب ۲ عہ + جب ۲ بہ + جب ۲ جہ
= ۲ (جب عہ + جب بہ + جب جہ) (۱ + جم عہ + جم بہ + جم جہ)

۲۸۔ اس کی تصدیق کرو کہ
جب³ ا جب (ب - ج) + جب³ ب جب (ج - ا) + جب³ ج جب (ا - ب)
+ جب (ا + ب + ج) جب (ب - ج) جب (ج - ا) جب (ا - ب) = ۰

اگر ا، ب، ج، د کوئی زاویے ہوں تو ثابت کرو کہ
۲۹۔ جب ا جب ب جب (ا - ب) + جب ب جب ج جب (ب - ج)
+ جب ج جب ا جب (ج - ا) + جب (ا - ب) جب (ب - ج) جب (ج - ا) = ۰

۳۰۔ جب(ا - ب) جم(ا + ب) + جب(ب - ج) جم(ب + ج)

+ جب(ج - د) جم(ج + د) + جب(د - ا) جم(د + ا) = ۰

۳۱۔ جب(ا + ب - ۲ج) جم ب - جب(ا + ج - ۲ب) جم ج

= جب(ب - ج) {جم(ب + ج - ا) + جم(ج + ا - ب) + جم(ا + ب - ج)}

۳۲۔ جب(ا + ب + ج + د) + جب(ا + ب - ج - د) + جب(ا + ب - ج + د)

+ جب(ا + ب + ج - د) = ۴ جب(ا + ب) جم ج جم د

۳۳۔ اگر کوئی مسئلہ ا، ب، ج کی ایسی قیمتوں کے لئے درست ہو جو مساوات ا + ب + ج = ۱۸۰° کو پورا کریں تو ثابت کرو کہ مسئلہ مذکورہ ا، ب، ج کی جگہ مقادیر ذیل کو مندرج کرنے سے بھی درست رہے گا۔

(۱) ۹۰° - ا/۲ ، ۹۰° - ب/۲ اور ۹۰° - ج/۲

(۲) ۱۸۰° - ۲ا ، ۱۸۰° - ۲ب اور ۱۸۰° - ۲ج

اس طرح مثال ۱۶ کو مثال ۶ سے اور مثال ۱۷ کو مثال ۵ سے مستنبط کرو۔

اگر لا + ما + ی = لا ما ی تو ثابت کرو کہ

۳۴۔ (۳لا - لا³)/(۱ - ۳لا²) + (۳ما - ما³)/(۱ - ۳ما²) + (۳ی - ی³)/(۱ - ۳ی²)

= (۳لا - لا³)/(۱ - ۳لا²) × (۳ما - ما³)/(۱ - ۳ما²) × (۳ی - ی³)/(۱ - ۳ی²)

۳۵۔ اور لا(۱ - ما²)(۱ - ی²) + ما(۱ - ی²)(۱ - لا²) + ی(۱ - لا²)(۱ - ما²) = ۴ لا ما ی

۱۳۴۔ زاویوں کے مسائل جمع و تفریق کی مدد سے خاص قسم کی مثلثی معادلات حل ہو سکتی ہیں

مثال۔ مساوات ذیل کو حل کرو

جب لا + جب ۵ لا = جب ۳ لا

بموجب ضابطہ دفعہ ۱۰۰ یہ مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

۲ جب ۳ لا جم ۲ لا = جب ۳ لا

∴ جب ۳ لا = ۰ یا ۲ جم ۲ لا = ۱

اگر جب ۳ لا = ۰ تو ۳ لا = ن π

اگر جم ۲ لا = $\frac{1}{2}$ تو ۲ لا = ۲ ن $\pi \pm \frac{\pi}{3}$

اس لئے لا = $\frac{\text{ن}\,\pi}{3}$ یا ن $\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۱۳۵ - جن معادلات کی صورت عامہ ا جم طہ + ب جب طہ = ج ہو' ان کا حل عام دریافت کرو۔

طرفین مساوات کو $\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}$ پر تقسیم کرو اور مساوات کو اس طرح لکھو

$$\frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}\ \text{جم طہ} + \frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}\ \text{جب طہ} = \frac{\text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}$$

مماسات کی جدول سے اُس زاویئے کی قیمت دریافت کرو جس کا مماس $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ ہو اور اس کو عہ سے تعبیر کرو

تب مس عہ = $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ اور

جب عہ = $\frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}$ اور جم عہ = $\frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}$

مساوات بصورت ذیل بھی لکھی جاسکتی ہے

$$\text{جم عہ جم طہ} + \text{جب عہ جب طہ} = \frac{\text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}$$

یعنی $\text{جم}\,(\text{طہ} - \text{عہ}) = \frac{\text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}$

اس کے بعد جدولوں سے یا کسی اور طرح سے زاویہ بہ دریافت کرو
جس کی جیب التمام $\frac{ج}{\sqrt{ا^۲ + ب^۲}}$ ہو یعنی جم بہ = $\frac{ج}{\sqrt{ا^۲ + ب^۲}}$

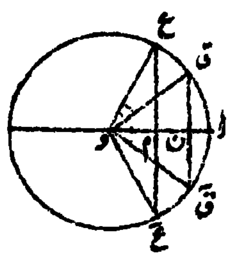
[یاد رہے کہ زاویہ بہ صرف اسی صورت میں معلوم ہو سکتا ہے جبکہ ج $\not>$ $\sqrt{ا^۲ + ب^۲}$]

اس طرح سے مساوات مجوزہ جم(طہ - عہ) = جم بہ ہوگی

اور اس کا حل ہے طہ - عہ = ۲ ن π ± بہ

یعنی طہ = ۲ ن π + عہ ± بہ جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے ایسے زاویے مثلاً عہ اور بہ جو مثلثی حسابات میں تسہیل عمل کے لئے داخل کئے جاتے ہیں امدادی زاویے کہلاتے ہیں۔

۱۳۶ - عمل ترسیمی سے اوپر کے حل کی توضیح اس طرح ہو سکتی ہے



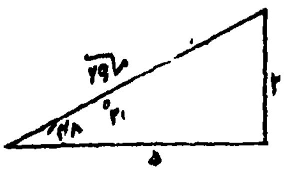
خط ابتدائی پر وم برابر ا کے ناپو اور وا پر عمود م ع برابر ب کے قائم کرو تب زاویہ م و ع کا مماس $\frac{ب}{ا}$ ہوگا اس زاویہ کو عہ سے تعبیر کرو

و کے مرکز اور و ع مساوی $\sqrt{ا^۲ + ب^۲}$ کے نصف قطر پر ایک دائرہ بناؤ اور خط ابتدائی پر و ن برابر ج کے لو

و ن پر عمود ق ن قَ کھینچو اور فرض کرو کہ وہ دائرہ کو نقاط ق

اور قَ پر ملتا ہے اس لئے زاویے ن و ق اور ن و قَ دونوں
جداگانہ بہ کے برابر ہیں پس زاویہ ق و ع = عہ - بہ اور قَ و ع = عہ + بہ
اس لئے مساوات کے حل بالترتیب
۲ ن π + ق و ع اور ۲ ن π + قَ و ع ہوں گے۔
صریحاً اوپر کا عمل ناممکن ہوگا اگر ج > √(اَ² + ب²)
کیونکہ اس صورت میں نقطہ ن دائرہ کے باہر واقع ہوگا

۱۳۷ - بطور ایک عددی مثال کے ہم مساوات ذیل کو حل کریں گے
۵ جم طہ - ۲ جب طہ = ۲ ، معلوم ہے مس ۲۱° ۴۸′ = ۲/۵
طرفین مساوات کو √(۵² + ۲²) یعنی √۲۹ پر تقسیم کرو تو حاصل ہوگا



(۵/√۲۹) جم طہ − (۲/√۲۹) جب طہ = ۲/√۲۹
اس لئے جم طہ جم ۲۱° ۴۸′ − جب طہ جب ۲۱° ۴۸′
= جب ۲۱° ۴۸′ = جب (۹۰° − ۶۸° ۱۲′)
= جم ۶۸° ۱۲′
∴ جم (طہ + ۲۱° ۴۸′) = جم ۶۸° ۱۲′
اس لئے طہ + ۲۱° ۴۸′ = ۲ ن × ۱۸۰° ± ۶۸° ۱۲′ (دفعہ ۸۹)
∴ طہ = ۲ ن × ۱۸۰° − ۲۱° ۴۸′ ± ۶۸° ۱۲′

= ۲ن × ۱۸۰° − ۹۰° یا ۲ن × ۱۸۰° + ۴۶° ۲۴′ جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے

متبادل ثبوت مساوات دفعہ ۱۳۵ ایک اور طرح سے بھی حل ہوسکتی ہے۔

فرض کرو کہ $\text{م} = \text{مس}\frac{\text{ط}}{۲}$

پس $$\text{جب ط} = \frac{۲\,\text{مس}\frac{\text{ط}}{۲}}{۱ + \text{مس}^۲\frac{\text{ط}}{۲}} = \frac{۲\text{م}}{۱ + \text{م}^۲}$$

اور $$\text{جم ط} = \frac{۱ - \text{مس}^۲\frac{\text{ط}}{۲}}{۱ + \text{مس}^۲\frac{\text{ط}}{۲}} = \frac{۱ - \text{م}^۲}{۱ + \text{م}^۲} \quad \text{(دفعہ ۱۱۵)}$$

مساوات میں یہ قیمتیں مندرج کرنے سے اس کی صورت یہ ہو جائے گی

$$\text{ا}\,\frac{۱ - \text{م}^۲}{۱ + \text{م}^۲} + \text{ب}\,\frac{۲\text{م}}{۱ + \text{م}^۲} = \text{ج}$$

یعنی $$\text{م}^۲(\text{ج} + \text{ا}) - ۲\,\text{ب}\,\text{م} + \text{ج} - \text{ا} = ۰$$

یہ ایک مساوات درجہ دوم ہے جس سے م کی دو قیمتیں یعنی مس $\frac{\text{ط}}{۲}$ کی دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں مثلاً موافق مثال دفعہ ہذا

$$۷\text{م}^۲ + ۴\text{م} - ۳ = ۰ \quad \text{یعنی م} = -۱ \text{ یا } \frac{۳}{۷}$$

= مس(−۴۵°) یا مس ۲۳° ۱۲′ (جدولوں سے)

اس لئے $\frac{\text{ط}}{۲}$ = ن × ۱۸۰° − ۴۵° یا ن × ۱۸۰° + ۲۳° ۱۲′

یعنی ط = ن × ۳۶۰° − ۹۰° یا ن × ۳۶۰° + ۴۶° ۲۴′

امثلہ نمبری ۲۱

معادلات ذیل کو حل کرو

۱۔ جب ط + جب ۷ ط = جب ۴ ط

۲۔ جم ط + جم ۷ ط = جم ۴ ط

۳۔ جم ط + جم ۳ ط = ۲ جم ۲ ط

۴۔ جب ۴ ط - جب ۲ ط = جم ۳ ط

۵۔ جم ط - جب ۳ ط = جم ۲ ط

۶۔ جب ۷ ط = جب ط + جب ۳ ط

۷۔ جم ط + جم ۲ ط + جم ۳ ط = ۰

۸۔ جب ط + جب ۳ ط + جب ۵ ط = ۰

۹۔ جب ۲ ط - جم ۲ ط - جب ط + جم ط = ۰

۱۰۔ جب (۳ ط + ع) + جب (۳ ط - ع) + جب (ع - ط) - جب (ع + ط) = جم ع

۱۱۔ جم (۳ ط + ع) جم (۳ ط - ع) + جم (۵ ط + ع) جم (۵ ط - ع) = جم ۲ ع

۱۲۔ جم ن ط = جم (ن - ۲) ط + جب ط

۱۳۔ جب (ن+۱)/۲ ط = جب (ن-۱)/۲ ط + جب ط

۱۴۔ جب م ط + جب ن ط = ۰

۱۵۔ جم م ط + جم ن ط = ۰

۱۶۔ جب^۲ ن ط - جب^۲ (ن - ۱) ط = جب^۲ ط

۱۷۔ جب ۳ ط + جم ۲ ط = ۰

۱۸— $\sqrt{۳}$ جم ط + جب ط = $\sqrt{۲}$

۱۹— جب ط + جم ط = $\sqrt{۲}$

۲۰— $\sqrt{۳}$ جب ط − جم ط = $\sqrt{۲}$

۲۱— جب لا + جم لا = $\sqrt{۲}$. جم ا

۲۲— ۵ جب ط + ۲ جم ط = ۵ (معلوم ہے مس ۲۱° ۴۸′ = ۴ر)

۲۳— ۶ جم لا + ۸ جب لا = ۹ (معلوم ہے مس ۵۳° ۸′ = ۱ $\frac{۱}{۳}$
اور جم ۲۵° ۵۰′ = ۹ر)

۲۴— ۱ + جب² ط = ۳ جب ط جم ط (معلوم ہے مس ۷۱° ۳۴′ = ۳)

۲۵— قم ط = مم ط + $\sqrt{۳}$

۲۶— قم لا = ۱ + مم لا

۲۷— ($\sqrt{۳}$ + ۲) جم ط = ۱ − جب ط

۲۸— مس ط + قط ط = $\sqrt{۳}$

۲۹— جم ۲ط = جم² ط

۳۰— ۴ جم ط − ۳ قط ط = مس ط

۳۱— جم ۲ ط + ۳ جم ط = ۰

۳۲— جم ۳ط + ۲ جم ط = ۰

۳۳— جم ۲ط = (۱ + $\sqrt{۲}$) (جم ط − $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$).

۳۴ — مم ط − مس ط = ۲

۳۵ — ۴ مم ۲ط = مم² ط − مس² ط

۳۶ — ۳ مس (ط − ۱۵°) = مس (ط + ۱۵°)

۳۷ — مس ط + مس ۲ط + مس ۳ط = ۰

۳۸ — مس ط + مس ۲ط + $\sqrt{۳}$ مس ط مس ۲ط = $\sqrt{۳}$

۳۹ — جب ۳ عہ = ۴ جب عہ جب (لا + عہ) جب (لا − عہ)

۴۰ — ثابت کرو کہ اگر لا کو $\sqrt{۲}$ جب ۴۵°، ۲ جب ۱۸°، ۲ جب ۲۳۴° میں سے کسی ایک قیمت کے برابر رکھا جائے تو شرائط مساوات لا⁴ − ۲ لا + ۱ = ۰ ہر ایک صورت میں پوری ہوں گی۔

۴۱ — اگر جب (π جم ط) = جم (π جب ط) تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم}\left(\text{ط} \pm \frac{\pi}{۴}\right) = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

۴۲ — اگر جب (π مم ط) = جم (π مس ط) تو ثابت کرو کہ قم ۲ط یا مم ۲ط مساوی ن + $\frac{۱}{۴}$ کے ہے، اس میں ن کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

۱۳۸ — مثال اگر لا صفر سے ۲π تک بڑھے تو جملہ جب لا + جم لا کے تغیرات کو مرتسم کرو۔

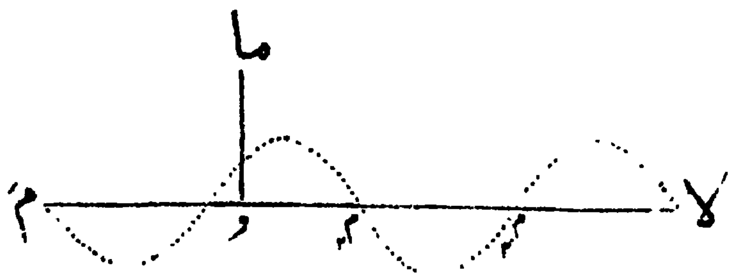
$$\text{جب لا} + \text{جم لا} = \sqrt{۲}\left[\frac{۱}{\sqrt{۲}}\,\text{جب لا} + \frac{۱}{\sqrt{۲}}\,\text{جم لا}\right]$$

$$= \sqrt{۲}\left[\text{جب لا جم}\,\frac{\pi}{۴} + \text{جم لا جب}\,\frac{\pi}{۴}\right] = \sqrt{۲}\,\text{جب}\left(\text{لا} + \frac{\pi}{۴}\right)$$

اس طرح سے ہکو قیمتوں کی جدول ذیل حاصل ہوگی

لا	۰	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۴}$	$\frac{۷\pi}{۴}$	۲π
$\text{لا} + \frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π	$\frac{۹\pi}{۴}$
$\text{جب}(\text{لا} + \frac{\pi}{۴})$	$\frac{۱}{\sqrt{۲}}$	۱	۰	۱-	۰	$\frac{۱}{\sqrt{۲}}$
$\sqrt{۲}\,\text{جب}(\text{لا} + \frac{\pi}{۴})$	۱	$\sqrt{۲}$	۰	$\sqrt{۲}$-	۰	۱

دفعہ ۶۸ کے عمل تعبیر کے موافق جملہ مذکورہ کی ترسیم یہ ہوگی۔



۱۳۹- مثال- ا جم طہ + ب جب طہ کی مقدار اور علامت کے تغیرات کی تحقیق کرو اور جملہ کی بڑی سے بڑی قیمت دریافت کرو

$$\text{ا جم طہ} + \text{ب جب طہ} = \sqrt{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲}\left[\frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲}}\,\text{جم طہ} + \frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲}}\,\text{جب طہ}\right]$$

فرض کرو کہ ع چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ ایسا ہے کہ

جم عہ = ا / √(ا² + ب²)　　اور　جب عہ = ب / √(ا² + ب²)

اس لئے جملہ مجوزہ = √(ا² + ب²) [جم طہ جم عہ + جب طہ جب عہ]

= √(ا² + ب²) جم (طہ - عہ)

جب زاویہ طہ کی قیمت عہ سے ۲π + عہ تک بڑھتی ہے تو زاویہ طہ - عہ صفر سے ۲π تک بڑھتا ہے اور اس لئے جملہ کی مقدار اور علامت کے تغیرات بآسانی حاصل ہو سکتے ہیں۔

اب چونکہ مقدار جم (طہ - عہ) کی بڑی سے بڑی قیمت ایک ہے (یعنی جب زاویہ طہ = عہ) اس لئے معلوم ہوا کہ جملہ کی بڑی سے بڑی قیمت √(ا² + ب²) ہے۔

نیز ظاہر ہے کہ جملہ کی بڑی سے بڑی قیمت کے موافق طہ کی جو قیمت ہو اس کی جیب التمام ا / √(ا² + ب²) ہوگی

امثلہ نمبری ۲۲

جب زاویہ طہ صفر سے ۲π تک بڑھے تو جملات ذیل کی مقدار و علامت کے تغیرات کی تحقیق کرو اور ان کی ترسیمات ہر ایک صورت میں بناؤ۔

۱۔ جب طہ - جم طہ

۲۔ جب طہ + √۳ جم طہ

[یاد رہے کہ جب طہ + √۳ جم طہ = ۲ [½ جب طہ + (√۳ / ۲) جم طہ]

= ۲ جب (طہ + π/۳)]

۳- جب ط - ۳√ جم ط ۴- جم۲ط - جب۲ط

۵- جب ط جم ط ۶- جب۳ ط

۷- مس۳ ط ۸- قط۴ ط

۹- $\dfrac{\text{جب ط + جب ۲ ط}}{\text{جم ط + جم ۲ ط}}$ ۱۰- جب (π جب ط)

۱۱- جم (π جب ط)

۱۲- اگر زاویہ °۰ سے °۹۰ تک بڑھے تو جملہ $\dfrac{\text{جب ۳ ط}}{\text{جم ۲ ط}}$ کی مقدار و علامت کے تغیرات کی تحقیق کرو۔

باب دہم

لوکارثم

۱۴۴ — فرض کرو کہ ہمیں معلوم ہے

$$۱۰^{۲٫۴۰۳۱۲۰۵} = ۲۵۳ \text{ ، } ۱۰^{۲٫۶۰۹۵۹۴۴} = ۴۰۷$$

اور $۱۰^{۵٫۰۱۲۷۱۴۹} = ۱۰۲۹۷۱$

تو عمل ضرب کی مدد کے بغیر ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ $۲۵۳ \times ۴۰۷ = ۱۰۲۹۷۱$ کیونکہ

$$۲۵۳ \times ۴۰۷ = ۱۰^{۲٫۴۰۳۱۲۰۵} \times ۱۰^{۲٫۶۰۹۵۹۴۴}$$

$$= ۱۰^{۲٫۴۰۳۱۲۰۵ + ۲٫۶۰۹۵۹۴۴}$$

$$= ۱۰^{۵٫۰۱۲۷۱۴۹} = ۱۰۲۹۷۱$$

ظاہر ہے کہ اس جگہ عمل ضرب اُس سے آسان تر عمل جمع میں تبدیل ہوگیا ہے، نیز فرض کرو کہ ہمیں معلوم ہے کہ

$$۱۰^{۳٫۹۰۰۴۰۵۵} = ۷۹۵۰٫۷$$

اور $۱۰^{۱٫۶۳۳۴۶۸۵} = ۴۳$

ہم بآسانی ثابت کرسکتے ہیں کہ ۷۹۵۰۷ کا جذر الکعب ۴۳ ہے

کیونکہ $\sqrt[3]{79507} = \left[79507\right]^{\frac{1}{3}} = \left(10^{4.90040055}\right)^{\frac{1}{3}}$

$= 10^{4.90040055 \times \frac{1}{3}} = 10^{1.63346685} = 43$

اس صورت میں استخراج جذر کا محال عمل آسان تر عمل تقسیم میں تبدیل ہوگیا ہے۔

۱۴۱ – لوکارتم۔ تعریف اگر ا کوئی عدد ہو اور لا اور ن دو اور ایسے عدد ہوں کہ $ا^{لا} = ن$ تو لا کو لوکارتم ن کا اساس ا پر کہتے ہیں اور اس ربط کو اس طرح لکھتے ہیں لوک$_{ا}$ ن

اس لئے کسی عدد کا لوکارتم اساس معلوم پر وہ قوت نما ہے جس کے موافق ضرور ہے کہ اساس کو اُٹھایا جائے تاکہ حاصل عدد معلوم کے برابر ہوجائے۔

امثلہ چونکہ $10^2 = 100$ اس لئے $2 =$ لوک$_{10}$ 100

چونکہ $10^5 = 100000$ اس لئے $5 =$ لوک$_{10}$ 100000

چونکہ $2^4 = 16$ اس لئے $4 =$ لوک$_{2}$ 16

چونکہ $8^{\frac{2}{3}} = \left[8^{\frac{1}{3}}\right]^2 = 2^2 = 4$ اس لئے $\frac{2}{3} =$ لوک$_{8}$ 4

چونکہ $9^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$ اس لئے $-\frac{3}{2} =$ لوک$_{9}\left(\frac{1}{27}\right)$.

یادداشت چونکہ $ا^0 = 1$ اس لئے ایک کا لوکارتم کسی اساس پر ہمیشہ صفر ہوتا ہے۔

۱۴۲ — اگر م اور ن کوئی حقیقی مقادیر جبریہ ہوں تو ان کے لئے قوانین ذیل جن کو قوت نماؤں کے قانون کہتے ہیں، ہمیشہ صادق آتے ہیں۔

(۱) $ا^{م} \times ا^{ن} = ا^{م+ن}$

(۲) $ا^{م} \div ا^{ن} = ا^{م-ن}$

(۳) $(ا^{م})^{ن} = ا^{من}$

ان کے مطابق لوکارتھموں کے تین اساسی قوانین مندرجۂ ذیل ہیں۔

(۱) $لوک_{ا}\, م ن = لوک_{ا}\, م + لوک_{ا}\, ن$

(۲) $لوک_{ا} \frac{م}{ن} = لوک_{ا}\, م - لوک_{ا}\, ن$

(۳) $لوک_{ا}(م^{ن}) = ن\, لوک_{ا}\, م$

ان کے ثبوت ذیل کی دفعات میں دئے گئے ہیں۔

۱۴۳ — دو مقداروں کے حاصل ضرب کا لوکارتھم اُن کے لوکارتھموں کے حاصل جمع کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$لوک_{ا}(م ن) = لوک_{ا}\, م + لوک_{ا}\, ن$$

فرض کرو کہ $لا = لوک_{ا}\, م$ یعنی $ا^{لا} = م$

اور $ما = لوک_{ا}\, ن$ یعنی $ا^{ما} = ن$

تب $م ن = ا^{لا} \times ا^{ما} = ا^{لا+ما}$

$\therefore$ $لوک_{ا}\, م ن = لا + ما$ (دفعہ ۱۴۱ تعریف)

۱۴۴ — دو مقداروں کے خارج قسمت کا لوکارتم اُن کے لوکارتموں کے حاصل تفریق کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$\text{لوک}_{\text{ا}}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}\right) = \text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{م} - \text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{ن}$$

فرض کرو کہ $\text{لا} = \text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{م}$ یعنی $\text{ا}^{\text{لا}} = \text{م}$ (دفعہ ۱۴۱ تعریف)

اور $\text{ما} = \text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{ن}$ یعنی $\text{ا}^{\text{ما}} = \text{ن}$

تب $\frac{\text{م}}{\text{ن}} = \text{ا}^{\text{لا}} \div \text{ا}^{\text{ما}} = \text{ا}^{\text{لا}-\text{ما}}$

$\therefore \text{لوک}_{\text{ا}}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}\right) = \text{لا} - \text{ما}$ (دفعہ ۱۴۱ تعریف)

$= \text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{م} - \text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{ن}$

۱۴۵ — ایک ایسی مقدار کا لوکارتم جو کسی خاص قوت پر اُٹھائی گئی ہو مساوی ہے اُس حاصلِ ضرب کے جو مقدار کے لوکارتم اور قوت نما کے باہم ضرب دینے سے حاصل ہو یعنی

$$\text{لوک}_{\text{ا}}\left(\text{م}^{\text{ن}}\right) = \text{ن}\,\text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{م}$$

فرض کرو کہ $\text{لا} = \text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{م}$ یعنی $\text{ا}^{\text{لا}} = \text{م}$

تب $\text{م}^{\text{ن}} = \left(\text{ا}^{\text{لا}}\right)^{\text{ن}} = \text{ا}^{\text{لان}}$

$\therefore \text{لوک}_{\text{ا}}\left(\text{م}^{\text{ن}}\right) = \text{ن}\,\text{لا}$ (دفعہ ۱۴۱ تعریف)

$= \text{ن}\,\text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{م}$

امثلہ $\text{لوک}\,۴۸ = \text{لوک}\left(۲^{۴} \times ۳\right) = \text{لوک}\,۲^{۴} + \text{لوک}\,۳ = ۴\,\text{لوک}\,۲ + \text{لوک}\,۳$

لوک $\frac{۶۳}{۴۸۴}$ = لوک $\frac{۷ \times ۳^{۲}}{۲^{۲} \times ۱۱^{۲}}$ = لوک ۷ + لوک ۳² − لوک ۲² − لوک ۱۱²

= لوک ۷ + ۲ لوک ۳ − ۲ لوک ۲ − ۲ لوک ۱۱

لوک $\sqrt[۵]{۱۳}$ = لوک $۱۳^{\frac{۱}{۵}}$ = $\frac{۱}{۵}$ لوک ۱۳

۱۴۶ — مروج لوکارتھم عملیات میں جو لوکارتھم مستعمل ہیں اُن میں اساس ۱۰ مقرر ہے، پس اگر کوئی اساس بیان نہ کیا جائے تو اساس ۱۰ کو ہمیشہ محذوف خیال کرنا چاہئے، اساس ۱۰ کے فوائد دفعات ذیل سے معلوم ہوں گے۔

۱۴۷ — ممیّز اور اعشاریہ لوکارتمی — تعریف اگر کسی عدد کے لوکارتھم کا کچھ حصہ صحیح اور کچھ حصہ مکسور ہو تو لوکارتھم کے حصہ صحیح کو **ممیّز** اور حصہ اعشاریہ کو **اعشاریہ لوکارتمی** کہتے ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ لوک ۷۹۵ = ۲،۹۰۰۳۶۷۱ تو عدد ۲ کو لوکارتھم کا ممیّز اور ،۹۰۰۳۶۷۱ کو اعشاریہ لوکارتمی کہیں گے۔

منفی ممیّز — فرض کرو کہ ہمیں معلوم ہے کہ لوک ۲ = ،۳۰۱۰۳ تب بموجب دفعہ ۱۴۴

لوک $\frac{۱}{۲}$ = لوک ۱ − لوک ۲ = ۰ − لوک ۲ = − ،۳۰۱۰۳

جس سے معلوم ہوا کہ لوک $\frac{۱}{۲}$ منفی ہے

جیسا دفعہ ۱۴۹ سے معلوم ہوگا اس میں خاص سہولت ہے کہ لوکارتھموں کے اعشاریوں کو ہمیشہ مثبت رکھا جائے۔

اس لئے بجائے − ،۳۰۱۰۳ کے ہم − [۱̄،۶۹۸۹۷] لکھتے ہیں

یعنی لوک $\frac{۱}{۲}$ = −(۱−٫۶۹۸۹۷) = −۱+٫۶۹۸۹۷

اختصاراً اس جملہ کو ۱̄٫۶۹۸۹۷ لکھتے ہیں۔

عدد ۱ کے اوپر خط افقی یہ ظاہر کرتا ہے کہ لوکارتم کا صحیح حصہ منفی ہے لیکن اعشاریہ لوکارتی مثبت ہے۔

ایک اور مثال لو ۳̄٫۴۷۷۱۲۱۳ قائم مقام −۳+٫۴۷۷۱۲۱۳ کا ہے۔

۱۴۸۔ کسی عدد کے لوکارتم کا ممیز صرف دیکھنے ہی سے معلوم ہوسکتا ہے۔

(۱) فرض کرو کہ عدد ایک سے بڑا ہے۔

چونکہ $۱۰^{۰}$ = ۱ اس لئے لوک ۱ = ۰

چونکہ $۱۰^{۱}$ = ۱۰ اس لئے لوک ۱۰ = ۱

چونکہ $۱۰^{۲}$ = ۱۰۰ اس لئے لوک ۱۰۰ = ۲

اور علیٰ ہذا القیاس

اس لئے معلوم ہوا کہ جو عدد ۱ اور ۱۰ کے درمیان واقع ہو اُس کا لوکارتم صفر اور ۱ کے درمیان واقع ہوگا یعنی لوکارتم ایک کسر اعشاریہ ہوگا۔

اس لئے اس کا ممیز صفر ہوگا

ایسے ہی جو عدد ۱۰ اور ۱۰۰ کے درمیان واقع ہو اُس کا لوکارتم ۱ اور ۲ کے درمیان واقع ہوگا، یعنی اس کا ممیز ایک ہوگا

اسی طرح سے جو عدد ۱۰۰ اور ۱۰۰۰ کے درمیان واقع ہو اس کا لوکارتم ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہوگا یعنی اُس کا ممیز ۲ ہوگا

ایسے ہی اگر عدد ۱۰۰۰ اور ۱۰۰۰۰ کے درمیان واقع ہو تو اُس کا ممیز ۳ ہوگا اور بالعموم کسی عدد کے لوکارتم کا ممیز اُن ہندسوں کی تعداد سے جو اس کے صحیح حصہ میں شامل ہوں بقدر ایک کے کم ہوگا

امثلہ عدد ۲۹۶٫۳۴۵۷ کے صحیح حصہ میں ۳ ہندسے ہیں اس لئے اسکے لوکارتم کا ممیز ۲ ہے

۲۹۶۳۴٫۵۷ کے لوکارتم کا ممیز ۵−۱ یعنی ۴ ہے

(۲) فرض کرو کہ عدد ایک سے کم ہے

چونکہ $10^0 = 1$ اس لئے لوک ۱ = ۰

" $10^{-1} = \frac{1}{10} = .1$ اس لئے لوک ۰۱ = −۱

" $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = .01$ اسلئے لوک ۰۰۱ = −۲

" $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = .001$ اسلئے لوک ۰۰۰۱ = −۳

اور علیٰ ہذا القیاس

اس لئے معلوم ہوا کہ اگر عدد ۱ اور ۰۱ کے درمیان واقع ہو تو اس کا لوکارتم صفر اور −۱ کے درمیان واقع ہوگا، پس لوکارتم مطلوب −۱ + ایک کسر اعشاریہ، کے برابر ہوگا یعنی اس کا ممیز $\bar{1}$ ہوگا۔

ایسے ہی جو عدد ۰۱ اور ۰۰۱ کے درمیان واقع ہو اس کا لوکارتم −۱ اور −۲ کے درمیان واقع ہوگا اور اس لئے وہ −۲ + ایک کسر اعشاریہ، کے برابر ہوگا یعنی اس کا ممیز $\bar{2}$ ہوگا

اسی طرح سے جو عدد ۰۰۱ اور ۰۰۰۱ کے درمیان واقع ہو اُس کا

لوکارثم ۲- اور ۳- کے درمیان واقع ہوگا یعنی اُس کا ممیز $\bar{۳}$ ہوگا
اور معلوم ہوا کہ کسی کسر اعشاریہ کے لوکارثم کا ممیز منفی ہوتا ہے اور
علامت اعشاریہ کے بعد پہلے ملحوظ ہندسے تک جتنے صفر ہوں
ممیز اُن سے بقدر ایک کے زیادہ ہوتا ہے۔

کیونکہ جو کسر ۱ اور ۱ء کے درمیان واقع ہو (مثلاً ۵ء) اُس میں علامت
اعشاریہ کے بعد کوئی صفر نہیں ہوسکتا اور ہم کو معلوم ہے کہ اس کا
ممیز $\bar{۱}$ ہے، نیز جو کسر ۱ء اور ۰۱ء کے درمیان واقع ہو مثلاً (۰۷ء)،
اُس میں عین علامت اعشاریہ کے بعد ایک صفر ہوگا اور ہم
جانتے ہیں کہ اس کا ممیز $\bar{۲}$ ہے۔

جو کسر ۰۱ء اور ۰۰۱ء کے درمیان واقع ہو مثلاً (۰۰۴ء)، اس میں
عین علامت اعشاریہ کے بعد دو صفر ہونگے، اور ہم کو معلوم ہے
کہ اس کا ممیز $\bar{۳}$ ہے، کسی اور کسر کی بھی یہی کیفیت ہے۔

امثلہ عدد ۰۰۸۳۵ء کے لوکارثم کا ممیز $\bar{۳}$ ہے

عدد ۰۰۰۰۵۳ء کے لوکارثم کا ممیز $\bar{۵}$ ہے

عدد ۳۴۵۶۷ء کے لوکارثم کا ممیز $\bar{۱}$ ہے

۱۴۹ - جن عددوں کی ترکیب میں وہی ہندسے شامل ہوں
اُن کے اعشاریہ لوکارثمی وہی ہوتے ہیں۔

اس کی توضیح ایک مثال سے ہوگی۔

فرض کرو کہ ہمیں معلوم ہے

لوک ۶۶۸۱۸ = ۴ء۸۲۴۸۹۳۵

تب لوک ۶۶۸ء۱۸ = لوک $\frac{۶۶۸۱۸}{۱۰۰}$ = لوک ۶۶۸۱۸ - لوک ۱۰۰ (دفعہ ۱۴۴

= ۴٫۸۲۴۸۹۳۵ - ۲ = ۲٫۸۲۴۸۹۳۵

لوک ٫۶۶۸۱۸ = لوک $\frac{۶۶۸۱۸}{۱۰۰۰۰۰}$ = لوک ۶۶۸۱۸ - لوک ۱۰۰۰۰۰ (دفعہ ۱۴۴)

= ۴٫۸۲۴۸۹۳۵ - ۵ = ۱̄٫۸۲۴۸۹۳۵

نیز لوک ٫۰۰۰۶۶۸۱۸ = لوک $\frac{۶۶۸۱۸}{۱۰^{۸}}$

= لوک ۶۶۸۱۸ - لوک $۱۰^{۸}$ = ۴٫۸۲۴۸۹۳۵ - ۸ = ۴̄٫۸۲۴۸۹۳۵

اب اعداد ۶۶۸۱۸، ۶۶۸٫۱۸، ٫۶۶۸۱۸ اور ٫۰۰۰۶۶۸۱۸ میں ملحوظ ہندسے وہی ہیں صرف علامت اعشاریہ کے مقام میں فرق ہے ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ اُن کی لوکارثموں میں حصہ اعشاریہ وہی ہے صرف ممیز مختلف ہیں۔

ہرایک صورت میں ممیز کی قیمت قانون دفعہ گزشتہ کی مدد سے معلوم ہوتی ہے،

یاد رہے کہ لوکارثم کا اعشاریہ لوکارثمی ہمیشہ مثبت ہوتا ہے۔

۱۵۰- لوکارثمی جدولیں ۱ سے لیکر ۱۰۸۰۰۰ تک تمام اعداد کے لوکارثم چیمبر صاحب کی لوکارثمی جدولوں میں مندرج ہیں اور یہ قیمتیں سات مرتبہ کے اعشاریہ تک صحیح ہیں۔

طالب علم کے پاس چیمبر کی جدول یا کسی اور اچھی جدول کا ایک نسخہ موجود ہونا چاہیئے آیندہ چند بابوں میں کئی مثالیں حل کرنے میں اس کی ضرورت ہوگی۔

مقابل کے صفحہ پر چیمبر کی جدولوں سے ایک صفحہ بطور نمونہ کے منتخب لیا گیا ہے اس میں ۵۲۵۰۰ سے لیکر ۵۳۰۰۰ تک تمام اعداد صحیح کے اعشاریہ لوکارثمی مندرج ہیں۔

عدد	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹		فرق
۵۲۵۰	۱۵۹۳	۱۶۷۶	۱۷۵۸	۱۸۴۱	۱۹۲۴	۲۰۰۶	۲۰۸۹	۲۱۷۲	۲۲۵۵	۲۳۳۷	۷۲۰	
۵۱	۲۴۲۰	۲۵۰۳	۲۵۸۶	۲۶۶۸	۲۷۵۱	۲۸۳۴	۲۹۱۶	۲۹۹۹	۳۰۸۲	۳۱۶۴		
۵۲	۳۲۴۷	۳۳۳۰	۳۴۱۳	۳۴۹۵	۳۵۷۸	۳۶۶۱	۳۷۴۳	۳۸۲۶	۳۹۰۹	۳۹۹۱		۸۲
۵۳	۴۰۷۴	۴۱۵۶	۴۲۳۹	۴۳۲۲	۴۴۰۵	۴۴۸۷	۴۵۷۰	۴۶۵۳	۴۷۳۵	۴۸۱۸		۱ ۸ / ۲ ۱۶
۵۴	۴۹۰۱	۴۹۸۳	۵۰۶۶	۵۱۴۹	۵۲۳۱	۵۳۱۴	۵۳۹۷	۵۴۷۹	۵۵۶۲	۵۶۴۵		۳ ۲۵ / ۴ ۳۳
۵۵	۵۷۲۷	۵۸۱۰	۵۸۹۲	۵۹۷۵	۶۰۵۸	۶۱۴۰	۶۲۲۳	۶۳۰۶	۶۳۸۸	۶۴۷۱		۵ ۴۱ / ۶ ۴۹ / ۷ ۵۷
۵۶	۶۵۵۳	۶۶۳۶	۶۷۱۹	۶۸۰۱	۶۸۸۴	۶۹۶۶	۷۰۴۹	۷۱۳۲	۷۲۱۴	۷۲۹۷		۸ ۶۶
۵۷	۷۳۸۰	۷۴۶۲	۷۵۴۵	۷۶۲۷	۷۷۱۰	۷۷۹۳	۷۸۷۵	۷۹۵۸	۸۰۴۱	۸۱۲۳		۹ ۷۴
۵۸	۸۲۰۶	۸۲۸۸	۸۳۷۱	۸۴۵۳	۸۵۳۶	۸۶۱۹	۸۷۰۱	۸۷۸۴	۸۸۶۶	۸۹۴۹		
۵۹	۹۰۳۲	۹۱۱۴	۹۱۹۷	۹۲۷۹	۹۳۶۲	۹۴۴۵	۹۵۲۷	۹۶۱۰	۹۶۹۲	۹۷۷۵		
۶۰	۹۸۵۸	۹۹۴۰	$\overline{۰۰۲۳}$	$\overline{۰۱۰۵}$	$\overline{۰۱۸۸}$	$\overline{۰۲۷۰}$	$\overline{۰۳۵۳}$	$\overline{۰۴۳۵}$	$\overline{۰۵۱۸}$	$\overline{۰۶۰۰}$		

عدد	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	فرق
۵۲۴۱	۰۶۸۳	۰۷۶۶	۰۸۴۸	۰۹۳۱	۱۰۱۳	۱۰۹۶	۱۱۷۸	۱۲۶۱	۱۳۴۳	۱۴۲۶	۷۲۱
۴۲	۱۵۰۸	۱۵۹۱	۱۶۷۳	۱۷۵۶	۱۸۳۹	۱۹۲۱	۲۰۰۴	۲۰۸۶	۲۱۶۹	۲۲۵۱	
۴۳	۲۳۳۴	۲۴۱۶	۲۴۹۹	۲۵۸۱	۲۶۶۴	۲۷۴۶	۲۸۲۹	۲۹۱۱	۲۹۹۴	۳۰۷۶	
۴۴	۳۱۵۹	۳۲۴۱	۳۳۲۴	۳۴۰۶	۳۴۸۹	۳۵۷۱	۳۶۵۴	۳۷۳۶	۳۸۲۹	۳۹۰۱	
۴۵	۳۹۸۳	۴۰۶۶	۴۱۴۸	۴۲۳۱	۴۳۱۳	۴۳۹۶	۴۴۷۹	۴۵۶۱	۴۶۴۳	۴۷۲۶	
۴۶	۴۸۰۹	۴۸۹۱	۴۹۷۳	۵۰۵۶	۵۱۳۸	۵۲۲۱	۵۳۰۳	۵۳۸۶	۵۴۶۸	۵۵۵۱	
۴۷	۵۶۳۳	۵۷۱۶	۵۷۹۸	۵۸۸۱	۵۹۶۳	۶۰۴۵	۶۱۲۸	۶۲۱۰	۶۲۹۳	۶۳۷۵	
۴۸	۶۴۵۸	۶۵۴۰	۶۶۲۳	۶۷۰۵	۶۷۸۷	۶۸۷۰	۶۹۵۲	۷۰۳۵	۷۱۱۷	۷۲۰۰	
۴۹	۷۲۸۲	۷۳۶۴	۷۴۴۷	۷۵۲۹	۷۶۱۲	۷۶۹۴	۷۷۷۷	۷۸۵۹	۷۹۴۱	۸۰۲۴	
۵۰	۸۱۰۶	۸۱۸۹	۸۲۷۱	۸۳۵۳	۸۴۳۶	۸۵۱۸	۸۶۰۱	۸۶۸۳	۸۷۶۵	۸۸۴۸	

	۸۲
۱	۸
۲	۱۶
۳	۲۵
۴	۳۳
۵	۴۱
۶	۴۹
۷	۵۷
۸	۶۶
۹	۷۴

عدد	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩		فرق	
٥٢٦١	٨٩٣٠	٩٠١٣	٩٠٩٥	٩١٧٧	٩٢٦٠	٩٣٤٢	٩٤٢٤	٩٥٠٧	٩٥٨٩	٩٦٧٢	٧٢١		
٦٢	٩٧٥٣	٩٨٣٦	٩٩١٩	٠٠٠١	٠٠٨٤	٠١٦٦	٠٢٤٨	٠٣٣١	٠٤١٣	٠٤٩٥			
٦٣	٠٥٧٨	٠٦٦٠	٠٧٤٢	٠٨٢٥	٠٩٠٧	٠٩٩٠	١٠٧٢	١١٥٤	١٢٣٧	١٣١٩	٧٢٢		٨٢
٦٤	١٤٠١	١٤٨٤	١٥٦٦	١٦٤٨	١٧٣١	١٨١٣	١٨٩٥	١٩٧٨	٢٠٦٠	٢١٤٢		١	٨
٦٥	٢٢٢٥	٢٣٠٧	٢٣٨٩	٢٤٧٢	٢٥٥٤	٢٦٣٦	٢٧١٩	٢٨٠١	٢٨٨٣	٢٩٦٦		٢	١٦
												٣	٢٥
												٤	٣٣
												٥	٤١
٦٦	٣٠٤٨	٣١٣٠	٣٢١٢	٣٢٩٥	٣٣٧٧	٣٤٥٩	٣٥٤٢	٣٦٢٤	٣٧٠٦	٣٧٨٩		٦	٤٩
												٧	٥٧
٦٧	٣٨٧١	٣٩٥٣	٤٠٣٦	٤١١٨	٤٢٠٠	٤٢٨٢	٤٣٦٥	٤٤٤٧	٤٥٢٩	٤٦١٢		٨	٦٦
٦٨	٤٦٩٤	٤٧٧٦	٤٨٥٨	٤٩٤١	٥٠٢٣	٥١٠٥	٥١٨٨	٥٢٧٠	٥٣٥٢	٥٤٣٤		٩	٧٤
٦٩	٥٥١٧	٥٥٩٩	٥٦٨١	٥٧٦٣	٥٨٤٦	٥٩٢٨	٦٠١٠	٦٠٩٢	٦١٧٥	٦٢٥٧			
٧٠	٦٣٣٩	٦٤٢١	٦٥٠٤	٦٥٨٦	٦٦٦٨	٦٧٥٠	٦٨٣٣	٦٩١٥	٦٩٩٧	٧٠٧٩			

عدد	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	
۵۲۸۱	۷۱۶۲	۷۲۴۴	۷۳۲۶	۷۴۰۸	۷۴۹۱	۷۵۷۳	۷۶۵۵	۷۷۳۷	۷۸۲۰	۷۹۰۲	۷۲۲
۸۲	۷۹۸۴	۸۰۶۶	۸۱۴۸	۸۲۳۱	۸۳۱۳	۸۳۹۵	۸۴۷۷	۸۵۵۹	۸۶۴۲	$\overline{\text{۸۷۲۴}}$	
۸۳	۸۸۰۶	۸۸۸۸	۸۹۷۱	۹۰۵۳	۹۱۳۵	۹۲۱۷	۹۲۹۹	۹۳۸۲	۹۴۶۴	۹۵۴۶	
۸۴	۹۶۲۸	۹۷۱۰	۹۷۹۲	۹۸۷۵	$\overline{\text{۹۹۵۷}}$	$\overline{\text{۰۰۳۹}}$	$\overline{\text{۰۱۲۱}}$	$\overline{\text{۰۲۰۳}}$	$\overline{\text{۰۲۸۶}}$	$\overline{\text{۰۳۶۸}}$	
۸۵	۰۴۵۰	۰۵۳۲	۰۶۱۴	۰۶۹۶	۰۷۷۹	۰۸۶۱	۰۹۴۳	۱۰۲۵	۱۱۰۷	۱۱۸۹	۷۲۳
۸۶	۱۲۷۲	۱۳۵۴	۱۴۳۶	۱۵۱۸	۱۶۰۰	۱۶۸۲	۱۷۶۵	۱۸۴۷	۱۹۲۹	۲۰۱۱	
۸۷	۲۰۹۳	۲۱۷۵	۲۲۵۷	۲۳۴۰	۲۴۲۲	۲۵۰۴	۲۵۸۶	۲۶۶۸	۲۷۵۰	۲۸۳۲	
۸۸	۲۹۱۴	۲۹۹۶	۳۰۷۹	۳۱۶۱	۳۲۴۳	۳۳۲۵	۳۴۰۷	۳۴۸۹	۳۵۷۱	۳۶۵۳	
۸۹	۳۷۳۶	۳۸۱۸	۳۹۰۰	۳۹۸۲	۴۰۶۴	۴۱۴۶	۴۲۲۸	۴۳۱۰	۴۳۹۳	۴۴۷۵	
۹۰	۴۵۵۷	۴۶۳۹	۴۷۲۱	۴۸۰۳	۴۸۸۵	۴۹۶۷	۵۰۴۹	۵۱۳۱	۵۲۱۳	۵۲۹۶	

فرق	۸۲
۱	۸
۲	۱۶
۳	۲۵
۴	۳۳
۵	۴۱
۶	۴۹
۷	۵۷
۸	۶۶
۹	۷۴

عدد		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹		فرق	
۵۲۹۱	۵۳۷۸	۵۴۶۰	۵۵۴۲	۵۶۲۳	۵۷۰۶	۵۷۸۸	۵۸۷۰	۵۹۵۲	۶۰۳۳	۶۱۱۶	۷۲۳		
۹۲	۶۱۹۸	۶۲۸۰	۶۳۶۲	۶۴۴۵	۶۵۲۷	۶۶۰۹	۶۶۹۱	۶۷۷۳	۶۸۵۵	۶۹۳۷			
۹۳	۷۰۱۹	۷۱۰۱	۷۱۸۳	۷۲۶۵	۷۳۴۷	۷۴۲۹	۷۵۱۱	۷۵۹۳	۷۶۷۵	۷۷۵۷		۸۲	
۹۴	۷۸۳۹	۷۹۲۱	۸۰۰۳	۸۰۸۵	۸۱۶۷	۸۲۵۰	۸۳۳۲	۸۴۱۴	۸۴۹۶	۸۵۷۸		۸	۱
۹۵	۸۶۶۰	۸۷۴۲	۸۸۲۴	۸۹۰۶	۸۹۸۸	۹۰۷۰	۹۱۵۲	۹۲۳۴	۹۳۱۶	۹۳۹۸		۱۶	۲
												۲۵	۳
												۳۳	۴
												۴۱	۵
۹۶	۹۴۸۰	۹۵۶۲	۹۶۴۴	۹۷۲۶	۹۸۰۸	۹۸۹۰	۹۹۷۲	‾۰۰۵۳	‾۰۱۳۶	‾۰۲۱۸		۴۹	۶
۹۷	۰۳۰۰	۰۳۸۲	۰۴۶۴	۰۵۴۶	۰۶۲۸	۰۷۱۰	۰۷۹۲	۰۸۷۴	۰۹۵۶	۱۰۳۸	۷۲۴	۵۷	۷
۹۸	۱۱۲۰	۱۲۰۲	۱۲۸۴	۱۳۶۵	۱۴۴۷	۱۵۲۹	۱۶۱۱	۱۶۹۳	۱۷۷۵	۱۸۵۷		۶۶	۸
۹۹	۱۹۳۹	۲۰۲۱	۲۱۰۳	۲۱۸۵	۲۲۶۷	۲۳۴۹	۲۴۳۱	۲۵۱۳	۲۵۹۵	۲۶۷۷		۷۴	۹
۵۳۰۰	۲۷۵۹	۲۸۴۱	۲۹۲۳	۳۰۰۵	۳۰۸۶	۳۱۶۸	۳۲۵۰	۳۳۳۲	۳۴۱۴	۳۴۹۶			

۱۵۱ - فرض کرو کہ ہمیں عدد ۵۲۶۸۷ کا لوکارثم مطلوب ہے۔ جدول کے دائیں طرف سب سے پہلے خانے میں اوپر سے نیچے کی طرف دیکھتے جاؤ اور عدد ۵۲۶۸ کو تلاش کرو، جب یہ عدد ملجائے تو عین اس مقام سے افقی سطر میں بائیں طرف دیکھتے جاؤ جب تک کہ نوبت اُس خانے کی نہ آجائے جس کے سر پر سب سے اوپر عدد ۷ لکھا ہوا ہے، اس خانے میں ہم کو عدد ۷۰۳۵ ملے گا، اس سے ہم کو یہ معلوم ہوا کہ ۵۲۶۸۷ کا متعلقہ عدد جدول میں ۷۲۱۷۰۳۵ ہے لیکن اس عدد میں صرف اعشاریہ لوکارثمی کے ہندسے شامل ہیں یعنی اعشاریہ لوکارثمی مطلوب ٫۷۲۱۷۰۳۵ ہے، لیکن ۵۲۶۸۷ کا ممیز ۴ ہے اس لئے

لوک ۵۲۶۸۷ = ۴٫۷۲۱۷۰۳۵

پس لوک ٫۵۲۶۸۷ = آ٫۷۲۱۷۰۳۵

اور لوک ٫۰۰۵۲۶۸۷ = ۳̄٫۷۲۱۷۰۳۵

اگر ۵۲۷۲۵ کا لوکارثم مطلوب ہو تو طالب علم کو چاہیئے کہ جدول کے دائیں طرف پہلے خانہ میں اوپر سے نیچے کی طرف دیکھتا جائے جب تک کہ عدد ۵۲۷۲ کی نوبت نہ آجائے اس کے بعد افقی سطر میں بائیں طرف اُس خانے تک دیکھتا جائے جس کے راس پر ۵ لکھا ہوا ہے، وہاں اُس کو عدد $\overline{\text{۰۱۶۶}}$ لکھا ہوا ملے گا، ان ہندسوں پر خط افقی کا یہ مطلب ہے کہ ان کے ماقبل ۷۲۲ لکھنا چاہیئے نہ کہ ۷۲۱، اس سے معلوم ہوا کہ عدد ۵۲۷۲۵ کے متعلق اعشاریہ لوکارثمی ٫۷۲۲۰۱۶۶ ہے۔

نیز عدد ۵۲۷۲۵ کا مینز ۴ ہے

اس لئے لوک ۵۲۷۲۵ = ۴٫۷۲۲۰۱۶۶

پس لوک ۰٫۰۵۲۷۲۵ = $\bar{۲}$٫۷۲۲۰۱۶۶

اب ہم چند عددی مثالیں حل کریں گے جن سے عملی حسابات میں لوکارتم کے استعمال کی صلاحیت واضح ہوگی

۱۵۲۔ مثال ۱۔ $\sqrt[۵]{۲۳٫۴}$ کی قیمت دریافت کرو

فرض کروکہ لا = $\sqrt[۵]{۲۳٫۴} = (۲۳٫۴)^{\frac{۱}{۵}}$

یعنی لوک لا = $\frac{۱}{۵}$ لوک (۲۳٫۴) ... دفعہ ۱۴۵

اب جدول لوکارثمی میں عدد ۲۳۴ کے محاذی ہم کو اُس کا لوکارتم ۳۶۹۲۱۵۹ لکھا ہوا ملے گا۔

اس لئے لوک ۲۳٫۴ = ۱٫۳۶۹۲۱۵۹

اس لئے لوک لا = $\frac{۱}{۵}$ [۱٫۳۶۹۲۱۵۹] = ۰٫۲۷۳۸۴۳۲

نیز لوکارتم ۲۷۳۸۴۳۲ کے متعلق جدول سے عدد ۱۸۷۸۶۴ ملے گا پس

لوک ۱٫۸۷۸۶۴ = ۰٫۲۷۳۸۴۳۲

∴ لا = ۱٫۸۷۸۶۴

مثال ۲۔ $\frac{(۶٫۴۵)^{۳} \times \sqrt[۳]{۰٫۰۰۳۴}}{(۹٫۳۷)^{۲} \times \sqrt[۴]{۸٫۹۳}}$ کی قیمت دریافت کرو

فرض کروکہ لا قیمت مطلوبہ ہے اس لئے بموجب دفعات ۱۴۴ اور ۱۴۵

لوک لا = لوک $(۶٫۴۵)^{۳}$ + لوک $(۰٫۰۰۳۴)^{\frac{۱}{۳}}$ − لوک $(۹٫۳۷)^{۲}$ − لوک $(۸٫۹۳)^{\frac{۱}{۴}}$

= ۳ لوک (۶٫۴۵) + $\frac{۱}{۳}$ لوک (۰٫۰۰۳۴) − ۲ لوک (۹٫۳۷) − $\frac{۱}{۴}$ لوک (۸٫۹۳)

اب جدولوں سے معلوم ہوگا کہ

عدد ۶۴۵ کے محاذی لوکارتم ۸۰۹۵۵۹۷ ہے
" ۳۴ " " ۵۳۱۴۷۸۹ "
" ۹۳۷ " " ۹۷۱۷۳۹۶ "
" ۸۹۳ " " ۹۵۰۸۵۱۵ "

اس لئے

لوک لا = ۳ × ٫۸۰۹۵۵۹۷ + ۱/۳ (۴̄٫۵۳۱۴۷۸۹)

− ۲ × ٫۹۷۱۷۳۹۶ − ۱/۴ × ٫۹۵۰۸۵۱۵

لیکن ۱/۳ (۴̄٫۵۳۱۴۷۸۹) = ۱/۳ (۶̄ + ۲٫۵۳۱۴۷۸۹)

= ۲̄ + ٫۸۴۳۸۲۶۳

اس لئے لوک لا = ۲٫۴۲۸۶۷۹۱ + [۲̄ + ٫۸۴۳۸۲۶۳]

− ۱٫۹۴۳۴۷۹۲ − ٫۲۳۷۷۱۲۹

= ۳٫۲۷۲۵۰۵۴ − ۴٫۱۸۱۱۹۲۱

= ۱̄ + ۳٫۲۷۲۵۰۵۴ − ۴٫۱۸۱۱۹۲۱

= ۱̄٫۰۹۱۳۱۳۳

جدولوں سے عدد ۱۲۳۴۰ کے مقابل لوکارتم ٫۰۹۱۳۱۵۲ لکھا ہوا ملے گا

پس

لوک ٫۱۲۳۴۰ = ۱̄٫۰۹۱۳۱۵۲

اس لئے لوک لا = لوک ٫۱۲۳۴۰ تقریباً

اور اس لئے لا = ٫۱۲۳۴۰ تقریباً

جب کسی عدد کا لوکارتم جدول کے کسی لوکارتم کے بالکل مطابق نہ ہو لیکن دو متصل لوکارتموں کے درمیان واقع ہو تو اس صورت میں بھی عدد دریافت

ہو سکتا ہے اس کا بیان اگلے باب میں ہوگا۔

مثال ۳۔ معلوم ہے لوک ۲ = ء۳۰۱۰۳

عدد $۲^{۶۷}$ میں ہندسوں کی تعداد اور $۲^{-۳۷}$ میں پہلے ملحوظ ہندسے کا مقام دریافت کرو۔

لوک $۲^{۶۷}$ = ۶۷ × لوک ۲ = ۶۷ × ء۳۰۱۰۳ = ۲۰ء۱۶۹۰۱

چونکہ $۲^{۶۷}$ کے لوگارتھم کا ممیز ۲۰ ہے اس لئے بموجب دفعہ ۱۴۸ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ $۲^{۶۷}$ میں ۲۱ ہندسے ہیں

نیز لوک $۲^{-۳۷}$ = −۳۷ لوک ۲ = −۳۷ × ء۳۰۱۰۳

= −۱۱ء۱۳۸۱۱ = $\overline{۱۲}$ء۸۶۱۸۹

اس لئے بموجب دفعہ ۱۴۸ عدد $۲^{-۳۷}$ میں علامت اعشاریہ کے بعد ۱۱ صفر ہیں، اس سے معلوم ہوا کہ پہلا ملحوظ ہندسہ کسر اعشاریہ میں بارہویں مقام پر ہے۔

مثال ۴۔ معلوم ہے لوک ۳ = ء۴۷۷۱۲۱۳،

لوک ۷ = ء۸۴۵۰۹۸۰ اور لوک ۱۱ = ۱ء۰۴۱۳۹۲۷

مساوات $۳^{لا} \times ۷^{۲لا+۱} = ۱۱^{لا+۵}$ کو حل کرو

طرفین کے لوگارتھم لینے سے حاصل ہوگا

لوک $۳^{لا}$ + لوک $۷^{۲لا+۱}$ = لوک $۱۱^{لا+۵}$

∴ لا لوک ۳ + (۲لا + ۱) لوک ۷ = (لا + ۵) لوک ۱۱

∴ لا [لوک ۳ + ۲ لوک ۷ − لوک ۱۱] = ۵ لوک ۱۱ − لوک ۷

∴ لا = (۵ لوک ۱۱ − لوک ۷) / (لوک ۳ + ۲ لوک ۷ − لوک ۱۱)

= (۵ء۲۰۶۹۶۳۵ − ء۸۴۵۰۹۸۰) / (ء۴۷۷۱۲۱۳ + ۱ء۶۹۰۱۹۶۰ − ۱ء۰۴۱۳۹۲۷)

$$\frac{۴٫۳۶۱۸۶۵۵}{۱٫۱۲۵۹۲۴۶} = ۳٫۸۷....$$

۱۵۳۔ ثابت کرو کہ

لوک$_{ا}$ م = لوک$_{ب}$ م × لوک$_{ا}$ ب

فرض کرو کہ لوک$_{ا}$ م = لا یعنی ا^{لا} = م

نیز فرض کرو کہ لوک$_{ب}$ م = ما یعنی ب^{ما} = م

∴ ا^{لا} = ب^{ما}

اس لئے لوک$_{ا}$ (ا^{لا}) = لوک$_{ا}$ (ب^{ما})

∴ لا = ما لوک$_{ا}$ ب (دفعہ ۱۴۵)

اس لئے لوک$_{ا}$ م = لوک$_{ب}$ م × لوک$_{ا}$ ب

اس سے یہ نتیجہ نکلا کہ جب کسی عدد کا لوکارتم اساس ب پر معلوم ہو تو مسئلہ مندرجہ بالا کی اعانت سے ہم اُسی عدد کا لوکارتم کسی اور اساس ا پر دریافت کر سکتے ہیں، اگلے باب سے معلوم ہوگا کہ لوکارتموں کو بلا واسطہ اساس ۱۰ کے موافق نہیں نکالنا چاہیئے بلکہ اس میں زیادہ سہولت ہے کہ ان کو سب سے اول ایک اور اساس کے موافق نکالا جائے اور پھر اس مسئلہ کی مدد سے انکو اساس ۱۰ میں منتقل کر دیا جائے۔

امثلہ نمبری ۲۳

۱ـ اگر لوک ۴ = ء۶۰۲۰۶ اور لوک ۳ = ء۴۷۷۱۲۱۳

تو ء۸، ء۰۰۳، ء۰۱۰۸، اور $(ء۰۰۱۸)^{\frac{1}{4}}$ کے لوکارثم دریافت کرو

۲ـ معلوم ہے لوک ۱۱ = ۱ء۰۴۱۳۹۲۷ اور لوک ۱۳ = ۱ء۱۱۳۹۴۳۴،

مفصلہ ذیل کی قیمتیں دریافت کرو

(۱) لوک ۱ء۴۳ (۲) لوک ۱ء۳۳۱ (۳) لوک $\sqrt[4]{۱۴۳}$ اور

(۴) لوک $\sqrt[3]{ء۰۰۱۶۹}$

۳ـ ۲۴۳ء۷، ء۰۱۵۳، ۲ء۸۷۱۳، ء۰۰۰۵۷، ء۰۲۳،

$\sqrt[5]{۲۴۶۱۵}$ اور $(۲۴۵۸۹)^{\frac{3}{4}}$ کے لوکارثموں کے میز دریافت کرو

۴ـ عدد ء۰۰۳ کا پانچواں جذر دریافت کرو

معلوم ہے لوک ۳ = ء۴۷۷۱۲۱۳ اور

لوک ۳۱۲۹۳۶ = ۵ء۴۹۵۴۲۴۳

۵ـ مفصلۂ ذیل کی قیمتیں دریافت کرو

(۱) $۷^{\frac{1}{4}}$ (۲) $(۸۴)^{\frac{2}{5}}$ اور (۳) $(ء۰۲۱)^{\frac{1}{5}}$

معلوم ہے لوک ۲ = ء۳۰۱۰۳، لوک ۳ = ء۴۷۷۱۲۱۳

لوک ۷ = ء۸۴۵۰۹۸، لوک ۱۳۲۰۵۷ = ۵ء۱۲۰۷۲۸۳

لوک ۵۸۸۴۵۳ = ۵ء۷۶۹۷۱۱۷ اور لوک ۴۶۱۷۹۱ = ۵ء۶۶۴۴۴۳۸

۶ـ معلوم ہے لوک ۳ = ء۴۷۷۱۲۱۳

مفصلہ ذیل میں ہندسوں کی تعداد دریافت کرو

(۱) $۳^{۴۳}$ (۲) $۳^{۲۷}$ اور (۳) $۳^{۶۲}$

اور اعداد ذیل میں پہلے ملحوظ ہندسے کا مقام دریافت کرو

(۴) $۳^{-۱۳}$　(۵) $۳^{-۴۴}$　اور　(۶) $۳^{-۶۵}$

۷۔ معلوم ہے لوک ۲ = ۳۰۱۰۳۰ء، لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳ء

اور لوک ۷ = ۸۴۵۰۹۸۰ء

معادلات ذیل کو حل کرو۔

(۱) $۲^{لا} \times ۳^{لا+۴} = ۷^{لا}$

(۲) $۲^{۲لا+۱} \times ۳^{۳لا+۲} = ۷^{۴لا}$

(۳) $۷^{۲لا} \div ۲^{لا-۴} = ۳^{۳لا-۷}$

(۴) $\begin{cases} ۷^{لا+۱} \times ۳^{۲لا+۱} = ۹ \\ ۳^{لا-۱} \div ۲^{ی-۲۱} = ۳^{لا} \end{cases}$

۸۔ جدولوں کی مدد سے ۲۶۷۵۱۰۰۰۰۰ء کا ساتواں جذر دریافت کرو

لوکارتمی جدولوں کی مدد سے مفصلہ ذیل کی تقریبی قیمتیں دریافت کرو

۹۔ $\sqrt[۳]{۶۴۵ء۳}$　　۱۰۔ $\sqrt[۵]{۸۲۳۵۷}$

۱۱۔ $\dfrac{\sqrt[۴]{۵} \times \sqrt[۳]{۷}}{\sqrt[۴]{۸} \times \sqrt[۵]{۹}}$　　۱۲۔ $\sqrt[۳]{\dfrac{۸ء۳ \times ۷ء۲}{۱۶ء۵ \div ۹ء۳}}$

۱۳۔ $\sqrt[۴]{\dfrac{۱۱^{\frac{۲}{۳}} \times ۸^{\frac{۱}{۲}}}{\sqrt{۷۴}\ \sqrt[۵]{۶۲}}}$

جملات ذیل کی ترسیمات کھینچو　۱۴۔ لوک لا　۱۵۔ لوک جب لا

۱۶۔ لوک جم لا　　۱۷۔ لوک مس لا

۱۸۔ لوک قم لا　　۱۹۔ لوک مم لا

باب یازدہم

لوکارتموں اور مثلثی نسبتوں کی جدولیں

اصول اجزائے متناسب

۱۵۴- اوپر اس کا ذکر آچکا ہے کہ ۱ سے لیکر ۱۰۸۰۰۰ تک تمام اعداد کے لوکارتم چیمبر صاحب کی جداول حسابیہ میں مندرج ہیں مثلاً اعداد ۷۴۵۸۳ اور ۷۴۵۸۴ کے لوکارتم بلا واسطہ اُن جدولوں سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

مگر فرض کرو کہ ہمیں ایک ایسے عدد کا لوکارتم مطلوب ہے جو ان دو عددوں کے درمیان واقع ہے مثلاً ایک ایسا عدد ۷۴۵۸۳٫۳ ہے۔ اس عدد کا لوکارتم معلوم کرنے کے لئے ہم اصول اجزائے متناسب سے مدد لیتے ہیں جس کا مطلب یہ ہے کہ کسی عدد کے لوکارتم کی افزائش خود اُس عدد کی افزائش کے متناسب ہوتی ہے۔

مثلاً جدولوں سے حاصل ہوگا

لوک ۷۴۵۸۳ = ۴٫۸۷۲۶۳۹۸ .... (۱)

اور لوک ۷۴۵۸۴ = ۴٫۸۷۲۶۴۵۷ .... (۲)

اب مقدار لوک ۷۴۵۸۳٫۳ صریحاً لوک ۷۴۵۸۳ اور لوک ۷۴۵۸۴ کے درمیان واقع ہوگی۔

فرض کرو کہ لوک ۷۴۵۸۳٫۳ = لوک ۷۴۵۸۳ + لا

= ۴٫۸۷۲۶۳۹۸ + لا .... (۳)

(۱) اور (۲) سے ظاہر ہے کہ جب عدد کی زیادتی ایک ہو تو لوکارتم کی زیادتی ۰٫۰۰۰۰۰۵۹ ہوتی ہے۔

اب مسئلہ اجزائے متناسب کا منشا یہ ہے کہ عدد کی زیادتی ۳٫ کے واسطے لوکارتم کی زیادتی ۳٫ × ۰٫۰۰۰۰۰۵۹ یعنی ۰٫۰۰۰۰۰۱۷۷ ہو۔

اس لئے لوک ۷۴۵۸۳٫۳ = ۴٫۸۷۲۶۳۹۸ + ۰٫۰۰۰۰۰۱۷۷

= ۴٫۸۷۲۶۴۱۵۷

۱۵۵۔ بطور ایک اور مثال کے ہم لوک ۰٫۰۳۸۲۷۵۷ کی قیمت دریافت کریں گے اور عمل کو ایک مختصر صورت میں ترتیب دیں گے۔

جدولوں سے حاصل ہوگا۔

لوک ۰٫۰۳۸۲۷۵ = $\bar{۲}$٫۵۸۲۹۱۵۲

لوک ۰٫۰۳۸۲۷۶ = $\bar{۲}$٫۵۸۲۹۲۶۵

اسلئے فرق متعلقہ ۰٫۰۰۰۰۰۱ = ۰٫۰۰۰۰۱۱۳

" " ۰٫۰۰۰۰۰۰۷ = ۰٫۷ × ۰٫۰۰۰۰۱۱۳

= ۰٫۰۰۰۰۰۷۹۱

∴ لوک ۰٫۰۳۸۲۷۵۷ = ۲̄٫۵۸۲۹۱۵۲

+۰٫۰۰۰۰۰۷۹۱

= ۲̄٫۵۸۲۹۲۳۱۱

اب چونکہ ہمیں صرف سات مرتبہ کے اعشاریہ تک لوکارتموں کی ضرورت ہے اس لئے ہم آخری ہندسے کو حذف کرتے ہیں پس جواب مطلوب ۲̄٫۵۸۲۹۲۳۱ ہے

۱۵۶۔ اوپر کے سوال کا عکس یہ ہے "ایک عدد کا لوکارتم معلوم ہے وہ عدد دریافت کرو" اکثر عملی حسابات میں اس سوال کا حل مطلوب ہوتا ہے۔

اب اگر دیا ہوا لوکارتم جدول میں موجود ہو تو عدد بآسانی حاصل ہو سکتا ہے مگر جب ایسا نہ ہو تو طریق عمل کی توضیح امثلہ ذیل سے ہو گی۔

ایک عدد کا لوکارتم ۲٫۶۲۸۳۹۲۴ ہے اُس کو معلوم کرو

جدولوں میں تلاش کرنے سے معلوم ہوگا کہ لوکارتم ۶۲۸۳۹۲۴ جدول میں موجود نہیں لیکن اس کے قریب ترین لوکارتم ۶۲۸۳۸۸۹ اور ۶۲۸۳۹۹۱ موجود ہیں اور ان کے درمیان لوکارتم معلوم واقع ہے۔

پس لوک ۴۲۵٫۰۰ = ۲٫۶۲۸۳۸۸۹ .... (۱)

اور لوک ۴۲۵٫۰۱ = ۲٫۶۲۸۳۹۹۱ .... (۲)

فرض کرو کہ لوک (۴۲۵٫۰۰ + لا) = ۲٫۶۲۸۳۹۲۴ .... (۳)

(۱) اور (۲) سے ظاہر ہے کہ عدد کے فرق ۰٫۰۱ کے مطابق لوکارتم کا فرق ۰٫۰۰۰۰۱۰۲ ہے۔

نیز (۱) اور (۳) سے ہم دیکھتے ہیں کہ عدد کے فرق لا کے مطابق لوکارثم کا فرق ۳۵ .....۰ ہے۔

اس لئے ہمیں حاصل ہوگا

لا : ۰۱ء = ۳۵ .....۰ : ۱۰۲ .....۰

∴ لا = $\frac{۳۵}{۱۰۲}$ × ۰۱ء = $\frac{۳۵ء}{۱۰۲}$ = ۰۰۳۴۳ء تقریباً

اس لئے عدد مطلوب = ۴۲۵ء۰۰ + ۰۰۳۴۳ء = ۴۲۵ء۰۰۳۴۳

۱۵۷۔ جب لوکارثموں کو جدولوں سے لیا جائے تو متصل لوکارثموں کو ایک دوسرے سے منفی کرنیکی محنت سے ہم اس طرح بچ سکتے ہیں۔

صفحات ۲۱۳ تا ۲۱۷ کے دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ بائیں طرف کے آخری خانے کے سر پر فرق لکھا ہوا ہے اور سب سے اوپر عدد ۸۲ ہے، اس کا یہ مطلب ہے کہ صفحہ مذکورہ پر جو اعداد ہیں اگر ان کا فرق ایک ہو تو ان کے متعلقہ لوکارثموں کا فرق ۸۲.....۰ ہوتا ہے کیونکہ عدد ۸۲ دراصل قائم مقام ۸۲.....۰ کا ہے

۸۲ کے نیچے متواتر سطروں میں ۱ء، ۲ء،...... کے متعلقہ فرق دئے ہوئے ہیں مثلاً پانچویں سطر میں ۵ء کے مطابق فرق ۴۱ .....۰ ہے۔

بطور ایک مثال کے ۵۲۷۴۶ء۷۴ کا لوکارثم دریافت کرو

صفحہ (۲۱۵) پر لوک ۵۲۷۴۶ = ۴ء۷۲۲۱۸۹۵

فرق ۷ء کے لئے = ۵۷ .....۰

فرق ۴۰ء کے لئے

(= $\frac{۱}{۱۰}$ × فرق متعلقہ ۴) = ء۰۰۰۰۰۰۳

∴ لوک ۵۲۷۴۶ء۷۴ = ۴ء۷۲۲۱۹۵۵

اب ہم دو اور مثالیں حل کریں گے جن میں تمام لوکارتم جدولوں سے لئے جائیں گے اور صرف ضروری عمل مندرج ہوگا۔

مثال ۱ ـ ء۰۳۴۵۷۴ کا ساتواں جذر دریافت کرو۔

فرض کرو کہ لا مقدار مطلوبہ ہے تب

لوک لا = $\frac{۱}{۷}$ لوک (ء۰۳۴۵۷۴) = $\frac{۱}{۷}$ ($\bar{۲}$ء۵۳۸۷۴۹۶)

= $\frac{۱}{۷}$ ($\bar{۷}$ + ۵ء۵۳۸۷۴۹۶)

∴ لوک لا = $\bar{۱}$ء۷۹۱۲۴۹۹

لیکن لوک ء۶۱۸۳۷ = $\bar{۱}$ء۷۹۱۲۴۸۴

فرق = ء۰۰۰۰۰۱۵

لیکن فرق ء۰۰۰۰۰۱ کیلئے = ء۰۰۰۰۰۷۱

اسلئے مطلوبہ زیادتی = ء۰۰۰۰۰۲۱۱

اس لئے لا = ء۶۱۸۳۷۲۱۱

۷۱) ۱۵۰ (۲۱۱
۱۴۲
۸۰
۷۱
۹۰
۷۱
۱۹

مثال ۲ ـ اگر ا = ۳۴۵۶۲ء۷۳ اور ب = ۲۸۳۴۷ء۹۱۲ تو ا² ـ ب² کے جذر المربع کی قیمت دریافت کرو۔

اگر لا مقدار مطلوبہ ہو تو ۲ لوک لا = لوک (ا² ـ ب²)

= لوک (ا-ب) + لوک (ا+ب) = لوک ۶۲۱۴ء۸۱۸ + لوک ۶۲۹۱۰ء۶۴۲

اب لوک ۶۲۱۴ء۸ = ۳ء۷۹۳۴۲ | ۷۲
۱ = | ۷
۸ ۶= | ۵

اس لئے لوک ۶۲۱۴ء۸۱۸ = ۳ء۷۹۳۴۲۸۴۶

لوک ۶۲۹۱۰٫۰۰۰ = ۴٫۷۹۸۶۱۹۷

۶	۴۱
۴	۲۸
۲	۱۴

لوک ۶۲۹۱۰٫۶۴۲ = ۴٫۷۹۸۶۲۳۰۹۴

اسلئے جمع کرنے سے ۲ لوک لا = ۸٫۵۹۲۱۵۲۵۵۴

اس لئے لوک لا = ۴٫۲۹۶۰۷۶۳

لیکن لوک ۱۹۷۷۳ = ۴٫۲۹۶۰۷۲۶

∴ فرق = ۳۷

لیکن فرق ۱ کے لئے = ۲۲۰

اسلئے متناسب زیادتی = $\frac{۳۷}{۲۲۰}$ × ۱ = ٫۱۶۸

∴ لا = ۱۹۷۷۳٫۱۶۸

۱۵۸۔ اس جگہ اصول اجزائے متناسب کا ثبوت نہیں دیا جائے گا، یہ اصول صرف بعض حدود کے درمیان صحیح ہے اس کا استعمال صرف اُن عددوں کی صورت میں ہو سکتا ہے جن میں پانچ سے کم ملحوظ ہندسے نہ ہوں اور اس پر بھی ہم اپنے نتائج کی صحت کا صرف پانچ مرتبہ کے اعشاریہ تک اعتبار کر سکتے ہیں۔

مثلاً ہم کو یہ اصول لوک ۲ اور لوک ۳ کی قیمتوں سے لوک ۲٫۵ کی قیمت حاصل کرنے میں نہیں استعمال کرنا چاہیئے کیونکہ اگر ہم ایسا کریں تو چونکہ لوک ۲ = ٫۳۰۱۰۳ اور لوک ۳ = ٫۴۷۷۱۲۱۳ اس لئے لوک ۲٫۵ کی قیمت اس طرح سے ٫۳۸۹۰۷۵ ہوگی

مگر جدولوں میں لوک ۲٫۵ کی قیمت ۰٫۳۹۷۹۴۰۰ مندرج ہے اس لئے معلوم ہوا کہ اس طرح جو قیمت حاصل ہوگی وہ غلط ہوگی۔

مثلثی نسبتوں کی جدولیں

۱۵۹۔ چمبر کی جدولوں میں اُن سب زاویوں کی مثلثی نسبتیں مندرج ہیں جو °۰ اور °۴۵ کے درمیان واقع ہوں اور ان میں متواتر زاویوں کا فرق ۱َ ہے۔

اب چونکہ °۴۵ اور °۹۰ کے درمیان جو زاوئے واقع ہوں اُنکی مثلثی نسبتیں اُن زاویوں کی نسبتوں میں تحویل ہو سکتی ہیں جو °۰ اور °۴۵ کے درمیان واقع ہوں (دفعہ ۸۱) اس سے معلوم ہوا کہ جو زاوئے °۴۵ اور °۹۰ کے درمیان واقع ہوں اُن کی مثلثی نسبتوں کی جدولوں کو جداگانہ مرتب کرنے کی ضرورت نہیں مثلاً

[جب °۷۶ ۱۱َ = جب (°۹۰ − °۱۳ ۴۹َ) = جم °۱۳ ۴۹َ اس لئے جیب مجوزہ معلوم ہو سکتی ہے]

اس قسم کی جدولوں کو لوگارتمی جیوب، جیوب التمام وغیرہ کی جدولوں سے تمیز کرنے کے لئے ان کو طبعی جیوب، جیوب التمام کی جدولیں کہتے ہیں۔

اگر ایک ایسے زاوئے کی جیب مطلوب ہو جس میں صرف درجوں اور دقیقوں کی صحیح تعداد شامل ہو تو وہ جدولوں سے

حاصل ہو سکتی ہے لیکن اگر زاویے میں ثانئے بھی موجود ہوں تو اُس صورت میں ہمیں اصول اجزائے متناسب سے مدد لینی چاہیئے۔

مثال ۱۔ معلوم ہے جب ۲۹° ۱۴′ = ء۴۸۸۳۶۷۴

اور جب ۲۹° ۱۵′ = ء۴۸۸۶۲۱۲

جب ۲۹° ۱۴′ ۳۲″ کی قیمت دریافت کرو

تفریق کرنے سے حاصل ہوگا

جیب کا فرق ۱′ کے لئے = ء۰۰۰۲۵۳۸

اس لئے جیب کا فرق ۳۲″ کے لئے = ء۰۰۰۲۵۳۸ × $\frac{۳۲}{۶۰}$

= ء۰۰۰۱۳۵۳۶

∴ جب ۲۹° ۱۴′ ۳۲″ = ء۴۸۸۳۶۷۴

+ ء۰۰۰۱۳۵۳۶

= ء۴۸۸۵۰۲۷۶

چونکہ ہمیں صرف سات مرتبہ کے اعشاریہ تک جواب کی ضرورت ہے اسلئے ہم ۶ کو ساقط کرتے ہیں اور چونکہ ۷۶ بہ نسبت ۷۰ کے عدد ۸۰ کے زیادہ قریب ہے اس لئے ہم لکھتے ہیں

جیب ۲۹° ۱۴′ ۳۲″ = ء۴۸۸۵۰۲۸

یادداشت جب اعشاریہ کے آٹھویں مقام سے کسی ہندسے کو ساقط کیا جائے تو ساتویں مقام پر جو ہندسہ ہو اُس میں ۱ زیادہ کرنا چاہیئے اگر عدد مسقوطہ ۵ یا ۵ سے بڑا ہو۔

مثال ۲۔ معلوم ہے جم ۱۶° ۲۷′ = ء۹۵۹۰۶۷۲

اور جم ۱۶° ۴۸' = ء۹۵۸۹۸۴۸

جم ۱۶° ۴۷' ۴۷" کی قیمت دریافت کرو

دفعہ ۶۱ میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ جب زاویہ بڑھتا ہے تو اُس کی جیب التمام گھٹتی ہے۔

اس لئے جب زاویہ بقدر ۱' یعنی ۶۰" کے بڑھے گا تو جیب التمام بقدر ء۰۰۰۰۸۲۴ کے گھٹے گی۔

اور اس لئے جب زاویہ بقدر ۴۷" کے بڑھے گا تو جیب التمام بقدر ء۰۰۰۰۸۲۴ × ۴۷/۶۰ کے گھٹے گی۔

∴ جم ۱۶° ۴۷' ۴۷" = ء۹۵۹۰۶۷۲ − ء۰۰۰۰۸۲۴ × ۴۷/۶۰

= ء۹۵۹۰۶۷۲ − ء۰۰۰۰۶۴۵

= ء۹۵۹۰۶۷۲

− ء۰۰۰۰۶۴۵

= ء۹۵۹۰۰۲۷

مختصراً اس کو یوں لکھتے ہیں

جم ۱۶° ۴۸' = ء۹۵۸۹۸۴۸

جم ۱۶° ۴۷' = ء۹۵۹۰۶۷۲

فرق ۱' کیلئے = − ء۰۰۰۰۸۲۴

" ۴۷" " = − ء۰۰۰۰۸۲۴ × ۴۷/۶۰

= − ء۰۰۰۰۶۴۵

∴ جواب = ء۹۵۹۰۶۷۲

− ء۰۰۰۰۶۴۵

= ء۹۵۹۰۰۲۷

۸۲۴
۴۷
۵۷۶۸
۳۲۹۶
۶۰)۳۸۷۲۸
۶۴۵

۱۶۰۔ جب کسی زاویہ کی ایک مثلثی نسبت دی ہوئی ہو تو اُس زاویہ کا دریافت کرنا اب آسان ہوگا۔

مثال۔ ایک زاویہ کا مماس التمام ۱٫۴۱۰۹۳۲۵ ہے اُس کو معلوم کرو، دیا ہوا ہے مم ۳۵° ۱۹' = ۱٫۴۱۱۴۷۹۹

اور مم ۳۵° ۲۰' = ۱٫۴۱۰۶۰۹۸

فرض کرو کہ زاویہ مطلوبہ ۳۵° ۱۹' + لاً ہے

یعنی مم (۳۵° ۱۹' + لاً) = ۱٫۴۱۰۹۳۲۵

اوپر کی تین مساواتوں سے ظاہر ہے کہ

جب زاویہ بقدر ۶۰" کے بڑھتا ہے تو اُس کا مماس التمام بقدر ۰٫۰۰۰۸۷۰۱ کے گھٹتا ہے

جب زاویہ بقدر لاً کے بڑھتا ہے تو اس کا مماس التمام بقدر ۰٫۰۰۰۵۴۷۴ کے گھٹتا ہے۔

∴ لا : ۶۰ = ۵۴۷۴ : ۸۷۰۱ اسلئے لا = ۳۷٫۷

پس زاویہ مطلوبہ = ۳۵° ۱۹' ۳۷٫۷"

۱۶۱۔ ایسے سوالات میں مسئلہ اجزائے متناسب استعمال کرتے وقت طالب علم کو اس بات کا خیال رکھنا چاہیئے کہ جب زاویہ بڑھتا ہے تو اُس کی مثلثی نسبتیں بڑھتی ہیں یا گھٹتی ہیں، شاید اس بات کے یاد رکھنے سے اُس کو مدد ملے کہ جب زاویہ ربع اول میں بڑھتا ہے تو اُس کی تین مثلثی نسبتیں جن کے آخر میں "التمام" ہے یعنی جیب التمام، مماس التمام اور قاطع التمام گھٹتی ہیں۔

لوکارثمی جیوب، جیوب التمام وغیرہ کی جدولیں

۱۶۲- کئی قسم کے مثلثی حسابات ایسے ہیں (مثلاً مثلثات کا حل) جن میں مثلثی نسبتوں کے لوکارثموں کی ضرورت پڑتی ہے۔ اب اگر ہم سب سے اول جدولوں سے کسی زاویہ کی جیب دریافت کریں اور پھر اُس جیب کا لوکارثم دوبارہ جدولوں سے پڑھیں تو اس میں دقت ہوگی، ایسی محنت سے بچنے کے لئے مثلثی نسبتوں کے لوکارثموں کی جدولیں جداگانہ مرتب کی گئی ہیں اور بموجب سابق ان جدولوں میں صرف اُن زاویوں کی قیمتوں کا مندرج کرنا کافی ہے جو ۰° اور ۴۵° کے درمیان واقع ہوں۔ چونکہ زاویہ کی جیب ہمیشہ ایک سے کم ہوتی ہے اس لئے جیب کا لوکارثم منفی ہوگا [دفعہ ۱۴۸]

نیز چونکہ جو زاویہ ۰° اور ۴۵° کے درمیان واقع ہو اُس کا مماس ایک سے کم ہوتا ہے اس لئے اس کا لوکارثم ہمیشہ منفی ہوگا۔ لیکن جو زاویہ ۴۵° اور ۹۰° کے درمیان واقع ہو اُسکا مماس ایک سے بڑا ہوتا ہے اس لئے اس کا لوکارثم ہمیشہ مثبت ہوگا۔

۱۶۳- ہر ایک صورت میں مثلثی جملوں کے لوکارثموں کے ماقبل مناسب علامت تحریر کرنے کی محنت سے بچنے کے لئے جدولوں میں لوکارثموں کی اصلی قیمتیں نہیں لکھی جاتیں لیکن ہر ایک لوکارثم کی اصلی قیمت پر دس کا اضافہ کردیا

جاتا ہے،

مثلاً جب ۳۰° = ½

اس لئے لوک جب ۳۰° = لوک ½ = − لوک ۲

= − ۰٫۳۰۱۰۳ = ۱̄٫۶۹۸۹۷

لیکن جدولوں میں جو قیمت مندرج ہوگی وہ

۱۰ + لوک جب ۳۰° یعنی ۹٫۶۹۸۹۷ ہوگی

نیز مس ۶۰° = √۳

اس لئے لوک مس ۶۰° = ½ لوک ۳ = ½(۰٫۴۷۷۱۲۱۳)

= ۰٫۲۳۸۵۶۰۶

اس لوکارثم کی قیمت جدولوں میں

۱۰ + ۰٫۲۳۸۵۶۰۶ یعنی ۱۰٫۲۳۸۵۶۰۶ مندرج ہوگی۔

ان "جدولی لوکارثموں" کو ہم حرف ل سے تعبیر کریں گے

مثلاً ل جب ۱۵° ۲۵′ = ۱۰ + لوک جب ۱۵° ۲۵′

اور ل قط ۴۸° ۲۳′ = ۱۰ + لوک قط ۴۸° ۲۳′

۱۶۴۔ اگر کسی زاویہ میں صرف درجوں اور دقیقوں کی صحیح تعداد شامل ہو تو اُس کے کسی جملہ کی جدولی لوکارثم بلاواسطہ جدولوں سے حاصل ہو سکتی ہے، لیکن اگر زاویہ میں ثانئے بھی موجود ہوں تو اصول اجزائے متناسب کو استعمال کرنا چاہیئے، اس صورت میں ترکیب عمل دفعہ ۱۵۹ کے بالکل متشابہ ہے۔ اب ہم اس کی اور اس کے عکس سوال کی ایک مثال حل کریں گے۔

مثال ۱۔ معلوم ہے ل قم ۳۲° ۲۱' = ۱۰٫۲۷۱۵۷۳۳

اور ل قم ۳۲° ۲۲' = ۱۰٫۲۷۱۳۷۴۰

ل قم ۳۲° ۲۱' ۵۱" کی قیمت دریافت کرو

جب زاویہ بقدر ۶۰" کے بڑھتا ہے تو اس کا لوکارثم بقدر ۰۰۰۱۹۹۳٫ کے گھٹتا ہے۔ اس لئے جب زاویہ بقدر ۵۱" کے بڑھے گا تو لوکارثم میں متناسب کمی برابر $\frac{۵۱}{۶۰}$ × ۰۰۰۱۹۹۳٫ یعنی ۰۰۰۱۶۹۴٫ کے ہوگی

پس ل قم ۳۲° ۲۱' ۵۱" = ۱۰٫۲۷۱۵۷۳۳
− ۰۰۰۱۶۹۴٫

= ۱۰٫۲۷۱۴۰۳۹

مثال ۲۔ ایک ایسا زاویہ معلوم کرو جس کے ماس کا جدولی لوکارثم ۹٫۴۴۱۷۲۵۰ ہو

فرض کرو کہ لا زاویہ مطلوبہ ہے

جدولوں سے حاصل ہوگا

ل مس لا = ۹٫۴۴۱۷۲۵۰

ل مس ۱۵° ۲۷' = ۹٫۴۴۱۵۱۴۵

فرق = ۲۱۰۵

متناسب زیادتی = $\frac{۲۱۰۵}{۴۹۱۷}$ × ۶۰"

= ۲۵٫۷"

∴ لا = ۱۵° ۲۷' ۲۵٫۷"

ل مس ۱۵° ۲۸' = ۹٫۴۴۲۰۰۶۲

ل مس ۱۵° ۲۷' = ۹٫۴۴۱۵۱۴۵

فرق ۱' کے لئے = ۴۹۱۷

۲۱۰۵
۶۰

۴۹۱۷) ۱۲۶۳۰۰ (۲۵٫۷
۹۸۳۴
۲۷۹۶۰
۲۴۵۸۵
۳۳۷۵۰

مثال ۳۔ معلوم ہے ل جب ۴۱° ۶′ = ۹٫۳۸۶۷۰۴۰

ل قم ۴۱° ۶′ کی قیمت دریافت کرو

لوک جب ۴۱° ۶′ = ل جب ۴۱° ۶′ − ۱۰

= −۱ + ٫۳۸۶۷۰۴۰

اب لوک قم ۴۱° ۶′ = لوک (۱ / جب ۴۱° ۶′)

= − لوک جب ۴۱° ۶′

= ۱ − ٫۳۸۶۷۰۴۰

= ٫۶۱۳۲۹۶۰

اسلئے ل قم ۴۱° ۶′ = ۱۰٫۶۱۳۲۹۶۰

اور اس سے زیادہ عام صورت یہ ہے، چونکہ جب طہ × قم طہ = ۱

∴ لوک جب طہ + لوک قم طہ = ۰

∴ ل جب طہ + ل قم طہ = ۲۰

اس عمل میں اس قسم کی غلطی سے بچنا چاہیئے، طالب علم بعض اوقات فرض کرتا ہے کہ

چونکہ لوک قم ۴۱° ۶′ = − لوک جب ۴۱° ۶′

اس لئے ل قم ۴۱° ۶′ = − ل جب ۴۱° ۶′

اور یہ صریحاً غلط ہے

امثلہ نمبری ۲۴

۱۔ معلوم ہے لوک ۳۵۷۰۵ = ۴٫۵۵۲۷۲۹۰

اور لوک ۳۵۷۰۶ = ۴٫۵۵۲۷۴۱۲

لوک ۳۵۷۰۵ء۷ اور لوک ۳۵ء۷۰۵۸۵ کی قیمتیں دریافت کرو

۲ ـ معلوم ہے لوک ۵ء۸۷۴۲ = ء۷۶۸۹۴۸۷

اور لوک ۵۸۷ء۴۳ = ۲ء۷۶۸۹۵۶۱

لوک ۵۸۷۴۲ء۵۷ اور لوک ء..۵۸۷۴۲ کی قیمتیں دریافت کرو

۳ ـ معلوم ہے لوک ۴۷۸۴۷ = ۴ء۶۷۹۸۵۴۷

اور لوک ۴۷۸۴۸ = ۴ء۶۷۹۸۶۳۸

اُن عددوں کو دریافت کرو جن کے لوکارثم بالترتیب ۲ء۶۷۹۸۵۹۳ اور ۳̄ء۶۷۹۸۶۱۷ ہوں

۴ ـ معلوم ہے لوک ۲۵۸ء۳۶ = ۲ء۴۱۲۲۲۵۳

اور لوک ۲ء۵۸۳۷ = ء۴۱۲۲۴۲۱

وہ عدد دریافت کرو جن کے لوکارثم بالترتیب ء۴۱۲۲۳۷۸ اور ۲̄ء۴۱۲۲۲۸۷ ہوں۔

۵ ـ اس کتاب میں جدول اعداد کا کچھ حصہ جو بطور نمونہ کے دیا گیا ہے اُس کی مدد سے ذیل کے اعداد کے لوکارثم دریافت کرو۔

(۱) ۵۲۵۳۸ء۹۷ (۲) ۵۲۷ء۲۸۶ (۳) ء۰۰۰۵۲۹۶۷۳ اور

وہ عدد دریافت کرو جن کے لوکارثم مفصلہ ذیل ہوں

(۴) ۳ء۷۲۲۱۰۹۸ (۵) ۲̄ء۷۲۴۰۰۷۵ (۶) ء۷۲۱۰۳۸۶

۶ ـ معلوم ہے جب ۴۳° ۲۳′ = ء۶۸۶۸۷۶۱

اور جب ۴۳° ۲۴′ = ء۶۸۷۰۸۷۵

جب ۴۳° ۲۳′ ۴۷″ کی قیمت دریافت کرو

۷ ـ ایک زاویہ کی جیب ء۶۸۷۰۳۴۹ ہے اُس کو معلوم کرو۔

۸- معلوم ہے جم ۳۲° ۱۶′ = ٫۸۴۵۵۷۲۶
اور جم ۳۲° ۱۷′ = ٫۸۴۵۴۱۷۲
جم ۳۲° ۱۶′ ۲۴″ اور جم ۳۲° ۱۶′ ۴۷″ کی قیمت دریافت کرو۔

۹- نیز اُن زاویوں کو دریافت کرو جن کی جیوب التمام
٫۸۴۵۴۸۳۲ اور ٫۸۴۵۵۱۷۶ ہوں۔

۱۰- معلوم ہے مس ۷۶° ۲۱′ = ۴٫۱۱۷۷۷۸۴
اور مس ۷۶° ۲۲′ = ۴٫۱۲۳۰۰۷۹
مس ۷۶° ۲۱′ ۲۹″ اور مس ۷۶° ۲۱′ ۴۷″ کی قیمتیں دریافت کرو

۱۱- معلوم ہے قم ۱۳° ۸′ = ۴٫۴۰۱۰۶۱۶
اور قم ۱۳° ۹′ = ۴٫۳۹۵۵۸۱۷
قم ۱۳° ۸′ ۱۹″ اور قم ۱۳° ۸′ ۳۷″ کی قیمتیں دریافت کرو

۱۲- نیز وہ زاویہ معلوم کرو جس کا قاطع التمام ۴٫۳۹۶۷۸۹ ہو

۱۳- معلوم ہے ل جم ۳۴° ۴۴′ = ۹٫۹۱۴۷۷۲۹
اور ل جم ۳۴° ۴۵′ = ۹٫۹۱۴۶۸۵۲
ل جم ۳۴° ۴۴′ ۲۷″ کی قیمت دریافت کرو

۱۴- نیز زاویہ طہ معلوم کرو جہاں
ل جم طہ = ۹٫۹۱۴۷۳۲۸

۱۵- معلوم ہے ل مم ۷۱° ۲۷′ = ۹٫۵۲۵۷۷۷۹
اور ل مم ۷۱° ۲۸′ = ۹٫۵۲۵۳۵۸۹
ل مم ۷۱° ۲۷′ ۴۷″ کی قیمت دریافت کرو
نیز مساوات ل مم طہ = ۹٫۵۲۵۴۷۸۲ کو حل کرو۔

۱۶- معلوم ہے ل قط ۱۸° ۲۷′ = ۱۰٫۰۲۲۹۱۶۸

اور ل قط ۱۸° ۲۸′ = ۱۰٫۰۲۲۹۵۹۰

ل قط ۱۸° ۲۷′ ۳۵″ کی قیمت دریافت کرو

۱۷- نیز وہ زاویہ معلوم کرو جس کا ل قط مساوی ہو ۱۰٫۰۲۲۹۲۸۵ کے

۱۸- انگریزی درجوں، دقیقوں اور ثانیوں میں وہ زاویہ معلوم کرو جس کی جیب ۰٫۶ ہو، معلوم ہے

لوک ۶ = ۷۷۸۱۵۱۳

ل جب ۳۶° ۵۲′ = ۹٫۷۷۸۱۱۸۶

اور ل جب ۳۶° ۵۳′ = ۹٫۷۷۸۲۸۷۰

۱۶۵- اس جگہ (صفحہ ۲۴۳) چیمبر کے جدولوں سے ہم ایک صفحہ بطور نمونہ کے دیتے ہیں، اس میں اُن سب زاویوں کی مثلثی نسبتوں کے جدولی لوکارتم مندرج ہیں جو ۳۲° اور ۳۳° نیز ۵۷° اور ۵۸° کے درمیان واقع ہیں۔

پہلے خانے میں اُن سب زاویوں کی جدولی جیوب مندرج ہیں جو ۳۲° اور ۳۳° کے درمیان بقدر ایک منٹ یا دقیقہ کے بڑھتے ہیں۔

دوسرے خانے میں لفظ فرق کے نیچے عدد ۲۰۲۱ لکھا ہوا ہے، اس کا یہ مطلب ہے کہ ل جب ۳۲° ۰′ اور ل جب ۳۲° ۱′ کے درمیان فرق ۰٫۰۰۰۲۰۲۱ ہے، اسکی تصدیق ۹٫۷۲۴۲۰۹۷ کو ۹٫۷۲۴۴۱۱۸ سے تفریق کرنے سے ہو سکتی ہے، نیز یاد رہے کہ عدد ۲۰۲۱ کو اعداد ۹٫۷۲۴۲۰۹۷ اور ۹٫۷۲۴۴۱۱۸ کے

محاذی وسط میں کرکے لکھا گیا ہے جس سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ ان دو عددوں کے حاصل تفریق کو تعبیر کرتا ہے۔

دوسرا خانہ جس کے سر پر "فرق" لکھا ہوا ہے بائیں طرف اُس خانہ کے بھی متعلق ہے جس کے راس پر قاطع التمام لکھا ہوا ہے اسی طرح سے پانچواں خانہ جس میں منتصل جدولی لوگارتھموں کے فرق مندرج ہیں دائیں اور بائیں طرف دونوں خانوں کے متعلق ہے۔

۱۶۶- جن خانوں کے سر پر "فرق" لکھا ہوا ہے اُن کے استعمال کرنے میں ایک بات یاد رکھنی چاہیئے۔ اوپر اس کا ذکر ہو چکا ہے کہ دوسرے خانے میں سب سے اوپر جو عدد ۲۰۲۱ لکھا ہوا ہے درحقیقت اس کا مطلب ۰۰۰۲۰۲۱ء ہے، لیکن آٹھویں خانہ کے سر پر جو عدد ۷۹۰ ہے اس کا مطلب ۰۰۷۹۰ء نہیں ہے بلکہ ۰۰۰۰۷۹۰ء ہے، قاعدہ یہ ہے کہ فرق میں جو ہندسہ دائیں طرف اکائی کے مقام پر ہو اُس کو ہمیشہ اعشاریہ کے ساتویں مقام پر رکھ کر بائیں طرف صفروں کی ضروری تعداد کا اضافہ کرنا چاہیئے مثلاً

فرق = ۹ کا مطلب یہ ہے کہ فرق ۰۰۰۰۰۰۹ء ہے

فرق = ۴۷ " " " ۰۰۰۰۰۴۷ء ہے

فرق = ۴۳۵ " " " ۰۰۰۰۴۳۵ء ہے

فرق = ۲۰۲۱ " " " ۰۰۰۲۰۲۱ء ہے

فرق = ۱۲۳۴۸ " " " ۰۰۱۲۳۴۸ء ہے

لوکارثمی جیوب، مماس اور قاطع

۳۲ درجہ

دقیقہ	جیب	فرق	قاطع التمام	مماس	فرق	مماس التمام	قاطع	فرق	جیب التمام	دقیقہ
۰	۹٫۷۲۴۲۰۹۷		۱۰٫۲۷۵۷۹۰۳	۹٫۷۹۵۷۸۹۲		۱۰٫۲۰۴۲۱۰۸	۱۰٫۰۷۱۵۷۹۵		۹٫۹۲۸۴۲۰۵	۶۰
۱	۹٫۷۲۴۴۱۱۸	۲۰۲۱	۱۰٫۲۷۵۵۸۸۲	۹٫۷۹۶۰۷۰۳	۲۸۱۱	۱۰٫۲۰۳۹۲۹۷	۱۰٫۰۷۱۶۵۸۵	۷۹۰	۹٫۹۲۸۳۴۱۵	۵۹
۲	۹٫۷۲۴۶۱۳۸	۲۰۲۰	۱۰٫۲۷۵۳۸۶۲	۹٫۷۹۶۳۵۱۳	۲۸۱۰	۱۰٫۲۰۳۶۴۸۷	۱۰٫۰۷۱۷۳۷۵	۷۹۰	۹٫۹۲۸۲۶۲۵	۵۸
۳	۹٫۷۲۴۸۱۵۶	۲۰۱۸	۱۰٫۲۷۵۱۸۴۴	۹٫۷۹۶۶۳۲۲	۲۸۰۹	۱۰٫۲۰۳۳۶۷۸	۱۰٫۰۷۱۸۱۶۶	۷۹۱	۹٫۹۲۸۱۸۳۴	۵۷
۴	۹٫۷۲۵۰۱۷۴	۲۰۱۸	۱۰٫۲۷۴۹۸۲۶	۹٫۷۹۶۹۱۳۰	۲۸۰۸	۱۰٫۲۰۳۰۸۷۰	۱۰٫۰۷۱۸۹۵۷	۷۹۱	۹٫۹۲۸۱۰۴۳	۵۶
۵	۹٫۷۲۵۲۱۸۹	۲۰۱۵	۱۰٫۲۷۴۷۸۱۱	۹٫۷۹۷۱۹۳۸	۲۸۰۸	۱۰٫۲۰۲۸۰۶۲	۱۰٫۰۷۱۹۷۴۹	۷۹۲	۹٫۹۲۸۰۲۵۱	۵۵
		۲۰۱۵			۲۸۰۷			۷۹۲		
۶	۹٫۷۲۵۴۲۰۴		۱۰٫۲۷۴۵۷۹۶	۹٫۷۹۷۴۷۴۵		۱۰٫۲۰۲۵۲۵۵	۱۰٫۰۷۲۰۵۴۱		۹٫۹۲۷۹۴۵۹	۵۴
۷	۹٫۷۲۵۶۲۱۷	۲۰۱۳	۱۰٫۲۷۴۳۷۸۳	۹٫۷۹۷۷۵۵۱	۲۸۰۶	۱۰٫۲۰۲۲۴۴۹	۱۰٫۰۷۲۱۳۳۴	۷۹۳	۹٫۹۲۷۸۶۶۶	۵۳
۸	۹٫۷۲۵۸۲۲۹	۲۰۱۲	۱۰٫۲۷۴۱۷۷۱	۹٫۷۹۸۰۳۵۶	۲۸۰۵	۱۰٫۲۰۱۹۶۴۴	۱۰٫۰۷۲۲۱۲۷	۷۹۳	۹٫۹۲۷۷۸۷۳	۵۲
۹	۹٫۷۲۶۰۲۴۰	۲۰۱۱	۱۰٫۲۷۳۹۷۶۰	۹٫۷۹۸۳۱۶۰	۲۸۰۴	۱۰٫۲۰۱۶۸۴۰	۱۰٫۰۷۲۲۹۲۱	۷۹۴	۹٫۹۲۷۷۰۷۹	۵۱
۱۰	۹٫۷۲۶۲۲۴۹	۲۰۰۹	۱۰٫۲۷۳۷۷۵۱	۹٫۷۹۸۵۹۶۴	۲۸۰۴	۱۰٫۲۰۱۴۰۳۶	۱۰٫۰۷۲۳۷۱۵	۷۹۴	۹٫۹۲۷۶۲۸۵	۵۰
		۲۰۰۸			۲۸۰۳			۷۹۵		
	جیب التمام	فرق	قاطع	مماس التمام	فرق	مماس	قاطع التمام	فرق	جیب	

۵۷ درجہ

′	جیب	فرق	قاطع التمام	مماس	فرق	مماس التمام	قاطع	فرق	جیب التمام	′
۱۱	۹٫۷۲۶۴۲۵۴		۱۰٫۲۷۳۵۷۴۳	۹٫۷۹۸۸۷۶۷		۱۰٫۲۰۱۱۲۳۳	۱۰٫۰۷۲۴۵۱۰		۹٫۹۲۷۵۴۹۰	۴۹
		۲۰۰۶			۲۸۰۲			۷۹۵		
۱۲	۹٫۷۲۶۶۲۶۴		۱۰٫۲۷۳۳۷۳۶	۹٫۷۹۹۱۵۶۹		۱۰٫۲۰۰۸۴۳۱	۱۰٫۰۷۲۵۳۰۵		۹٫۹۲۷۴۶۹۵	۴۸
		۲۰۰۵			۲۸۰۱			۷۹۶		
۱۰	۹٫۷۲۶۸۲۶۹		۱۰٫۲۷۳۱۷۳۱	۹٫۷۹۹۴۳۷۰		۱۰٫۲۰۰۵۶۳۰	۱۰٫۰۷۲۶۱۰۱		۹٫۹۲۷۳۸۹۹	۴۷
		۲۰۰۴			۲۸۰۰			۷۹۶		
۱۴	۹٫۷۲۷۰۲۷۳		۱۰٫۲۷۲۹۷۲۷	۹٫۷۹۹۷۱۷۰		۱۰٫۲۰۰۲۸۳۰	۱۰٫۰۷۲۶۸۹۷		۹٫۹۲۷۳۱۰۳	۴۶
		۲۰۰۳			۲۸۰۰			۷۹۷		
۱۵	۹٫۷۲۷۲۲۷۶		۱۰٫۲۷۲۷۷۲۴	۹٫۷۹۹۹۹۷۰		۱۰٫۲۰۰۰۰۳۰	۱۰٫۰۷۲۷۶۹۴		۹٫۹۲۷۲۳۰۶	۴۵
		۲۰۰۲			۲۷۹۹			۷۹۷		
۱۶	۹٫۷۲۷۴۲۷۸		۱۰٫۲۷۲۵۷۲۲	۹٫۸۰۰۲۵۶۹		۱۰٫۱۹۹۷۴۳۱	۱۰٫۰۷۲۸۴۹۱		۹٫۹۲۷۱۵۰۹	۴۴
		۲۰۰۰			۲۷۹۸			۷۹۸		
۱۷	۹٫۷۲۷۶۲۷۸		۱۰٫۲۷۲۳۷۲۲	۹٫۸۰۰۵۵۶۷		۱۰٫۱۹۹۴۴۳۳	۱۰٫۰۷۲۹۲۸۹		۹٫۹۲۷۰۷۱۱	۴۳
		۱۹۹۹			۲۷۹۸			۷۹۸		
۱۸	۹٫۷۲۷۸۲۷۷		۱۰٫۲۷۲۱۷۲۳	۹٫۸۰۰۸۳۶۵		۱۰٫۱۹۹۱۶۳۵	۱۰٫۰۷۳۰۰۸۷		۹٫۹۲۶۹۹۱۳	۴۲
		۱۹۹۸			۲۷۹۶			۷۹۹		
۱۹	۹٫۷۲۸۰۲۷۵		۱۰٫۲۷۱۹۷۲۵	۹٫۸۰۱۱۱۶۱		۱۰٫۱۹۸۸۸۳۹	۱۰٫۰۷۳۰۸۸۶		۹٫۹۲۶۹۱۱۴	۴۱
		۱۹۹۶			۲۷۹۶			۸۰۰		
۲۰	۹٫۷۲۸۲۲۷۱		۱۰٫۲۷۱۷۷۲۹	۹٫۸۰۱۳۹۵۷		۱۰٫۱۹۸۶۰۴۳	۱۰٫۰۷۳۱۶۸۶		۹٫۹۲۶۸۳۱۴	۴۰
		۱۹۹۶			۲۷۹۵			۸۰۰		
	جیب التمام	فرق	قاطع	مماس التمام	فرق	مماس	قاطع التمام	فرق	جیب	

۵۶ درجہ

ا	جیب	فرق	قاطع التمام	مماس	فرق	مماس التمام	قاطع	فرق	جیب التمام	ا
٢١	٩٫٧٢٨٤٢٦٧		١٠٫٢٧١٥٧٣٣	٩٫٨٠١٦٧٥٢		١٠٫١٩٨٣٢٤٨	١٠٫٠٧٣٢٤٨٦		٩٫٩٢٦٧٥١٤	٣٩
		١٩٩٣			٢٧٩٣			٨٠٠		
٢٢	٩٫٧٢٨٦٢٦٠		١٠٫٢٧١٣٧٤٠	٩٫٨٠١٩٥٤٦		١٠٫١٩٨٠٤٥٤	١٠٫٠٧٣٣٢٨٦		٩٫٩٢٦٦٧١٤	٣٨
		١٩٩٣			٢٧٩٣			٨٠١		
٢٣	٩٫٧٢٨٨٢٥٣		١٠٫٢٧١١٧٤٧	٩٫٨٠٢٢٣٤٠		١٠٫١٩٧٧٦٦٠	١٠٫٠٧٣٤٠٨٧		٩٫٩٢٦٥٩١٣	٣٧
		١٩٩١			٢٧٩٣			٨٠١		
٢٤	٩٫٧٢٩٠٢٤٤		١٠٫٢٧٠٩٧٥٦	٩٫٨٠٢٥١٣٣		١٠٫١٩٧٤٨٦٧	١٠٫٠٧٣٤٨٨٨		٩٫٩٢٦٥١١٢	٣٦
		١٩٩٠			٢٧٩٢			٨٠٢		
٢٥	٩٫٧٢٩٢٢٣٤		١٠٫٢٧٠٧٧٦٦	٩٫٨٠٢٧٩٢٥		١٠٫١٩٧٢٠٧٥	١٠٫٠٧٣٥٦٩٠		٩٫٩٢٦٤٣١٠	٣٥
		١٩٨٩			٢٧٩١			٨٠٣		
٢٦	٩٫٧٢٩٤٢٢٣		١٠٫٢٧٠٥٧٧٧	٩٫٨٠٣٠٧١٦		١٠٫١٩٦٩٢٨٤	١٠٫٠٧٣٦٤٩٣		٩٫٩٢٦٣٥٠٧	٣٤
		١٩٨٨			٢٧٩٠			٨٠٣		
٢٧	٩٫٧٢٩٦٢١١		١٠٫٢٧٠٣٧٨٩	٩٫٨٠٣٣٥٠٦		١٠٫١٩٦٦٤٩٤	١٠٫٠٧٣٧٢٩٦		٩٫٩٢٦٢٧٠٤	٣٣
		١٩٨٦			٢٧٩٠			٨٠٣		
٢٨	٩٫٧٢٩٨١٩٧		١٠٫٢٧٠١٨٠٣	٩٫٨٠٣٦٢٩٦		١٠٫١٩٦٣٧٠٤	١٠٫٠٧٣٨٠٩٩		٩٫٩٢٦١٩٠١	٣٢
		١٩٨٥			٢٧٨٩			٨٠٥		
٢٩	٩٫٧٣٠٠١٨٢		١٠٫٢٦٩٩٨١٨	٩٫٨٠٣٩٠٨٥		١٠٫١٩٦٠٩١٥	١٠٫٠٧٣٨٩٠٤		٩٫٩٢٦١٠٩٦	٣١
		١٩٨٣			٢٧٨٨			٨٠٤		
٣٠	٩٫٧٣٠٢١٦٥		١٠٫٢٦٩٧٨٣٥	٩٫٨٠٤١٨٧٣		١٠٫١٩٥٨١٢٧	١٠٫٠٧٣٩٧٠٨		٩٫٩٢٦٠٢٩٢	٣٠
		١٩٨٣			٢٧٨٨			٨٠٥		
ا	جیب التمام	فرق	قاطع	مماس التمام	فرق	مماس	قاطع التمام	فرق	جیب	ا

۳۴ درجہ

د	جیب	فرق	قاطع التمام	مماس	فرق	مماس التمام	قاطع	فرق	جیب التمام	د
۳۱	۹،۷۳۰۳۱۴۸	۱۹۸۱	۱۰،۲۴۹۹۵۸۵۲	۹،۸۰۳۳۶۶۱	۲۶۸۶	۱۰،۱۹۵۵۳۳۹	۱۰،۰۷۳۰۵۱۳	۸۰۶	۹،۹۲۵۹۳۸۷	۲۹
۳۲	۹،۷۳۰۵۱۲۹	۱۹۸۰	۱۰،۲۴۹۹۳۸۷۱	۹،۸۰۳۷۴۳۷	۲۶۸۶	۱۰،۱۹۵۲۵۵۳	۱۰،۰۷۳۱۳۱۹	۸۰۶	۹،۹۲۵۸۶۸۱	۲۸
۳۳	۹،۷۳۰۸۱۰۹	۱۹۷۸	۱۰،۲۴۹۱۸۹۱	۹،۸۰۵۰۲۳۳	۲۶۸۶	۱۰،۱۹۴۹۷۶۷	۱۰،۰۷۳۲۱۲۵	۸۰۶	۹،۹۲۵۷۰۷۵	۲۷
۳۴	۹،۷۳۱۰۰۸۷	۱۹۷۷	۱۰،۲۴۸۹۹۱۳	۹،۸۰۵۳۰۱۹	۲۶۸۴	۱۰،۱۹۴۶۹۸۱	۱۰،۰۷۳۲۹۳۱	۸۰۸	۹،۹۲۵۷۰۶۹	۲۶
۳۵	۹،۷۳۱۳۰۶۴	۱۹۷۶	۱۰،۲۴۸۶۹۳۶	۹،۸۰۵۵۸۰۳	۲۶۸۳	۱۰،۱۹۴۴۱۹۷	۱۰،۰۷۳۳۷۳۹	۸۰۷	۹،۹۲۵۶۲۶۱	۲۵
۳۶	۹،۷۳۱۴۰۴۰	۱۹۷۵	۱۰،۲۴۸۵۹۶۰	۹،۸۰۵۸۵۸۷	۲۶۸۳	۱۰،۱۹۴۱۴۱۳	۱۰،۰۷۳۴۵۴۶	۸۰۸	۹،۹۲۵۵۴۵۴	۲۴
۳۷	۹،۷۳۱۶۰۱۵	۱۹۷۴	۱۰،۲۴۸۳۹۸۵	۹،۸۰۶۱۳۷۰	۲۶۸۲	۱۰،۱۹۳۸۶۳۰	۱۰،۰۷۳۵۳۵۴	۸۰۹	۹،۹۲۵۴۶۴۶	۲۳
۳۸	۹،۷۳۱۷۹۸۹	۱۹۷۲	۱۰،۲۴۸۲۰۱۱	۹،۸۰۶۴۱۵۲	۲۶۸۱	۱۰،۱۹۳۵۸۴۸	۱۰،۰۷۴۶۱۶۶	۸۰۹	۹،۹۲۵۳۸۳۷	۲۲
۳۹	۹،۷۳۱۹۹۶۱	۱۹۷۱	۱۰،۲۴۸۰۰۳۹	۹،۸۰۶۶۹۳۳	۲۶۸۱	۱۰،۱۹۳۳۰۶۷	۱۰،۰۷۴۹۹۶۲	۸۱۰	۹،۹۲۵۳۰۲۸	۲۱
۴۰	۹،۷۳۲۱۹۳۲	۱۹۷۰	۱۰،۲۴۷۸۰۶۸	۹،۸۰۶۹۷۱۳	۲۶۸۰	۱۰،۱۹۳۰۲۸۷	۱۰،۰۷۴۷۷۸۲	۸۱۰	۹،۹۲۵۲۲۱۸	۲۰
د	جیب التمام	فرق	قاطع	مماس التمام	فرق	مماس	قاطع التمام	فرق	جیب	د

۵۵ درجہ

۳۲ درجہ

/	جیب	فرق	قاطع التمام	مماس	فرق	مماس التمام	قاطع	فرق	جیب التمام	/
۴۱	۹٫۷۳۲۳۹۰۲	۱۹۶۸	۱۰٫۲۶۷۶۰۹۸	۹٫۸۰۷۲۴۹۴	۲۷۷۹	۱۰٫۱۹۲۷۵۰۶	۱۰٫۰۷۴۸۵۹۲	۸۱۱	۹٫۹۲۵۱۴۰۸	۱۹
۴۲	۹٫۷۳۲۵۸۷۰	۱۹۶۷	۱۰٫۲۶۷۴۱۳۰	۹٫۸۰۷۵۲۷۳	۲۷۷۹	۱۰٫۱۹۲۴۷۲۷	۱۰٫۰۷۴۹۴۰۳	۸۱۱	۹٫۹۲۵۰۵۹۷	۱۸
۴۳	۹٫۷۳۲۷۸۳۷	۱۹۶۶	۱۰٫۲۶۷۲۱۶۳	۹٫۸۰۷۸۰۵۲	۲۷۷۷	۱۰٫۱۹۲۱۹۴۸	۱۰٫۰۷۵۰۲۱۴	۸۱۲	۹٫۹۲۴۹۷۸۶	۱۷
۴۴	۹٫۷۳۲۹۸۰۳	۱۹۶۵	۱۰٫۲۶۷۰۱۹۷	۹٫۸۰۸۰۸۲۹	۲۷۷۷	۱۰٫۱۹۱۹۱۷۱	۱۰٫۰۷۵۱۰۲۶	۸۱۳	۹٫۹۲۴۸۹۷۴	۱۶
۴۵	۹٫۷۳۳۱۷۶۸	۱۹۶۳	۱۰٫۲۶۶۸۲۳۲	۹٫۸۰۸۳۶۰۶	۲۷۷۷	۱۰٫۱۹۱۶۳۹۴	۱۰٫۰۷۵۱۸۳۹	۸۱۲	۹٫۹۲۴۸۱۶۱	۱۵
۴۶	۹٫۷۳۳۳۷۳۱	۱۹۶۲	۱۰٫۲۶۶۶۲۶۹	۹٫۸۰۸۶۳۸۳	۲۷۷۵	۱۰٫۱۹۱۳۶۱۷	۱۰٫۰۷۵۲۶۵۱	۸۱۴	۵٫۹۲۴۷۳۴۹	۱۴
۴۷	۹٫۷۳۳۵۶۹۳	۱۹۶۱	۱۰٫۲۶۶۴۳۰۷	۹٫۸۰۸۹۱۵۸	۲۷۷۵	۱۰٫۱۹۱۰۸۴۲	۱۰٫۰۷۵۳۴۶۵	۸۱۴	۹٫۹۲۴۶۵۳۵	۱۳
۴۸	۹٫۷۳۳۷۶۵۴	۱۹۶۰	۱۰٫۲۶۶۲۳۴۶	۹٫۸۰۹۱۹۳۳	۲۷۷۴	۱۰٫۱۹۰۸۰۶۷	۱۰٫۰۷۵۴۲۷۹	۸۱۴	۹٫۹۲۴۵۷۲۱	۱۲
۴۹	۹٫۷۳۳۹۶۱۴	۱۹۵۸	۱۰٫۲۶۶۰۳۸۶	۹٫۸۰۹۴۷۰۷	۲۷۷۳	۱۰٫۱۹۰۵۲۹۳	۱۰٫۰۷۵۵۰۹۳	۸۱۵	۹٫۹۲۴۴۹۰۷	۱۱
۵۰	۹٫۷۳۴۱۵۷۲	۱۹۵۶	۱۰٫۲۶۵۸۴۲۸	۹٫۸۰۹۷۴۸۰	۲۷۷۳	۱۰٫۱۹۰۲۵۲۰	۱۰٫۰۷۵۵۹۰۸	۸۱۵	۹٫۹۲۴۴۰۹۲	۱۰
/	جیب التمام	فرق	قاطع	مماس التمام	فرق	مماس	قاطع التمام	فرق	جیب	/

۵۷ درجہ

۳۲ درجه

/	جیب	فرق	قاطع التمام	مماس	فرق	مماس التمام	قاطع	فرق	جیب التمام	/
۵۱	۹٫۷۳۴۳۵۲۹		۱۰٫۲۶۵۶۴۷۱	۹٫۸۱۰۰۲۵۳		۱۰٫۱۸۹۹۷۴۷	۱۰٫۰۷۵۶۷۲۳		۹٫۹۲۴۳۲۷۷	۹
۵۲	۹٫۷۳۴۵۴۸۵	۱۹۵۶	۱۰٫۲۶۵۴۵۱۵	۹٫۸۱۰۳۰۲۵	۲۷۷۲	۱۰٫۱۸۹۶۹۷۵	۱۰٫۰۷۵۷۵۳۹	۸۱۶	۹٫۹۲۴۲۴۶۱	۸
۵۳	۹٫۷۳۴۷۴۴۰	۱۹۵۵	۱۰٫۲۶۵۲۵۶۰	۹٫۸۱۰۵۷۹۶	۲۷۷۱	۱۰٫۱۸۹۴۲۰۴	۱۰٫۰۷۵۸۳۵۶	۸۱۷	۹٫۹۲۴۱۶۴۴	۷
۵۴	۹٫۷۳۴۹۳۹۳	۱۹۵۳	۱۰٫۲۶۵۰۶۰۷	۹٫۸۱۰۸۵۶۶	۲۷۷۰	۱۰٫۱۸۹۱۴۳۴	۱۰٫۰۷۵۹۱۷۳	۸۱۷	۹٫۹۲۴۰۸۲۷	۶
۵۵	۹٫۷۳۵۱۳۴۵	۱۹۵۲	۱۰٫۲۶۴۸۶۵۵	۹٫۸۱۱۱۳۳۶	۲۷۷۰	۱۰٫۱۸۸۸۶۶۴	۱۰٫۰۷۵۹۹۹۰	۸۱۷	۹٫۹۲۴۰۰۱۰	۵
۵۶	۹٫۷۳۵۳۲۹۶	۱۹۵۱	۱۰٫۲۶۴۶۷۰۴	۹٫۸۱۱۴۱۰۵	۲۷۶۹	۱۰٫۱۸۸۵۸۹۵	۱۰٫۰۷۶۰۸۰۹	۸۱۹	۹٫۹۲۳۹۱۹۱	۴
۵۷	۹٫۷۳۵۵۲۴۶	۱۹۵۰	۱۰٫۲۶۴۴۷۵۴	۹٫۸۱۱۶۸۷۳	۲۷۶۸	۱۰٫۱۸۸۳۱۲۷	۱۰٫۰۷۶۱۶۲۷	۸۱۸	۹٫۹۲۳۸۳۷۳	۳
۵۸	۹٫۷۳۵۷۱۹۵	۱۹۴۹	۱۰٫۲۶۴۲۸۰۵	۹٫۸۱۱۹۶۴۱	۲۷۶۸	۱۰٫۱۸۸۰۳۵۹	۱۰٫۰۷۶۲۴۴۶	۸۱۹	۹٫۹۲۳۷۵۵۴	۲
۵۹	۹٫۷۳۵۹۱۴۲	۱۹۴۷	۱۰٫۲۶۴۰۸۵۸	۹٫۸۱۲۲۴۰۸	۲۷۶۷	۱۰٫۱۸۷۷۵۹۲	۱۰٫۰۷۶۳۲۶۶	۸۲۰	۹٫۹۲۳۶۷۳۴	۱
۶۰	۹٫۷۳۶۱۰۸۸	۱۹۴۶	۱۰٫۲۶۳۸۹۱۲	۹٫۸۱۲۵۱۷۴	۲۷۶۶	۱۰٫۱۸۷۴۸۲۶	۱۰٫۰۷۶۴۰۸۶	۸۲۰	۹٫۹۲۳۵۹۱۴	۰
/	جیب التمام	فرق	قاطع	مماس التمام	فرق	مماس	قاطع التمام	فرق	جیب	/

۵۷ درجه

۱۶۷۔ جدول صفحات ۲۴۴ تا ۲۴۸ سے ۵۷° اور ۵۸° کے درمیان جو زاویئے واقع ہوں اُن کی نسبتوں کے جدولی لوگارثم بھی معلوم ہو سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ل مس ۵۷° ۲۰' مطلوب ہے، اگر ہم صفحہ مذکورہ کی سب سے نیچے کی سطر سے شروع ہو کر اُس خانے میں اوپر دیکھتے جائیں جس کے بائیں پر ماس لکھا ہوا ہے تو ہمیں ایک عدد ۱۰٫۱۹۳۰۲۸۶ ملے گا جس کے بائیں طرف افقی سطر کے آخیر میں عدد ۲۰ لکھا ہوا ہے، یہ عدد ل مس ۵۷° ۲۰' کی قیمت ہے۔

امثلہ نمبری ۲۵

۱۔ معلوم ہے جم طہ = ٫۹۷۲۵۳۸۲

جم ۱۳° ۲۷' = ٫۹۷۲۵۷۳۳

فرق ا' کے لئے = ۶۷۷

زاویہ طہ کی قیمت دریافت کرو

۲۔ ایک زاویئے کی جیب ۳/۸ ہے اُس کو معلوم کرو

معلوم ہے جیب ۲۲° ا' = ٫۳۷۴۸۷۶۳

نیز ا' کے لئے فرق = ۲۶۹۶

۳۔ معلوم ہے قم ۶۵° ۲۴' = ۱٫۰۹۹۸۲۴۴

فرق ا' کے لئے = ۱۳۶۴

قم ۶۵° ۲۴' ۳۷'' کی قیمت دریافت کرو، نیز وہ زاویہ معلوم کرو جس کا

قاطع التمام ۰۰۹۹۷۹۳۸ر۱ ہو

۴- ل مس ۲۲° ۳۷′ = ۹ر۶۱۹۷۲۰۵

فرق ۱′ کے لئے = ۳۵۵۷

ل مس ۲۲° ۳۷′ ۴۲″ کی قیمت دریافت کرو، نیز وہ زاویہ معلوم کرو جس کا ل مس = ۹ر۶۱۹۵۲۸۳

۵- وہ زاویہ معلوم کرو جس کی ل جم برابر ۹ر۹۹۳ کے ہو۔ معلوم ہے ل جم ۱۰° ۱۵′ = ۹ر۹۹۳۰۱۳۱

اور فرق ۱′ کے لئے = ۲۲۹

۶- وہ زاویہ دریافت کرو جس کا ل قط برابر ۱۰ر۱۵ کے ہو معلوم ہے ل قط ۴۴° ۵۵′ = ۱۰ر۱۴۹۸۸۴۳ اور

۱′ کے لئے فرق = ۱۲۶۰

۷- جدول صفحات ۲۴۳ تا ۲۴۸ سے جملات ذیل کی قیمتیں دریافت کرو۔

(۱) ل جیب ۳۲° ۱۸′ ۲۳″ (۲) ل جم ۳۲° ۱۶′ ۴۹″

(۳) ل مم ۳۲° ۲۹′ ۴۳″ (۴) ل قط ۳۲° ۵۲′ ۲۷″

(۵) ل مس ۵۷° ۴۵′ ۲۸″ (۶) ل قم ۵۷° ۴۸′ ۲۱″

(۷) ل جم ۵۷° ۵۸′ ۲۹″

۸- اُسی جدول کی مدد سے ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

(۱) ل مس طہ = ۱۰ر۱۹۵۹۲۶۱

(۲) ل قم طہ = ۱۰ر۰۷۳۸۱۲۵

(۳) ل جم طہ = ۹ر۹۲۵۹۲۸۳

(۴) ل جیب طہ = ۹ر۹۲۴۱۳۵۲

۹- جدولوں سے ل مس ۱۶° ۶′ ۲۳″ کی قیمت دریافت کرو اور مماس کے جذر کی قیمت کا حساب لگاؤ

۱۰- مقادیر ذیل کو لوکارثمی حسابات کے قابل بناؤ یعنی اُن کو حاصل ضرب کی صورت میں بیان کرو

(۱) ۱ + مس لا × مس ما (۲) ۱ - مس لا × مس ما

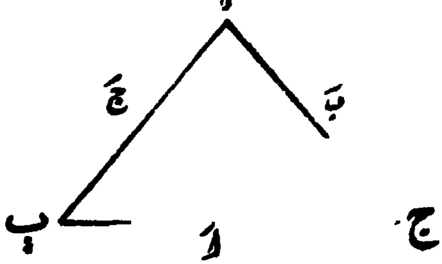
(۳) مم لا + مس ما (۴) مم لا - مس ما

(۵) $\dfrac{\text{۱ - جم ۲ لا}}{\text{۱ + جم ۲ لا}}$ (۶) $\dfrac{\text{مس لا + مس ما}}{\text{مم لا + مم ما}}$

باب دوازدہم

مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کی مثلثی نسبتوں کے تعلقات

۱۶۸۔ مثلث کے زاویوں کو ہم آیندہ حروف ا، ب، ج سے اور ان کے مقابل کے اضلاع کو بالترتیب حروف اَ، بَ، جَ سے تعبیر کرینگے، یاد رہے کہ اَ، بَ، جَ اعداد ہیں کیونکہ وہ مثلث کے اضلاع کے طولوں کو کسی ایک پیمانہ واحد کی رقوم میں بیان کرتے ہیں۔



ب ج = اَ

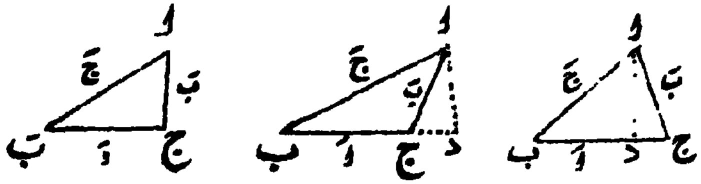
ج ا = بَ

ا ب = جَ

۱۶۹۔ مسئلہ۔ کسی مثلث ا ب ج میں ثابت کرو کہ

(جب ا) / اَ = (جب ب) / بَ = (جب ج) / جَ

یعنی مثلث کے زاویوں کی جیوب مقابل کے اضلاع کے متناسب ہوتی ہیں



زاویہ ا سے عمود اد مقابل کے ضلع ب ج یا ب ج ممدودہ پر نکالو جو اس کو نقطہ د پر ملے۔

مثلث ا ب د میں

$\frac{\text{اد}}{\text{اب}}$ = جب ب یعنی اد = جَ جب ب

مثلث اج د میں

$\frac{\text{اد}}{\text{اج}}$ = جب ج یعنی اد = بَ جب ج

[اگر زاویہ ج منفرجہ ہو جیسا کہ دوسری شکل میں تو $\frac{\text{اد}}{\text{بَ}}$ = جب اج د
= جب (۱۸۰° - ج) = جب ج (دفعہ ۷۹) یعنی اد = بَ جب ج]

اد کی یہ دونوں قیمتیں برابر رکھنے سے

جَ جب ب = بَ جب ج

یعنی $\frac{\text{جب ب}}{\text{بَ}} = \frac{\text{جب ج}}{\text{جَ}}$

اسی طرح زاویہ ب سے ج ا پر عمود نکالنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{\text{جب ج}}{\text{ج}'} = \frac{\text{جب ا}}{\text{ا}'}$$

اگر زاویہ ج قائمہ ہو جیسا کہ تیسری شکل میں تو جب ج = ۱

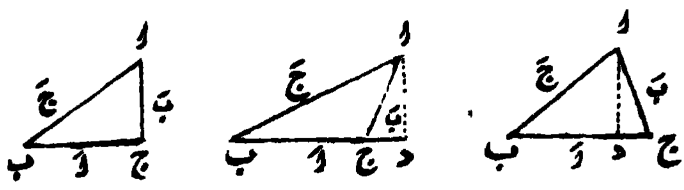
جب ا = $\frac{\text{ا}'}{\text{ج}'}$ اور جب ب = $\frac{\text{ب}'}{\text{ج}'}$

اس لئے $\frac{\text{جب ا}}{\text{ا}'} = \frac{\text{جب ب}}{\text{ب}'} = \frac{۱}{\text{ج}'} = \frac{\text{جب ج}}{\text{ج}'}$

پس ہر ایک صورت میں

$$\frac{\text{جب ا}}{\text{ا}'} = \frac{\text{جب ب}}{\text{ب}'} = \frac{\text{جب ج}}{\text{ج}'}$$

۱۷۰- کسی مثلث میں کسی زاویہ کی جیب التمام کو اضلاع کی رقوم میں دریافت کرو۔



فرض کرو کہ مثلث ا ب ج میں اگر زاویہ ا سے عمود ا د مقابل کے ضلع ب ج یا ب ج ممدودہ پر نکالا جائے تو وہ اس کو نقطہ د پر ملتا ہے

صورت اول- فرض کرو کہ زاویہ ج حادہ ہے دیکھو شکل اوّل

بموجب اقلیدس م ۲ ش ۱۳

$$\text{ا ب}^2 = \text{ب ج}^2 + \text{ج ا}^2 - ۲\,\text{ب ج} \times \text{ج د} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (۱)$$

لیکن $\frac{\text{ج د}}{\text{ج ا}}$ = جم ج یعنی ج د = بَ جم ج اس لئے

(۱) سے حاصل ہوگا

$$\text{جَ}^{2} = \text{اَ}^{2} + \text{بَ}^{2} - ۲\,\text{اَ} \times \text{بَ جم ج}$$

$$\text{یعنی } ۲\,\text{اَ بَ جم ج} = \text{اَ}^{2} + \text{بَ}^{2} - \text{جَ}^{2}$$

$$\text{یعنی جم ج} = \frac{\text{اَ}^{2} + \text{بَ}^{2} - \text{جَ}^{2}}{۲\,\text{اَ بَ}}$$

صورت دوم۔ فرض کرو کہ زاویہ ج منفرجہ ہے جیسا کہ دوسری شکل میں

تب بموجب اقلیدس م ۲ ش ۱۲

$$\text{ا ب}^{2} = \text{ب ج}^{2} + \text{ج ا}^{2} + ۲\,\text{ب ج} \times \text{ج د} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

$$\text{لیکن } \frac{\text{ج د}}{\text{ج ا}} = \text{جم ا ج د} = \text{جم}(۱۸۰^{\circ} - \text{ج}) = -\,\text{جم ج}$$

(دفعہ ۷۸)

پس ج د = − بَ جم ج

اس لئے (۲) سے حاصل ہوگا

$$\text{جَ}^{2} = \text{اَ}^{2} + \text{بَ}^{2} + ۲\,\text{اَ}\,(-\,\text{بَ جم ج})$$

$$= \text{اَ}^{2} + \text{بَ}^{2} - ۲\,\text{اَ بَ جم ج}$$

پس موافق صورت اول

$$\text{جم ج} = \frac{\text{اَ}^{2} + \text{بَ}^{2} - \text{جَ}^{2}}{۲\,\text{اَ بَ}}$$

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\text{جم ا} = \frac{\text{ب}^2 + \text{ج}^2 - \text{ا}^2}{2\,\text{ب}\,\text{ج}}$$

$$\text{اور جم ب} = \frac{\text{ج}^2 + \text{ا}^2 - \text{ب}^2}{2\,\text{ج}\,\text{ا}}$$

اگر مثلث کا ایک زاویہ (مثلاً ج) قائمہ ہو تو اوپر کے ضابطے سے حاصل ہوگا $\text{ج}^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2$ یعنی جم ج = ۰ اور یہ درست ہے کیونکہ زاویہ ج قائمہ ہے۔

پس معلوم ہوا کہ ج کی ہر ایک قیمت کے لئے ضابطہ درست ہے

مثال۔ اگر ا = ۱۵، ب = ۳۶، ج = ۳۹

$$\text{تو جم ا} = \frac{36^2 + 39^2 - 15^2}{2 \times 36 \times 39}$$

$$= \frac{3^2(12^2 + 13^2 - 5^2)}{2 \times 3^2 \times 12 \times 13} = \frac{288}{13 \times 24} = \frac{12}{13}$$

۱۷۱۔ مثلث کے نصف زاویوں کی جیوب کو اضلاع کی رقوم میں دریافت کرو

کسی مثلث میں بموجب دفعہ ۱۷۰

$$\text{جم ا} = \frac{\text{ب}^2 + \text{ج}^2 - \text{ا}^2}{2\,\text{ب}\,\text{ج}}$$

لیکن بموجب دفعہ ۱۱۵

$$\text{جم ا} = 1 - 2\,\text{جیب}^2\,\frac{\text{ا}}{2}$$

$$\text{اس لئے}\quad 2\,\text{جیب}^2\,\frac{\text{ا}}{2} = 1 - \text{جم ا} = 1 - \frac{\text{ب}^2 + \text{ج}^2 - \text{ا}^2}{2\,\text{ب}\,\text{ج}}$$

$$= \frac{\text{۲ ب ج} - \text{ب}^2 - \text{ج}^2 + \text{ا}^2}{\text{۲ ب ج}}$$

$$= \frac{\text{ا}^2 - (\text{ب}^2 + \text{ج}^2 - \text{۲ ب ج})}{\text{۲ ب ج}} = \frac{\text{ا}^2 - (\text{ب} - \text{ج})^2}{\text{۲ ب ج}}$$

$$= \frac{[\text{ا} + (\text{ب} - \text{ج})][\text{ا} - (\text{ب} - \text{ج})]}{\text{۲ ب ج}}$$

$$= \frac{(\text{ا} + \text{ب} - \text{ج})(\text{ا} - \text{ب} + \text{ج})}{\text{۲ ب ج}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۱})$$

فرض کرو کہ ۲ن = ا + ب + ج یعنی ن مثلث کے نصف مجموعۂ اضلاع کو تعبیر کرتا ہے۔

تب $\text{ا} + \text{ب} - \text{ج} = \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{۲ج} = \text{۲ن} - \text{۲ج} = \text{۲}(\text{ن} - \text{ج})$

اور $\text{ا} - \text{ب} + \text{ج} = \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{۲ب} = \text{۲ن} - \text{۲ب} = \text{۲}(\text{ن} - \text{ب})$

ربط (۱) سے حاصل ہوگا

$$\text{۲ جب}^2 \frac{\text{ا}}{\text{۲}} = \frac{\text{۲}(\text{ن} - \text{ج}) \times \text{۲}(\text{ن} - \text{ب})}{\text{۲ ب ج}} = \text{۲} \frac{(\text{ن} - \text{ب})(\text{ن} - \text{ج})}{\text{ب ج}}$$

$$\therefore \text{جب} \frac{\text{ا}}{\text{۲}} = \sqrt{\frac{(\text{ن} - \text{ب})(\text{ن} - \text{ج})}{\text{ب ج}}} \quad \ldots\ldots (\text{۲})$$

اسی طرح سے $\text{جب} \frac{\text{ب}}{\text{۲}} = \sqrt{\frac{(\text{ن} - \text{ج})(\text{ن} - \text{ا})}{\text{ج ا}}}$

اور $\text{جب} \frac{\text{ج}}{\text{۲}} = \sqrt{\frac{(\text{ن} - \text{ا})(\text{ن} - \text{ب})}{\text{ا ب}}}$

۱۷۲۔ مثلث کے نصف زاویوں کی جیوب التمام کو اضلاع کی رقوم میں دریافت کرو

بموجب دفعہ ۱۱۵

$$\text{جم ا} = ۲\,\text{جم}^{2}\frac{\text{ا}}{۲} - ۱$$

اس لئے

$$۲\,\text{جم}^{2}\frac{\text{ا}}{۲} = ۱ + \text{جم ا} = ۱ + \frac{\text{بَ}^{2} + \text{جَ}^{2} - \text{اَ}^{2}}{۲\,\text{بَ جَ}}$$

$$= \frac{۲\,\text{بَ جَ} + \text{بَ}^{2} + \text{جَ}^{2} - \text{اَ}^{2}}{۲\,\text{بَ جَ}} = \frac{(\text{بَ} + \text{جَ})^{2} - \text{اَ}^{2}}{۲\,\text{بَ جَ}}$$

$$= \frac{[(\text{بَ} + \text{جَ}) + \text{اَ}][(\text{بَ} + \text{جَ}) - \text{اَ}]}{۲\,\text{بَ جَ}} = \frac{(\text{اَ} + \text{بَ} + \text{جَ})(\text{بَ} + \text{جَ} - \text{اَ})}{۲\,\text{بَ جَ}} \quad \ldots\ldots (۱)$$

اب

$$\text{بَ} + \text{جَ} - \text{اَ} = \text{اَ} + \text{بَ} + \text{جَ} - ۲\,\text{اَ} = ۲\,\text{ن} - ۲\,\text{اَ} = ۲(\text{ن} - \text{اَ})$$

پس (۱) سے حاصل ہوگا

$$۲\,\text{جم}^{2}\frac{\text{ا}}{۲} = \frac{۲\,\text{ن} \times ۲(\text{ن} - \text{اَ})}{۲\,\text{بَ جَ}} = ۲\,\frac{\text{ن}(\text{ن} - \text{اَ})}{\text{بَ جَ}}$$

$$\therefore\ \text{جم}\frac{\text{ا}}{۲} = \sqrt{\frac{\text{ن}(\text{ن} - \text{اَ})}{\text{بَ جَ}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

اسی طرح سے

$$\text{جم}\frac{\text{ب}}{۲} = \sqrt{\frac{\text{ن}(\text{ن} - \text{بَ})}{\text{جَ اَ}}} \ \text{اور}\ \text{جم}\frac{\text{ج}}{۲} = \sqrt{\frac{\text{ن}(\text{ن} - \text{جَ})}{\text{اَ بَ}}}$$

۱۷۳۔ نصف زاویوں کے مماسات کو اضلاع کی رقوم

میں دریافت کرو

چونکہ $\text{مس}\frac{\text{ا}}{۲} = \frac{\text{جب}\frac{\text{ا}}{۲}}{\text{جم}\frac{\text{ا}}{۲}}$

اس لئے بموجب (۲) دفعات ۱۷۱ اور ۱۷۲

$$\text{مس}\frac{\text{ا}}{۲} = \sqrt{\frac{(\text{ن}-\text{ب})(\text{ن}-\text{ج})}{\text{ب ج}}} \div \sqrt{\frac{\text{ن}(\text{ن}-\text{ا})}{\text{ب ج}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\text{ن}-\text{ب})(\text{ن}-\text{ج})}{\text{ن}(\text{ن}-\text{ا})}}$$

اسی طرح سے

$$\text{مس}\frac{\text{ب}}{۲} = \sqrt{\frac{(\text{ن}-\text{ج})(\text{ن}-\text{ا})}{\text{ن}(\text{ن}-\text{ب})}} \quad \text{اور} \quad \text{مس}\frac{\text{ج}}{۲} = \sqrt{\frac{(\text{ن}-\text{ا})(\text{ن}-\text{ب})}{\text{ن}(\text{ن}-\text{ج})}}$$

چونکہ ہر ایک مثلث میں زاویہ ا ہمیشہ $< ۱۸۰^\circ$ اسلئے $\frac{\text{ا}}{۲}$ ہمیشہ $< ۹۰^\circ$

اس لئے $\frac{\text{ا}}{۲}$ کی جیب، جیب التمام اور ماس ہمیشہ مثبت ہونگے (دفعہ ۵۸)
اس لئے معلوم ہوا کہ اس دفعہ میں اور گذشتہ دو دفعات میں علامات جذر کے ماقبل ہمیشہ مثبت علامت لینی چاہیئے۔

۱۷۴۔ مثال۔ اگر ا = ۱۳، ب = ۱۴ اور ج = ۱۵

تو $\text{ن} = \frac{۱۳+۱۴+۱۵}{۲} = ۲۱$، ن - ا = ۸، ن - ب = ۷

اور ن - ج = ۶

اس لئے
$$\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲} = \sqrt{\frac{۶\times۷}{۱۵\times۱۴}} = \frac{۱}{\sqrt{۵}} = \frac{۱}{۵}\sqrt{۵}$$

$$\text{جب}\,\frac{\text{ب}}{۲} = \sqrt{\frac{۸\times۶}{۱۳\times۱۵}} = \frac{۴}{\sqrt{۶۵}} = \frac{۴}{۶۵}\sqrt{۶۵}$$

$$\text{جم}\,\frac{\text{ج}}{۲} = \sqrt{\frac{۶\times۲۱}{۱۴\times۱۳}} = \frac{۳}{\sqrt{۱۳}} = \frac{۳}{۱۳}\sqrt{۱۳}$$

$$\text{مس}\,\frac{\text{ب}}{۲} = \sqrt{\frac{۸\times۶}{۷\times۲۱}} = \frac{۴}{۷}$$

۱۷۵۔ مثلث کے کسی زاویہ کی جیب کو اضلاع کی رقوم میں دریافت کرو۔

بموجب دفعہ ۱۱۵

$$\text{جب ا} = ۲\,\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}\,\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲}$$

لیکن دفعات گزشتہ میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ

$$\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲} = \sqrt{\frac{(\text{ن}-\text{بَ})(\text{ن}-\text{جَ})}{\text{بَ جَ}}} \quad \text{اور}\quad \text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲} = \sqrt{\frac{\text{ن}(\text{ن}-\text{اَ})}{\text{بَ جَ}}}$$

اس لئے
$$\text{جب ا} = ۲\sqrt{\frac{(\text{ن}-\text{بَ})(\text{ن}-\text{جَ})}{\text{بَ جَ}}}\sqrt{\frac{\text{ن}(\text{ن}-\text{اَ})}{\text{بَ جَ}}}$$

$$\therefore\ \text{جب ا} = \frac{۲}{\text{بَ جَ}}\sqrt{\text{ن}(\text{ن}-\text{اَ})(\text{ن}-\text{بَ})(\text{ن}-\text{جَ})}$$

امثلہ نمبری ۲۶

کسی مثلث میں

۱۔ معلوم ہے اَ = ۲۵، بَ = ۵۲ اور جَ = ۶۳

مس $\frac{ا}{۲}$ ، مس $\frac{ب}{۲}$ اور مس $\frac{ج}{۲}$ معلوم کرو

۲۔ معلوم ہے اَ = ۱۲۵ ، بَ = ۱۲۳ اور جَ = ۶۲
مثلث کے نصف زاویوں کی جیوب اور زاویوں کی جیوب دریافت کرو

۳۔ معلوم ہے اَ = ۱۸ ، بَ = ۲۴ اور جَ = ۳۰
جب ا ، جب ب ، جب ج دریافت کرو
ہر صورت میں ترسیمی عمل سے تصدیق کرو

۴۔ معلوم ہے اَ = ۳۵ ، بَ = ۸۴ اور جَ = ۹۱
مس ا ، مس ب ، مس ج دریافت کرو

۵۔ معلوم ہے اَ = ۱۳ ، بَ = ۱۴ اور جَ = ۱۵
زاویوں کی جیوب دریافت کرو۔ نیز عمل ترسیمی سے اپنے نتائج کی تصدیق کرو

۶۔ معلوم ہے اَ = ۲۸۷ ، بَ = ۸۱۶ ، جَ = ۸۶۵
مس $\frac{ا}{۲}$ اور مس ا کی قیمتیں دریافت کرو،

۷۔ معلوم ہے اَ = $\sqrt{۳}$ ، بَ = $\sqrt{۲}$ اور جَ = $\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۲}$
مثلث کے زاوئے دریافت کرو،

۱۷۶۔ ثابت کرو کہ کسی مثلث میں
اَ = بَ جم ج + جَ جم ب

دیکھو شکل دفعہ ۱۷۰
صورت اول میں
$\frac{ب د}{ب ا}$ = جم ب یعنی ب د = جَ جم ب

اور $\frac{\text{ج د}}{\text{ج ا}}$ = جم ج یعنی ج د = بَ جم ج

اس لئے اَ = ب ج = ب د + د ج = جَ جم ب + بَ جم ج

صورت دوم میں

$\frac{\text{ب د}}{\text{ب ا}}$ = جم ب یعنی ب د = جَ جم ب

اور $\frac{\text{ج د}}{\text{ج ا}}$ = جم ا ج د = جم (180° - ج)

= - جم ج (دفعہ ۷۸)

پس ج د = - بَ جم ج

اس لئے اس صورت میں

اَ = ب ج = ب د - ج د = جَ جم ب - (- بَ جم ج)

پس ہر ایک صورت میں

اَ = بَ جم ج + جَ جم ب

اسی طرح سے بَ = جَ جم ا + اَ جم ج

اور جَ = اَ جم ب + بَ جم ا

۱۷۷۔ ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

مس $\frac{\text{ب - ج}}{2}$ = $\frac{\text{بَ - جَ}}{\text{بَ + جَ}}$ مم $\frac{\text{ا}}{2}$

کسی مثلث میں

$$\frac{\text{بَ}}{\text{جَ}} = \frac{\text{جب ب}}{\text{جب ج}}$$

$$\therefore \frac{\text{بَ} - \text{جَ}}{\text{بَ} + \text{جَ}} = \frac{\text{جب ب} - \text{جب ج}}{\text{جب ب} + \text{جب ج}} = \frac{\text{۲ جم}\,\frac{\text{ب}+\text{ج}}{\text{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\text{ب}-\text{ج}}{\text{۲}}}{\text{۲ جب}\,\frac{\text{ب}+\text{ج}}{\text{۲}}\,\text{جم}\,\frac{\text{ب}-\text{ج}}{\text{۲}}}$$

$$= \frac{\text{مس}\,\frac{\text{ب}-\text{ج}}{\text{۲}}}{\text{مس}\,\frac{\text{ب}+\text{ج}}{\text{۲}}} = \frac{\text{مس}\,\frac{\text{ب}-\text{ج}}{\text{۲}}}{\text{مس}\left(\text{۹۰}^\circ - \frac{\text{ا}}{\text{۲}}\right)}$$

$$= \frac{\text{مس}\,\frac{\text{ب}-\text{ج}}{\text{۲}}}{\text{مم}\,\frac{\text{ا}}{\text{۲}}} \qquad \text{(دفعہ ۷۵)}$$

اس لئے $\text{مس}\,\frac{\text{ب}-\text{ج}}{\text{۲}} = \frac{\text{بَ} - \text{جَ}}{\text{بَ} + \text{جَ}}\,\text{مم}\,\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$

۱۷۸- دفعہ ۱۷۰ کے ضابطوں سے ضوابط دفعہ ۱۷۶ حاصل ہو سکتے ہیں اور برعکس اس کے۔

دفعہ ۱۷۰ کے پہلے اور تیسرے ضابطے سے حاصل ہوگا

$$\text{بَ جم ج} + \text{جَ جم ب} = \frac{\text{اَ}^{۲} + \text{بَ}^{۲} - \text{جَ}^{۲}}{\text{۲اَ}} + \frac{\text{جَ}^{۲} + \text{اَ}^{۲} - \text{بَ}^{۲}}{\text{۲اَ}} = \frac{\text{۲اَ}^{۲}}{\text{۲اَ}} = \text{اَ}$$

اس لئے $\text{اَ} = \text{بَ جم ج} + \text{جَ جم ب}$

اسی طرح سے دفعہ ۱۷۶ کے باقی ضابطے حاصل ہو سکتے ہیں

نیز دفعہ ۱۷۶ کے تین ضابطوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{اَ} = \text{بَ جم ج} + \text{جَ جم ب}$$

$$\text{بَ} = \text{جَ جم ا} + \text{اَ جم ج}$$

$$\text{اور}\quad \text{جَ} = \text{اَ جم ب} + \text{بَ جم ا}$$

ان تینوں کو بالترتیب اَ، بَ، - جَ سے ضرب دینے اور جمع کرنے سے

$$\text{اَ}^{۲} + \text{بَ}^{۲} - \text{جَ}^{۲} = \text{اَ}\,(\text{بَ جم ج} + \text{جَ جم ب})$$
$$+\ \text{بَ}\,(\text{جَ جم ا} + \text{اَ جم ج}) - \text{جَ}\,(\text{اَ جم ب} + \text{بَ جم ا}) = \text{۲ اَ بَ جم ج}$$

$$\therefore\quad \text{جم ج} = \frac{\text{اَ}^{۲} + \text{بَ}^{۲} - \text{جَ}^{۲}}{\text{۲ اَ بَ}}$$

اسی طرح سے دفعہ ۱۶۸ کے باقی ضابطے حاصل ہو سکتے ہیں۔

۱۷۵- طالب علم کو اکثر ایسی معادلات متماثلہ حل کرنی پڑیں گی جن میں مثلث کے اضلاع اور زاویے دونوں شامل ہوں، ایسی صورت میں بہتر ہوگا کہ وہ ضلعوں کو زاویوں کی رقوم میں یا زاویوں کی نسبتوں کو ضلعوں کی رقوم میں بیان کرلے

مثال ۱- ثابت کرو کہ $\text{اَ جم}\,\frac{\text{ب} - \text{ج}}{۲} = (\text{بَ} + \text{جَ})\ \text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}$

بموجب دفعہ ۱۶۹

$$\frac{\text{بَ} + \text{جَ}}{\text{اَ}} = \frac{\text{جب ب} + \text{جب ج}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{۲ جب}\,\frac{\text{ب}+\text{ج}}{۲}\ \text{جم}\,\frac{\text{ب}-\text{ج}}{۲}}{\text{۲ جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}\ \text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲}}$$

$$= \frac{\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲}\ \text{جم}\,\frac{\text{ب}-\text{ج}}{۲}}{\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}\ \text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲}} = \frac{\text{جم}\,\frac{\text{ب}-\text{ج}}{۲}}{\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}}$$

$$\therefore\quad (\text{بَ} + \text{جَ})\ \text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲} = \text{اَ جم}\,\frac{\text{ب}-\text{ج}}{۲}$$

مثال ۲- ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

$$(\text{بَ}^2 - \text{جَ}^2)\ \text{مم ا} + (\text{جَ}^2 - \text{اَ}^2)\ \text{مم ب} + (\text{اَ}^2 - \text{بَ}^2)\ \text{مم ج} = 0$$

بموجب دفعہ ۱۶۹

$$\frac{\text{جب ا}}{\text{اَ}} = \frac{\text{جب ب}}{\text{بَ}} = \frac{\text{جب ج}}{\text{جَ}} = \text{ک} \quad (\text{فرض کرو})$$

پس جملہ معلومہ

$$= (\text{بَ}^2 - \text{جَ}^2)\frac{\text{جم ا}}{\text{اَ ک}} + (\text{جَ}^2 - \text{اَ}^2)\frac{\text{جم ب}}{\text{بَ ک}} + (\text{اَ}^2 - \text{بَ}^2)\frac{\text{جم ج}}{\text{جَ ک}}$$

$$= \frac{1}{\text{ک}}\left[(\text{بَ}^2 - \text{جَ}^2)\frac{\text{بَ}^2 + \text{جَ}^2 - \text{اَ}^2}{2\,\text{اَ بَ جَ}} + (\text{جَ}^2 - \text{اَ}^2)\frac{\text{جَ}^2 + \text{اَ}^2 - \text{بَ}^2}{2\,\text{اَ بَ جَ}} + (\text{اَ}^2 - \text{بَ}^2)\frac{\text{اَ}^2 + \text{بَ}^2 - \text{جَ}^2}{2\,\text{اَ بَ جَ}}\right]$$

$$= \frac{1}{2\,\text{اَ بَ جَ ک}}\left[\text{بَ}^4 - \text{جَ}^4 - \text{اَ}^2(\text{بَ}^2 - \text{جَ}^2) + \text{جَ}^4 - \text{اَ}^4 - \text{بَ}^2(\text{جَ}^2 - \text{اَ}^2) + \text{اَ}^4 - \text{بَ}^4 - \text{جَ}^2(\text{اَ}^2 - \text{بَ}^2)\right] = 0$$

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

$$(\text{اَ} + \text{بَ} + \text{جَ})\left(\text{مس}\frac{\text{ا}}{2} + \text{مس}\frac{\text{ب}}{2}\right) = 2\,\text{جَ مم}\frac{\text{ج}}{2}$$

دائیں طرف کا رکن

$$= 2\text{ن}\left[\sqrt{\frac{(\text{ن} - \text{بَ})(\text{ن} - \text{جَ})}{\text{ن}(\text{ن} - \text{اَ})}} + \sqrt{\frac{(\text{ن} - \text{جَ})(\text{ن} - \text{اَ})}{\text{ن}(\text{ن} - \text{بَ})}}\right] \quad \text{دفعہ ۱۷۳}$$

$$= 2\text{ن}\sqrt{\frac{\text{ن} - \text{جَ}}{\text{ن}}}\left[\sqrt{\frac{\text{ن} - \text{بَ}}{\text{ن} - \text{اَ}}} + \sqrt{\frac{\text{ن} - \text{اَ}}{\text{ن} - \text{بَ}}}\right]$$

$$= ۲\sqrt{\text{ن}(\text{ن}-\text{جَ})}\left[\frac{\text{ن}-\text{بَ}+\text{ن}-\text{اَ}}{\sqrt{(\text{ن}-\text{اَ})(\text{ن}-\text{بَ})}}\right]$$

$$= \frac{۲\sqrt{\text{ن}(\text{ن}-\text{جَ})}\times\text{جَ}}{\sqrt{(\text{ن}-\text{اَ})(\text{ن}-\text{بَ})}} \quad \text{چونکہ } ۲\,\text{ن} = \text{اَ}+\text{بَ}+\text{جَ}$$

$$= ۲\,\text{جَ}\ \text{مم}\,\frac{\text{ج}}{۲}$$

یہ مماثلہ اضلاع کو زاویوں کی رقوم میں بیان کرنے سے بھی ثابت ہوسکتی ہے

دفعہ ۱۹۹ کی مدد سے

$$\frac{\text{اَ}+\text{بَ}+\text{جَ}}{\text{جَ}} = \frac{\text{جب ا}+\text{جب ب}+\text{جب ج}}{\text{جب ج}}$$

$$= \frac{۴\,\text{جم}\frac{\text{ا}}{۲}\,\text{جم}\frac{\text{ب}}{۲}\,\text{جم}\frac{\text{ج}}{۲}}{۲\,\text{جب}\frac{\text{ج}}{۲}\,\text{جم}\frac{\text{ج}}{۲}} \quad \text{دفعہ ۱۳۳}$$

$$= \frac{۲\,\text{جم}\frac{\text{ا}}{۲}\,\text{جم}\frac{\text{ب}}{۲}}{\text{جب}\frac{\text{ج}}{۲}}$$

نیز

$$\frac{۲\,\text{مم}\frac{\text{ج}}{۲}}{\text{مس}\frac{\text{ا}}{۲}+\text{مس}\frac{\text{ب}}{۲}} = \frac{۲\,\text{جم}\frac{\text{ج}}{۲}\,\text{جم}\frac{\text{ا}}{۲}\,\text{جم}\frac{\text{ب}}{۲}}{\text{جب}\frac{\text{ج}}{۲}\left[\text{جب}\frac{\text{ا}}{۲}\,\text{جم}\frac{\text{ب}}{۲}+\text{جم}\frac{\text{ا}}{۲}\,\text{جب}\frac{\text{ب}}{۲}\right]}\ .$$

$$= \frac{۲\,\text{جم}\frac{\text{ا}}{۲}\,\text{جم}\frac{\text{ب}}{۲}\,\text{جم}\frac{\text{ج}}{۲}}{\text{جب}\frac{\text{ج}}{۲}\,\text{جب}\frac{\text{ا}+\text{ب}}{۲}} = \frac{۲\,\text{جم}\frac{\text{ا}}{۲}\,\text{جم}\frac{\text{ب}}{۲}}{\text{جب}\frac{\text{ج}}{۲}} \quad (\text{دفعہ ۸۵})$$

اس لئے

$$\frac{\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}}{\text{ج}} = \frac{2\,\text{مم}\,\frac{\text{ج}}{2}}{\text{مس}\,\frac{\text{ا}}{2} + \text{مس}\,\frac{\text{ب}}{2}}$$

یعنی $(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})\left(\text{مس}\,\frac{\text{ا}}{2} + \text{مس}\,\frac{\text{ب}}{2}\right) = 2\,\text{ج}\,\text{مم}\,\frac{\text{ج}}{2}$

مثال ۴۔ اگر کسی مثلث کے اضلاع سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ نصف زاویوں کے ماس التمام بھی سلسلہ حسابیہ میں ہوں گے۔

معلوم ہے $\text{ا} + \text{ج} = 2\,\text{ب}$ .... (۱)

اور ثابت کرنا مطلوب ہے

$\text{مم}\,\frac{\text{ا}}{2} + \text{مم}\,\frac{\text{ج}}{2} = 2\,\text{مم}\,\frac{\text{ب}}{2}$ .... (۲)

ربط (۲) درست ہوگا اگر

$$\sqrt{\frac{\text{ن}(\text{ن} - \text{ا})}{(\text{ن} - \text{ب})(\text{ن} - \text{ج})}} + \sqrt{\frac{\text{ن}(\text{ن} - \text{ج})}{(\text{ن} - \text{ا})(\text{ن} - \text{ب})}} = 2\sqrt{\frac{\text{ن}(\text{ن} - \text{ب})}{(\text{ن} - \text{ج})(\text{ن} - \text{ا})}}$$

یا طرفین کو $\sqrt{\frac{(\text{ن} - \text{ا})(\text{ن} - \text{ب})(\text{ن} - \text{ج})}{\text{ن}}}$ میں ضرب دینے سے ربط (۲) درست ہوگا اگر

$$(\text{ن} - \text{ا}) + (\text{ن} - \text{ج}) = 2(\text{ن} - \text{ب})$$

یعنی اگر $2\,\text{ن} - (\text{ا} + \text{ج}) = 2\,\text{ن} - 2\,\text{ب}$

یعنی اگر $\text{ا} + \text{ج} = 2\,\text{ب}$ جو ربط (۱) ہے

پس معلوم ہوا کہ اگر ربط (۱) صحیح ہو تو ربط (۲) بھی صحیح ہوتا ہے -

امثلہ نمبری ۲۷

ثابت کرو کہ کسی مثلث ا ب ج میں

۱- جب (ب - ج)/۲ = (بَ - جَ)/اَ جم ا/۲

۲- بَ² جب ۲ ج + جَ² جب ۲ ب = ۲ بَ جَ جب ا

۳- اَ (بَ جم ج - جَ جم ب) = بَ² - جَ²

۴- (بَ + جَ) جم ا + (جَ + اَ) جم ب + (اَ + بَ) جم ج = اَ + بَ + جَ

۵- اَ (جم ب + جم ج) = ۲ (بَ + جَ) جب² ا/۲

۶- اَ (جم ج - جم ب) = ۲ (بَ - جَ) جم² ا/۲

۷- جب (ب - ج)/جب (ب + ج) = (بَ² - جَ²)/اَ²

۸- (اَ + بَ)/(اَ - بَ) = مس (ا + ب)/۲ مم (ا - ب)/۲

۹- اَ جب (ا/۲ + ب) = (بَ + جَ) جب ا/۲

۱۰- اَ² جب (ب - ج)/(جب ب + جب ج) + بَ² جب (ج - ا)/(جب ج + جب ا) + جَ² جب (ا - ب)/(جب ا + جب ب) =

۱۱- (بَ + جَ - اَ) (مم ب/۲ + مم ج/۲) = ۲ اَ مم ا/۲

۱۲- اَ² + بَ² + جَ² = ۲ (بَ جَ جم ا + جَ اَ جم ب + اَ بَ جم ج)

۱۳۔ $$(\text{اَ}^2-\text{بَ}^2+\text{جَ}^2)\ \text{مس ب}=(\text{اَ}^2+\text{بَ}^2-\text{جَ}^2)\ \text{مس ج}$$

۱۴۔ $$\text{جَ}^2=(\text{اَ}-\text{بَ})^2\ \text{جم}^2\frac{\text{ج}}{2}+(\text{ا}+\text{بَ})^2\ \text{جب}^2\frac{\text{ج}}{2}$$

۱۵۔ $$\text{اَ}\ \text{جب}(\text{ب}-\text{ج})+\text{بَ}\ \text{جب}(\text{ج}-\text{ا})+\text{جَ}\ \text{جب}(\text{ا}-\text{ب})=0$$

۱۶۔ $$\frac{\text{اَ}\ \text{جب}(\text{ب}-\text{ج})}{\text{بَ}^2-\text{جَ}^2}=\frac{\text{بَ}\ \text{جب}(\text{ج}-\text{ا})}{\text{جَ}^2-\text{اَ}^2}=\frac{\text{جَ}\ \text{جب}(\text{ا}-\text{ب})}{\text{اَ}^2-\text{بَ}^2}$$

۱۷۔ $$\text{اَ}\ \text{جب}\frac{\text{ا}}{2}\ \text{جب}\frac{\text{ب}-\text{ج}}{2}+\text{بَ}\ \text{جب}\frac{\text{ب}}{2}\ \text{جب}\frac{\text{ج}-\text{ا}}{2}$$
$$+\ \text{جَ}\ \text{جب}\frac{\text{ج}}{2}\ \text{جب}\frac{\text{ا}-\text{ب}}{2}=0$$

۱۸۔ $$\text{اَ}^2(\text{جم}^2\text{ب}-\text{جم}^2\text{ج})+\text{بَ}^2(\text{جم}^2\text{ج}-\text{جم}^2\text{ا})$$
$$+\ \text{جَ}^2(\text{جم}^2\text{ا}-\text{جم}^2\text{ب})=0$$

۱۹۔ $$\frac{\text{بَ}^2-\text{جَ}^2}{\text{اَ}^2}\ \text{جب}\ 2\text{ا}+\frac{\text{جَ}^2-\text{اَ}^2}{\text{بَ}^2}\ \text{جب}\ 2\text{ب}$$
$$+\ \frac{\text{اَ}^2-\text{بَ}^2}{\text{جَ}^2}\ \text{جب}\ 2\text{ج}=0$$

۲۰۔ $$\frac{(\text{اَ}+\text{بَ}+\text{جَ})^2}{\text{اَ}^2+\text{بَ}^2+\text{جَ}^2}=\frac{\text{مم}\frac{\text{ا}}{2}+\text{مم}\frac{\text{ب}}{2}+\text{مم}\frac{\text{ج}}{2}}{\text{مم ا}+\text{مم ب}+\text{مم ج}}$$

۲۱۔ $$\text{اَ}^3\ \text{جم}(\text{ب}-\text{ج})+\text{بَ}^3\ \text{جم}(\text{ج}-\text{ا})+\text{جَ}^3\ \text{جم}(\text{ا}-\text{ب})$$
$$=3\ \text{اَ}\ \text{بَ}\ \text{جَ}$$

۲۲۔ اگر کسی مثلث کے اضلاع ۳ ، ۴ ، $\sqrt{۳۸}$ فٹ ہوں تو ثابت کرو کہ اس کا سب سے بڑا زاویہ °۱۲۰ سے بڑا ہوگا۔

۲۳۔ ایک مثلث قایم الزاویہ کے اضلاع ۲۱ اور ۲۸ فٹ ہیں، اگر قائم الزاویہ سے وتر پر عمود نکالا جائے تو اس کا طول دریافت کرو

۲۴۔ اگر ایک مثلث کے زاویوں کی باہمی نسبتیں ۱ : ۲ : ۳ ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے مقابل کے اضلاع کی نسبتیں ۱ : $\sqrt{3}$: ۲ ہوں گی۔

۲۵۔ اگر کسی مثلث میں

$$\text{مس}\ \frac{ا}{۲} = \frac{۵}{۶}\ \text{اور مس}\ \frac{ب}{۲} = \frac{۲۰}{۳۷}$$

تو مس $\frac{ج}{۲}$ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ اس مثلث میں اَ + جَ = ۲ بَ

۲۶۔ کسی مثلث قائم الزاویہ متساوی الساقین میں ایک مستقیم خط مساوی ضلعوں میں سے ایک کے نقطہ وسط کو مقابل کے زاویے سے وصل کرتا ہے، ثابت کرو کہ یہ زاویے کو دو ایسے حصوں میں تقسیم کرتا ہے جن کے مماس التمام ۲ اور ۳ ہیں

۲۷۔ کسی مثلث ا ب ج میں عمود ا د قاعدے کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے کہ خطوط ب د، ج د اور ا د کی باہمی نسبتیں ۲، ۳، ۶ ہیں، ثابت کرو کہ مثلث کا زاویۂ راس ۴۵° ہے

۲۸۔ ایک وزن ندار حلقہ کا قطر ۱۰ انچ ہے اور وہ ایک نقطہ سے جس کا راسی فاصلہ مرکز سے ۱ فٹ ہے چھ مساوی رسیوں کے ذریعہ جو محیط کے برابر برابر فاصلوں پر بندھی ہوئی ہیں آویزاں ہے، متصل رسیوں کے درمیانی زاویہ کی جیب التمام دریافت کرو۔

۲۹۔ اگر اَ۲، بَ۲، جَ۲ سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ مم ا، مم ب، مم ج بھی سلسلہ حسابیہ میں ہوں گے

۳۰۔ اگر اَ، بَ، جَ سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ جم ا مم $\frac{ا}{۲}$، جم ب مم $\frac{ب}{۲}$ اور جم ج مم $\frac{ج}{۲}$ بھی سلسلہ حسابیہ

میں ہونگے

۳۱ - اگر $\bar{ا}$، $\bar{ب}$، $\bar{ج}$ سلسلہ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کروکہ

جب$^2 \frac{ا}{۲}$، جب$^2 \frac{ب}{۲}$ اور جب$^2 \frac{ج}{۲}$ بھی سلسلہ موسیقیہ میں ہونگے

۳۲ - ایک مثلث کے اضلاع سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور سب سے بڑا اور سب سے چھوٹا زاویہ بالترتیب طہ اور فہ ہے ثابت کروکہ

$$۴ (۱ - جم\, طہ)(۱ - جم\, فہ) = جم\, طہ + جم\, فہ$$

۳۳ - ایک مثلث کے اضلاع سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور سب سے بڑا زاویہ سب سے چھوٹے زاویئے سے بقدر ۹۰° کے زیادہ ہے، ثابت کرو کہ اضلاع $\sqrt{۷} + ۱$، $\sqrt{۷}$ اور $\sqrt{۷} - ۱$ کے متناسب ہیں

۳۴ - اگر ج = ۹۰° تو ثابت کروکہ

$$\frac{۱}{\bar{ا} + \bar{ج}} + \frac{۱}{\bar{ب} + \bar{ج}} = \frac{۳}{\bar{ا} + \bar{ب} + \bar{ج}}$$

۳۵ - اگر کسی مثلث ا ب ج میں قاعدہ ب ج پر ایک ایسا نقطہ د مقرر کریں کہ ب د : د ج :: م : ن اور اگر
$\angle$ ب ا د = عہ، $\angle$ د ا ج = بہ، $\angle$ ج د ا = طہ اور
ا د = لا تو ثابت کروکہ

$$(م + ن)\, مم\, طہ = م\, مم\, عہ - ن\, مم\, بہ$$
$$= ن\, مم\, ب - م\, مم\, ج$$

اور $(م + ن)^2 \times لا^2 = (م + ن)(م\, \bar{ب}^2 + ن\, \bar{ج}^2) - م\, ن\, \bar{ا}^2$

۳۶ - اگر کسی مثلث میں ضلع $\bar{ج}$ کا منصف ضلع $\bar{ب}$ پر عمود ہو تو ثابت کروکہ ۲ مس ا + مس ج = ۰

۴۷۔ ثابت کرو کہ اگر کسی مثلث میں طہ کوئی زاویہ ہو تو

ب جم طہ = جَ جم (ا − طہ) + اَ جم (ج + طہ)

۴۸۔ اگر کسی مثلث کے زاویوں ا اور ب سے دو عمود ع اور م ایک ایسے خط پر نکالے جائیں جو مثلث کے راس ج میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ

اَ^۲ ع^۲ + بَ^۲ م^۲ − ۲ اَ بَ ع م جم ج = اَ^۲ بَ^۲ جب^۲ ج

۴۹۔ کسی مثلث ا ب ج میں خطوط و ا، و ب اور و ج اس طرح کھینچے گئے ہیں کہ

∠ و ا ب = ∠ و ب ج = ∠ و ج ا = سہ

تو ثابت کرو کہ

مم سہ = مم ا + مم ب + مم ج

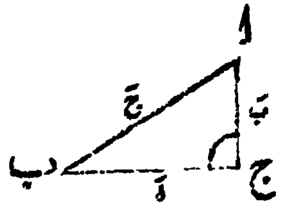
اور قم^۲ سہ = قم^۲ ا + قم^۲ ب + قم^۲ ج

باب سیزدہم
مثلثوں کا حل

۱۸۰- کسی مثلث کے تین ضلعوں اور تین زاویوں کو مثلث کے اجزا کہتے ہیں اگر کوئی سے تین اجزا کسی مثلث کے معلوم ہوں بشرطیکہ وہ تین زاویے نہوں تو باقی اضلاع اور زاویے معلوم ہو سکتے ہیں لیکن جب تین زاویے معلوم ہوں تو صرف اضلاع کے طولوں کی باہمی نسبتیں معلوم ہو سکتی ہیں یعنی مثلث کی شکل دریافت ہو سکتی ہے اور مقدار نہیں معلوم ہو سکتی، جب مثلث کے تین اجزا معلوم ہوں تو باقی تین اجزا معلوم کرنے کے عمل کو **مثلث کا حل** کہتے ہیں۔

سب سے پہلے ہم مثلث قائم الزاویہ کے حل پر بحث کریں گے۔ مثلث قائم الزاویہ وہ ہے جس کا ایک زاویہ قائمہ ہو۔ ذیل کی چار دفعات ایسے مثلثات کے متعلق ہیں، زاویہ ج قائمہ ہے۔

۱۸۱- صورت اوّل۔ مثلث قائم الزاویہ کا وتر اور ایک ضلع معلوم ہے مثلث کو حل کرو۔



فرض کرو کہ ضلع بَ اور وتر جَ معلوم ہیں،
ربط $\text{جب ب} = \frac{\text{بَ}}{\text{جَ}}$ سے زاویہ ب معلوم ہو سکتا ہے۔

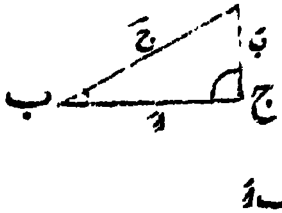
$\therefore$ ل جب ب $= ۱۰ +$ لوک بَ $-$ لوک جَ

اب چونکہ بَ اور جَ معلوم ہیں اس لئے ل جب ب اور ب معلوم ہو سکتے ہیں اور اس لئے زاویہ ا $(= ۹۰^\circ - \text{ب})$ معلوم ہو سکتا ہے۔

ضلع اَ ذیل کے کسی ایک ربط سے معلوم ہو سکتا ہے

$\text{جم ب} = \frac{\text{اَ}}{\text{جَ}}$ ، $\text{مس ب} = \frac{\text{بَ}}{\text{اَ}}$ یا $\text{اَ} = \sqrt{(\text{جَ} - \text{بَ})(\text{جَ} + \text{بَ})}$

۱۸۲ — صورت دوم۔ اضلاع اَ اور بَ معلوم ہیں مثلث کو حل کرو۔



اس صورت میں زاویہ ب ربط $\text{مس ب} = \frac{\text{بَ}}{\text{اَ}}$ سے معلوم ہو سکتا ہے۔

یعنی ل مس ب $= ۱۰ +$ لوک بَ $-$ لوک اَ

اس لئے ل مس ب اور اس لئے ب معلوم ہو سکتا ہے
نیز زاویہ ا $(= ۹۰^\circ - \text{ب})$ معلوم ہو سکتا ہے

ربط $\text{جَ} = \sqrt{\text{اَ}^2 + \text{بَ}^2}$ سے وتر جَ دریافت ہو سکتا ہے
لیکن یہ ربط لوگارثمی حسابات کے لئے اتنا موزوں نہیں ہے

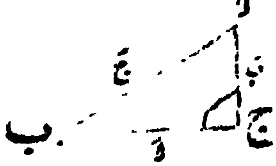
وتر جَ دریافت کرنے کے لئے طریق ذیل بہتر ہوگا۔

جب ب = بَ/جَ یعنی جَ = بَ/جب ب

∴ لوک جَ = لوک بَ − لوک جب ب

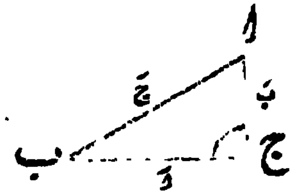
= ۱۰ + لوک بَ − ل جب ب جس سے جَ معلوم ہوسکتا ہے

۱۸۳ — صورت سوم۔ مثلث کا زاویہ ب اور ایک ضلع اَ معلوم ہے، مثلث کو حل کرو



اس صورت میں ا (= ۹۰° − ب) معلوم ہے
ضلع بَ کو ربط بَ/اَ = مس ب سے اور
جَ کو ربط اَ/جَ = جم ب سے دریافت کرو۔

۱۸۴ — صورت چہارم — زاویہ ب اور وتر جَ معلوم ہیں مثلث کو حل کرو۔



ا معلوم ہے اور اضلاع اَ اور بَ ارتباطات ذیل سے حاصل ہوسکتے ہیں۔

اَ/جَ = جم ب اور بَ/جَ = جب ب

امثلہ نمبری ۲۸

۱— مثلث قائم الزاویہ ا ب ج میں ج قائمہ ہے، اگر اَ = ۵۰ اور ب = ۷۵° تو اضلاع دریافت کرو (مس ۷۵° = ۲ + √۳)

۲— مثلث کے دو ضلعے ۱۰ اور ۲۰ فٹ ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ

۹۰ ہے، مثلث کو حل کرو۔ معلوم ہے لوک ۲۰ = ۱۳۰۱۰۳ ۱ء
اور ل مس ۲۶° ۴۳′ = ۹ء۶۹۸۶۸۴۷
نیز فرق اَ کے لئے = ۳۱۶۰
۳۔ اگر مثلث کے ایک زاویئے سے اس کے قاعدے پر عمود نکالا جائے تو اس کا طول ۳ انچ ہوتا ہے اور اُس زاویہ کو احاطہ کرنے والے اضلاع کے طول ۴ اور ۵ انچ ہیں، مثلث کے زاویئے دریافت کرو۔
معلوم ہے لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء، لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳ء
ل جب ۳۶° ۵۲′ = ۹ء۷۷۸۱۱۸۶ فرق اَ کے لئے = ۱۶۸۴ اور
ل جب ۴۸° ۳۵′ = ۹ء۸۷۵۰۱۴۲ فرق اَ کے لئے = ۱۱۱۵
۴۔ ایک مثلث قائم الزاویہ میں وتر اُس عمود کا چار گنا ہے جو زاویہ قائمہ سے وتر پر نکالا جائے، مثلث کے حادّے زاویئے دریافت کرو۔

۱۸۵۔ اب ہم ایسے مثلثوں کے حل کے متعلق بحث کریں گے جن کا کوئی زاویہ قائمہ نہ ہو۔
اس کی مختلف صورتیں یہ ہیں
صورت اوّل۔ تینوں اضلاع معلوم ہیں
صورت دوم۔ دو اضلاع اور درمیانی زاویہ معلوم ہے
صورت سوم۔ دو اضلاع اور ایک کے مقابل کا زاویہ معلوم ہے،
صورت چہارم۔ ایک ضلع اور دو زاویئے معلوم ہیں،
صورت پنجم۔ تینوں زاویئے معلوم ہیں۔

۱۸۶۔ صورت اول تینوں اضلاع اَ، بَ، جَ معلوم ہیں
چونکہ اضلاع معلوم ہیں اس لئے ن اور اس لئے مقادیر

ن - اَ، ن - بَ، ن - جَ معلوم ہیں۔ نصف زاوئے $\frac{ا}{۲}$، $\frac{ب}{۲}$، $\frac{ج}{۲}$ ذیل کے ضابطوں سے معلوم ہو سکتے ہیں۔

$$مس \frac{ا}{۲} = \sqrt{\frac{(ن - بَ)(ن - جَ)}{ن(ن - اَ)}}$$

$$مس \frac{ب}{۲} = \sqrt{\frac{(ن - جَ)(ن - اَ)}{ن(ن - بَ)}} \text{ اور } مس \frac{ج}{۲} = \sqrt{\frac{(ن - اَ)(ن - بَ)}{ن(ن - جَ)}}$$

صرف دو زاویوں کا دریافت کرنا کافی ہوگا کیونکہ ان دو کے مجموعہ کو ۱۸۰° سے تفریق کرنے سے تیسرا زاویہ معلوم ہو سکتا ہے۔

اوپر کے زاویوں کی قیمتیں نصف زاویوں کی جیوب یا جیوب التمام کے ضابطوں کو استعمال کرنے سے بھی حاصل ہوسکتی ہیں دیکھو دفعات ۱۷۱ اور ۱۷۲

یہ سب ضابطے لوکارثمی حسابات کے لئے موزوں ہیں۔

نیز زاویہ ا ضابطہ جم ا $= \frac{بَ^۲ + جَ^۲ - اَ^۲}{۲بَ جَ}$ (دفعہ ۱۷۰) سے بھی معلوم ہوسکتا ہے۔

لیکن بالعموم یہ ضابطہ لوکارثمی حسابات کے لئے موزوں نہیں ہوتا مگر جب اضلاع اَ، بَ، جَ مقدار میں قلیل ہوں تو اُس وقت اس ضابطے کو استعمال کرنے میں سہولت ہو گی۔

مثال۔ ایک مثلث کے اضلاع ۳۲، ۴۰، ۶۶ فٹ ہیں، سب سے بڑے ضلع کے مقابل کا زاویہ دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۲۰۷ = ۲٫۳۱۵۹۷۰۳ ، لوک ۱۰۷۳ = ۳٫۰۳۰۵۹۹۷

ل مم ۶۶° ۱۸َ = ۹٫۶۴۲۴۳۴۱ ، جدولوں سے فرق ۱َ کے لئے = ۳۴۳۱

اس جگہ اَ = ۳۲ ، بَ = ۴۰ ، جَ = ۶۶

$$\text{یعنی ن} = \frac{\text{۶۶+۴۰+۳۲}}{\text{۲}} = \text{۶۹} \text{ ، ن - اَ = ۳۷ ، ن - بَ = ۲۹}$$

اور ن - جَ = ۳

$$\text{اس لئے مم} \frac{\text{جَ}}{\text{۲}} = \sqrt{\frac{\text{ن(ن - جَ)}}{\text{(ن - اَ)(ن - بَ)}}} = \sqrt{\frac{\text{۳×۶۹}}{\text{۲۹×۳۷}}} = \sqrt{\frac{\text{۲۰۷}}{\text{۱۰۷۳}}}$$

$$\text{ل مم} \frac{\text{جَ}}{\text{۲}} = \text{۱۰} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\left[\text{لوک ۲۰۷ - لوک ۱۰۷۳}\right]$$

= ۱۰ + ۱٫۱۵۷۹۸۵۱۵ - ۱٫۵۱۵۲۹۹۸۵

= ۹٫۶۴۲۶۸۵۳

ل مم $\frac{\text{جَ}}{\text{۲}}$ اس لئے ل مم ۶۶° ۱۸َ سے بڑا ہے یعنی $\frac{\text{جَ}}{\text{۲}}$ زاویہ ۶۶° ۱۸ سے کم ہے۔

فرض کرو کہ $\frac{\text{جَ}}{\text{۲}}$ = ۶۶° ۱۸َ - لاً

زاویہ کی قیمت کا فرق لاً ہے، اس کے مقابل لوکارتم کا فرق

= ۹٫۶۴۲۶۸۵۳
- ۹٫۶۴۲۴۳۴۱

= ۰٫۰۰۰۲۵۱۲

نیز فرق ۶۰ً کے لئے = ۰٫۰۰۰۳۴۳۱

$$\text{اس لئے} \frac{\text{لاً}}{\text{۶۰}} = \frac{\text{۰٫۰۰۰۲۵۱۲}}{\text{۰٫۰۰۰۳۴۳۱}}$$

$$\text{یعنی لا} = \frac{\text{۲۵۱۲}}{\text{۳۴۳۱}} \times \text{۶۰} = \text{۴۴ تقریباً}$$

∴ $\frac{ج}{۲} = ۶۶^\circ\ ۱۸' - ۴۴'' = ۶۶^\circ\ ۱۷'\ ۱۶''$

اور اس لئے $ج = ۱۳۲^\circ\ ۳۴'\ ۳۲''$

امثلہ نمبری ۲۹

[طالب علم کو امثلہ ذیل میں سے بعض (مثلاً ۱، ۷، ۸، ۱۰، ۱۱، ۱۲) کے نتائج کی تصدیق عمل ترسیمی سے کرنی چاہیئے]

۱۔ ایک مثلث کے اضلاع ۵۶، ۶۵، ۳۳ فٹ ہیں اس کا سب سے بڑا زاویہ دریافت کرو۔

۲۔ مثلث کے اضلاع بالترتیب ۷، $۴\sqrt{۳}$، $\sqrt{۱۳}$ گز ہیں، سب سے چھوٹے زاویہ میں درجوں کی تعداد دریافت کرو۔

۳۔ ایک مثلث کے اضلاع $لا^۲ + لا + ۱$، $۲ لا + ۱$ اور $لا^۲ - ۱$ ہیں ثابت کرو کہ بڑے سے بڑا زاویہ ۱۲۰° ہے۔

۴۔ مثلث کے اضلاع $اَ$، $بَ$، $\sqrt{اَ^۲ + اَبَ + بَ^۲}$ فٹ ہیں سب سے بڑا زاویہ دریافت کرو۔

۵۔ اگر $اَ = ۲$، $بَ = \sqrt{۶}$ اور $جَ = \sqrt{۳} - ۱$ تو مثلث کو حل کرو

۶۔ اگر $اَ = ۲$، $بَ = \sqrt{۶}$ اور $جَ = \sqrt{۳} + ۱$ تو مثلث کو حل کرو

۷۔ اگر $اَ = ۹$، $بَ = ۱۰$، $جَ = ۱۱$ تو ب معلوم کرو۔ معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳.

ل مس $۲۹^\circ\ ۲۹' = ۹.۷۵۲۳۴۷۲$

اور ل مس $۲۹^\circ\ ۳۰' = ۹.۷۵۲۶۴۲۰$

۸۔ ایک مثلث کے اضلاع ۱۳۰، ۱۲۳، ۷۷ فٹ ہیں، سب سے بڑا

زاویہ دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء، ل مس ۳۸° ۳۹′ = ۹ء۹۰۲۹۳۷۶

اور ل مس ۳۸° ۴۰′ = ۹ء۹۰۳۱۹۶۶

۹۔ ایک مثلث کے اضلاع ۲۴۲، ۱۸۸، ۲۷۰ فٹ ہیں، سب سے بڑا زاویہ دریافت کرو۔ معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء، لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳ء

لوک ۷ = ۸۴۵۰۹۸۰ء، ل مس ۳۸° ۲۰′ = ۹ء۸۹۸۰۱۰۴

اور ل مس ۳۸° ۱۹′ = ۹ء۸۹۷۷۵۰۷

۱۰۔ ایک مثلث کے اضلاع ۲، ۳، ۴ ہیں، سب سے بڑا زاویہ دریافت کرو۔ معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء، لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳ء

ل مس ۵۲° ۱۴′ = ۱۰ء۱۱۰۸۳۹۵

اور ل مس ۵۲° ۱۵′ = ۱۰ء۱۱۱۱۰۰۴

جدولوں کو استعمال کرنے سے اُن مثلثوں کے سب زاویے دریافت کرو جن میں۔

۱۱۔ اَ = ۲۵، بَ = ۲۶، جَ = ۲۷

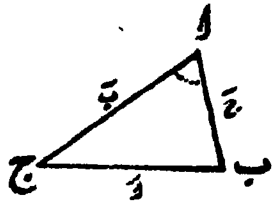
۱۲۔ اَ = ۱۷، بَ = ۲۰، جَ = ۲۷

۱۳۔ اَ = ۲۰۰۰، بَ = ۱۰۵۰، جَ = ۱۱۵۰

۱۸۷۔ صورت دوم۔ دو اضلاع بَ اور جَ معلوم ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ ا بھی معلوم ہے، مثلث کو حل کرو۔

فرض کرو کہ ضلع بَ ضلع جَ

سے بڑا ہے تب



$$\text{مس}\ \frac{\text{ب} - \text{ج}}{2} = \frac{\text{بَ} - \text{جَ}}{\text{بَ} + \text{جَ}}\ \text{مم}\ \frac{\text{ا}}{2}\ \text{(دفعہ ۱۷۷)} \quad \dots\dots (1)$$

$$\text{اور} \quad \frac{\text{ب} + \text{ج}}{2} = 90^\circ - \frac{\text{ا}}{2} \quad \dots\dots (2)$$

ان دو ربطوں سے $\frac{\text{ب} - \text{ج}}{2}$ اور $\frac{\text{ب} + \text{ج}}{2}$ کی قیمتیں اور اسلئے جمع اور تفریق کرنے سے ب اور ج کی قیمتیں حاصل ہونگی

اس کے بعد تیسرا ضلع اَ ربط $\frac{\text{اَ}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جب ب}}$ سے حاصل ہوسکتا ہے

یعنی $\text{اَ} = \text{بَ}\ \frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}}$ جس سے اَ حاصل ہوگا

ضلع اَ ضابطہ ذیل سے بھی حاصل ہوسکتا ہے

$$\text{اَ}^2 = \text{بَ}^2 + \text{جَ}^2 - 2\,\text{بَ}\,\text{جَ}\ \text{جم ا}$$

یہ ضابطہ لوکارتمی حسابات کے لئے اتنا موزوں نہیں، لیکن اُس صورت میں اکثر مفید ثابت ہوتا ہے جبکہ اضلاع اَ اور بَ مقدار میں نہایت ہی قلیل ہوں۔

۱۸۸۔ مثال ۱۔ اگر $\text{بَ} = \sqrt{3}$، $\text{جَ} = 1$ اور $\text{ا} = 30^\circ$ تو مثلث کو حل کرو۔

$$\text{مس}\,\frac{\text{ب}-\text{ج}}{۲} = \frac{\text{بَ}-\text{جَ}}{\text{بَ}+\text{جَ}}\,\text{مم}\,\frac{\text{ا}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۳}+۱}\,\text{مم}\,۱۵^\circ$$

اب $\text{مس}\,۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۳}+۱}$ (دفعہ ۱۰۷)

یعنی $\text{مم}\,۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۳}-۱}$

اس لئے $\text{مس}\,\frac{\text{ب}-\text{ج}}{۲} = ۱$

$\therefore\ \frac{\text{ب}-\text{ج}}{۲} = ۴۵^\circ$ .... (۱)

نیز $\frac{\text{ب}+\text{ج}}{۲} = ۹۰^\circ - \frac{\text{ا}}{۲} = ۹۰^\circ - ۱۵^\circ = ۷۵^\circ$ .... (۲)

جمع کرنے سے $\text{ب} = ۱۲۰^\circ$

تفریق کرنے سے $\text{ج} = ۳۰^\circ$

چونکہ ا = ج ، اس لئے اَ = جَ = ۱

یا بطریق ذیل

$$\text{اَ}^۲ = \text{بَ}^۲ + \text{جَ}^۲ - ۲\,\text{بَ}\,\text{جَ}\,\text{جم}\,\text{ا} = ۳ + ۱ - ۲\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱$$

یعنی اَ = ۱ = جَ

$\therefore\ \text{ج} = \text{ا} = ۳۰^\circ$

اور $\text{ب} = ۱۸۰^\circ - \text{ا} - \text{ج} = ۱۲۰^\circ$

مثال ۲- اگر بَ = ۲۱۵ ، جَ = ۱۰۵ اور ا = ۴۲° ۲۷′ تو باقی دو زاویے نیز تیسرا ضلع دریافت کرو- معلوم ہے

لوک ۲ = ۰٫۳۰۱۰۳۰۰ ، لوک ۱۱ = ۱٫۰۴۱۳۹۲۷

لوک ۱۰۵ = ۲٫۰۲۱۱۸۹۳ ، لوک ۲۱۲٫۴۷۶ = ۲٫۳۲۷۳۱۰۳

ل مم ۳۷° ۱۳' = ۱۰٫۱۱۹۴۷۲۳، فرق ۱' کے لئے = ۳۶۲۲

ل مس ۲۴° ۲۰' = ۹٫۶۵۵۳۴۷۷، فرق ۱' کے لئے = ۳۳۶۴

ل جب ۴۷° ۲۷' = ۹٫۹۸۳۸۰۵۲

اور ل قم ۲۸° ۲۵' = ۱۰٫۳۲۲۵۰۲۵، فرق ۱' کے لئے = ۲۳۳۴

اس جگہ $\text{مس}\,\frac{\text{ب}-\text{ج}}{۲} = \frac{\text{ب}'-\text{ج}'}{\text{ب}'+\text{ج}'}\,\text{مم}\,\frac{\text{ا}}{۲} = \frac{۱۱}{۳۲}\,\text{مم}$ ۳۷° ۱۳' ۳۰"

اب ل مم ۳۷° ۱۳' = ۱۰٫۱۱۹۴۷۲۳

فرق ۳۰" کیلئے = −۱۳۱۱ ،،

∴ ل مم ۳۷° ۱۳' ۳۰" = ۱۰٫۱۱۹۳۴۱۲

لوک ۱۱ = ۱٫۰۴۱۳۹۲۷

۱۱٫۱۶۰۷۳۳۹

لوک ۳۲ = ۱٫۵۰۵۱۵

∴ ل مس $\frac{۱}{۲}$(ب−ج) = ۹٫۶۵۵۵۸۳۹

لیکن ل مس ۲۴° ۲۰' = ۹٫۶۵۵۳۴۷۷

فرق = ۲۳۶۲

= فرق $\frac{۲۳۶۲}{۳۳۶۴}$ × ۶۰" کے لئے

= فرق ۴۲٫۱" کے لئے

۳٫۰۱۰۳
۵
۱٫۵۰۵۱۵

۲۳۶۲
۶۰
۳۳۶۴) ۱۴۱۷۲۰ (۴۲٫۱
۱۳۴۵۶
۷۱۶۰
۶۷۲۸
۴۳۲۰

∴ $\frac{\text{ب}-\text{ج}}{۲}$ = ۲۴° ۲۰' ۴۲"

لیکن $\frac{\text{ب}+\text{ج}}{۲}$ = ۹۰° − $\frac{\text{ا}}{۲}$ = ۵۲° ۴۶' ۳۰"

∴ جمع کرنے سے ب = ۷۷° ۷′ ۱۲″

اور تفریق کرنے سے ج = ۲۸° ۲۵′ ۴۸″

نیز اَ / جب ا = جَ / جب ج = جَ قم ج

∴ اَ = ۱۰۵ جب ۷۴° ۲۷′ قم ۲۸° ۲۵′ ۴۸″

لیکن ل قم ۲۸° ۲۵′ = ۱۰٫۳۲۲۵۰۲۵

فرق ۴۸″ کیلئے = −۱۸۶۷ .... ۲۳۳۴ × ۴۸/۶۰ = ۲۳۳۴ × ۴/۵ = ۱۸۶۷

ل قم ۲۸° ۲۵′ ۴۸″ = ۱۰٫۳۲۲۳۱۵۸

ل جب ۷۴° ۲۷′ = ۹٫۹۸۳۸۰۵۲

لوک ۱۰۵ = ۲٫۰۲۱۱۸۹۳

۲۲٫۳۲۷۳۱۰۳

۲۰

∴ لوک اَ = ۲٫۳۲۷۳۱۰۳

∴ اَ = ۲۱۲٫۴۷۶

۱۸۹ـ صورت دوم میں مثلث کا تیسرا ضلع اَ زاویوں ب اور ج کو دریافت کرنے کے بغیر بھی معلوم ہو سکتا ہے۔ دو طریقے حسب ذیل ہیں

(۱) چونکہ اَ^{2} = بَ^{2} + جَ^{2} − ۲ بَ جَ جم ا

= بَ^{2} + جَ^{2} − ۲ بَ جَ (۲ جم^2 ا/۲ − ۱)

= (بَ + جَ)^2 − ۴ بَ جَ جم^2 ا/۲

∴ اَ^{2} = (بَ + جَ)^2 [۱ − (۴ بَ جَ / (بَ + جَ)^2) جم^2 ا/۲]

اس لئے اگر جب^2 ط = (۴ بَ جَ / (بَ + جَ)^2) جم^2 ا/۲

تو $\text{اَ}^{۲} = (\text{بَ} + \text{جَ})^{۲}\left[۱ - \text{جب}^{۲}\,\text{طہ}\right] = (\text{بَ} + \text{جَ})^{۲}\,\text{جم}^{۲}\,\text{طہ}$

یعنی $\text{اَ} = (\text{بَ} + \text{جَ})\,\text{جم}\,\text{طہ}$

پس اگر جب طہ کو ربط $\text{جب}\,\text{طہ} = \frac{۲\sqrt{\text{بَ}\,\text{جَ}}}{\text{بَ} + \text{جَ}}\,\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲}$ سے معلوم کیا جائے تو حاصل ہوگا

$$\text{اَ} = (\text{بَ} + \text{جَ})\,\text{جم}\,\text{طہ}$$

(۲) $\text{اَ}^{۲} = \text{بَ}^{۲} + \text{جَ}^{۲} - ۲\,\text{بَ}\,\text{جَ}\,\text{جم}\,\text{ا}$

$$= \text{بَ}^{۲} + \text{جَ}^{۲} - ۲\,\text{بَ}\,\text{جَ}\left(۱ - ۲\,\text{جب}^{۲}\,\frac{\text{ا}}{۲}\right) = (\text{بَ} - \text{جَ})^{۲} + ۴\,\text{بَ}\,\text{جَ}\,\text{جب}^{۲}\,\frac{\text{ا}}{۲}$$

$$= (\text{بَ} - \text{جَ})^{۲}\left[۱ + \frac{۴\,\text{بَ}\,\text{جَ}}{(\text{بَ} - \text{جَ})^{۲}}\,\text{جب}^{۲}\,\frac{\text{ا}}{۲}\right]$$

فرض کرو کہ $\frac{۴\,\text{بَ}\,\text{جَ}}{(\text{بَ} - \text{جَ})^{۲}}\,\text{جب}^{۲}\,\frac{\text{ا}}{۲} = \text{مس}^{۲}\,\text{فہ}$

یعنی $\text{مس}\,\text{فہ} = \frac{۲\sqrt{\text{بَ}\,\text{جَ}}}{\text{بَ} - \text{جَ}}\,\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}$

اس لئے فہ معلوم ہو سکتا ہے

نیز $\text{اَ}^{۲} = (\text{بَ} - \text{جَ})^{۲}\left[۱ + \text{مس}^{۲}\,\text{فہ}\right] = \frac{(\text{بَ} - \text{جَ})^{۲}}{\text{جم}^{۲}\,\text{فہ}}$

یعنی $\text{اَ} = (\text{بَ} - \text{جَ})\,\text{قط}\,\text{فہ}$

اس سے اَ بآسانی معلوم ہو سکتا ہے

اس دفعہ کے حسابات میں زاویے طہ اور فہ تسہیل عمل کے لئے داخل کئے گئے ہیں ان کو امدادی زاویے کہتے ہیں (دفعہ ۱۳۵)

امثلہ نمبری ۳۰

[طالب علم کو امثلہ ذیل میں سے بعض (مثلاً ۴، ۵، ۶، ۱۱) کے نتائج کی تصدیق ترسیمی عمل سے کرنی چاہیئے]

۱۔ اگر بَ = ۹۰، جَ = ۷۰ اور ا = ۲۷° ۴۸′ ۳۰″ تو ب اور ج دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء، ل مم ۳۶° ۲۴′ ۱۵″ = ۱۰ء۱۳۲۳۱۱۱

ل مس ۹° ۳۷′ = ۹ء۲۲۹۰۰۷۱

اور ل مس ۹° ۳۸′ = ۹ء۲۲۹۷۷۳۵

۲۔ اگر اَ = ۲۱، بَ = ۱۱ اور ج = ۳۴° ۴۲′ ۳۰″ تو ا اور ب دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء

اور ل مس ۷۲° ۳۸′ ۴۵″ = ۱۰ء۵۰۵۱۵

۳۔ اگر کسی مثلث کے اضلاع سلسلہ حسابیہ میں ہوں اور سب سے بڑے اور سب سے چھوٹے اضلاع کے طول بالترتیب ۲۴ اور ۱۶ فٹ ہوں تو مثلث کے زاوئے دریافت کرو، نیز تیسرے ضلع کا طول معلوم کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء، لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳ء

اور ل مس ۱۹° ۶′ = ۹ء۵۳۹۴۲۸۷ فرق اَ کے لئے = ۴۰۸۴

۴۔ اگر اَ = ۱۳، بَ = ۷ اور ج = ۶۰° تو ا اور ب کی قیمتیں دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۳ = ٫۴۷۷۱۲۱۳

اور ل مس ۲۷° ۲۷' = ۹٫۷۱۵۵۵۰۸، فرق ا کے لئے = ۳۰۸۷

۵- اگر ا = ۲ ب اور ج = ۱۲۰° تو ا اور ب کی قیمتیں دریافت کرو، نیز ج اور ا کی باہمی نسبت معلوم کرو، معلوم ہے

لوک ۳ = ٫۴۷۷۱۲۱۳

اور ل مس ۱۰° ۵۳' = ۹٫۲۸۳۹۰۷۰، فرق ا کے لئے = ۶۸۰۸

۶- اگر ب = ۱۴، ج = ۱۱ اور ا = ۶۰° تو ب اور ج کی قیمتیں دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ٫۳۰۱۰۳، لوک ۳ = ٫۴۷۷۱۲۱۳

ل مس ۱۱° ۴۴' = ۹٫۳۱۷۴۲۹۹

اور ل مس ۱۱° ۴۵' = ۹٫۳۱۸۰۶۴۰

۷- ایک مثلث کے دو ضلعوں کے طول بالترتیب ۴۰۵ اور ۳۲۰ ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ ۵۲° ۶' ہے، باقی زاوئے دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ٫۳۰۱۰۳، ل مس ۲۶° ۳' = ۹٫۶۸۹۱۴۳۰

ل مس ۱۴° ۲۰' = ۹٫۴۰۷۴۱۸۹ اور ل مس ۱۴° ۲۱' = ۹٫۴۰۷۹۴۵۳

۸- اگر ب = ۲½ فٹ، ج = ۲ فٹ اور ا = ۲۲° ۲۰' تو باقی زاوئے دریافت کرو اور ثابت کرو کہ تیسرا ضلع تقریباً ۱ فٹ ہے، معلوم ہے

لوک ۲ = ٫۳۰۱۰۳، لوک ۳ = ٫۴۷۷۱۲

ل مم ۱۱° ۱۰' = ۱۰٫۷۰۴۶۵، ل جب ۲۲° ۲۰' = ۹٫۵۷۹۷۷

ل مس ۲۹° ۲۲' ۲۰" = ۹٫۷۵۰۳۸، ل مس ۲۹° ۲۲' ۳۰" = ۹٫۷۵۰۴۳

اور ل جب ۴۹° ۲۷′ ۳۴″ = ۹٫۸۸۰۷۹

۹- اگر ا = ۲، ب = ۱ + √۳ اور ج = ۶۰° تو مثلث کو حل کرو۔

۱۰- مثلث کے دو اضلاع √۳ + ۱ اور √۳ − ۱ ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ ۶۰° ہے، تیسرا ضلع اور باقی زاویے دریافت کرو

۱۱- اگر ب = ۱، ج = √۳ − ۱ اور ا = ۶۰° تو ضلع ا کا طول دریافت کرو

۱۲- اگر ب = ۹۱، ج = ۱۲۵ اور مس (ا/۲) = ۱۷/۶ تو ثابت کرو کہ ا = ۲۰۴

۱۳- اگر ا = ۵، ب = ۴ اور جم (ا − ب) = ۳۱/۳۲ تو ثابت کرو کہ تیسرا ضلع ج = ۶

۱۴- ایک مثلث کا ایک زاویہ ۳۰° ہے اور اس کے متصل ضلعوں کے طول ۴۰ اور ۴۰√۳ گز ہیں، تیسرے ضلع کا طول دریافت کرو نیز باقی زاویوں میں انگریزی درجوں کی تعداد معلوم کرو

۱۵- ایک مثلث کے اضلاع ۹ اور ۳ ہیں اور ان کے مقابل کے زاویوں کا فرق ۹۰° ہے، مثلث کا قاعدہ اور اس کے زاویے دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ۰٫۳۰۱۰۳، لوک ۳ = ۰٫۴۷۷۱۲۱۳

لوک ۷۵۸۹۴ = ۴٫۸۸۰۲۰۷۴، لوک ۷۵۸۹۵ = ۴٫۸۸۰۲۱۳۲

ل مس ۲۶° ۳۳′ = ۹٫۶۹۸۶۸۴۷

اور ل مس ۲۶° ۳۴′ = ۹٫۶۹۹۰۰۰۶

۱۶- اگر مس ف = (ا − ب)/(ا + ب) مم (ج/۲) تو ثابت کرو کہ

ج = (ا + ب) جب (ج/۲) / جم ف

اگر اَ = ۳، بَ = ۱ اور ج = ۵۳° ۷′ ۴۸″

تو ا اور ب کو دریافت کرنے کے بغیر جَ دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ٫۳۰۱۰۳ ، لوک ۲۵۲۹۸ = ۴٫۴۰۳۰۸۶۲

لوک ۲۵۲۹۹ = ۴٫۴۰۳۱۰۳۴ ، ل جم ۲۶° ۳۳′ ۵۴″ = ۹٫۹۵۱۵۴۵۲

اور ل مس ۲۶° ۳۳′ ۵۴″ = ۹٫۶۹۸۹۷۰۰

۱۷۔ ایک مثلث کے دو اضلاع ۲۳۷ اور ۱۵۸ فٹ ہیں اور اُن کا درمیانی زاویہ ۶۶° ۴۰′ ہے، قاعدہ اور باقی زاویے دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ٫۳۰۱۰۳ ، لوک ۷۹ = ۱٫۸۹۷۶۶۳

لوک ۲۲۹۸۷ = ۴٫۳۵۰۷۸ ، ل مم ۳۳° ۲۰′ = ۱۰٫۱۸۱۹۷

ل جب ۳۳° ۲۰′ = ۹٫۷۳۹۹۸ ، ل مس ۱۶° ۵۴′ = ۹٫۴۸۲۶۲

ل مس ۱۶° ۵۵′ = ۹٫۴۸۳۰۸ ، ل قط ۱۶° ۵۴′ = ۱۰٫۰۱۹۱۷

اور ل قط ۱۶° ۵۵′ = ۱۰٫۰۱۹۲۱

[ضابطہ جم $\frac{ب - ج}{۲} = \frac{بَ + جَ}{اَ}$ جب $\frac{ا}{۲}$ کو استعمال کرو یا ضابطہ مثال ۱۶ کو]

ذیل کی چار مثالوں میں مطلوبہ لوکارتموں کو جدولوں سے لو

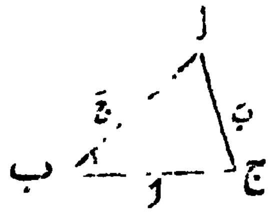
۱۸۔ اگر اَ = ۲۴۲٫۵ ، بَ = ۱۶۴٫۳ اور ج = ۵۴° ۳۶′ تو مثلث کو حل کرو

۱۹۔ اگر بَ = ۱۳۰ ، جَ = ۶۳ اور ا = ۴۲° ۱۵′ ۲۴″ تو مثلث کو حل کرو

۲۰۔ مثلث کے دو اضلاع ۲۲۶۵٫۴ اور ۱۷۷۹ فٹ ہیں اور اُن کا درمیانی زاویہ ۵۸° ۱۷′ ہے، باقی زاویے دریافت کرو

۲۱۔ مثلث کے دو اضلاع ۲۳۷ء۰۹ اور ۱۳۰ء۹۶ فٹ ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ ۵۰° ۵۹َ ہے، باقی زاویے دریافت کرو

۱۹۰۔ صورت سوم۔ دو اضلاع بَ اور جَ معلوم ہیں اور اُن میں سے ایک کے مقابل کا زاویہ ب معلوم ہے، مثلث کو حل کرو۔



زاویہ ج ربط $\frac{\text{جب ج}}{\text{جَ}} = \frac{\text{جب ب}}{\text{بَ}}$ سے

یعنی جب ج = $\frac{\text{جَ}}{\text{بَ}}$ جب ب .... (۱)

سے معلوم ہو سکتا ہے۔

طرفین کے لوگارتم لینے سے زاویہ ج معلوم ہو سکتا ہے اور پھر ا = ۱۸۰° − ب − ج جس سے ا حاصل ہوتا ہے

ضلع اَ ربط $\frac{\text{اَ}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جب ب}}$

یعنی اَ = بَ $\frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}}$ .... (۲)

سے دریافت ہو سکتا ہے۔

۱۹۱۔ دفعہ گزشتہ کی مساوات (۱) سے بعض صورتوں

میں ج کی کوئی قیمت حاصل نہیں ہوتی اور بعض دفعہ ایک قیمت حاصل ہوتی ہے اور بعض دفعہ دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں

صورت اوّل۔ فرض کرو کہ زاویہ ب حادہ ہے

(ا) اگر بَ > جَ جب ب تو مساوات (۱) میں دائیں طرف کا رکن ایک سے بڑا ہوگا اور اس مساوات کے موافق ج کی کوئی قیمت نہیں ہوسکتی۔

(ب) اگر بَ = جَ جب ب تو (۱) میں دائیں طرف کا رکن ایک کے برابر ہوگا اور اس صورت میں ج کی قیمت ۹۰° درجہ ہوگی۔

(ج) اگر بَ < جَ جب ب تو ج کی دو قیمتیں ایسی ہونگی جن میں سے ہر ایک کی جیب $\frac{جَ جب ب}{بَ}$ ہوگی، ایک قیمت ۰° اور ۹۰° کے درمیان واقع ہوگی اور دوسری ۹۰° اور ۱۸۰° کے درمیان لیکن یہ دونوں قیمتیں ہمیشہ شرائط سوال کو پورا نہیں کرینگی۔

کیونکہ اگر بَ < جَ تو ب < ج، اب اس صورت میں ج کی منفرجہ قیمت جائز نہیں ہوسکتی کیونکہ ج زاویہ منفرجہ نہیں ہوسکتا جب تک کہ ب زاویہ منفرجہ نہ ہو اور ایک ہی مثلث میں دو زاویوں میں سے ہر ایک کا قائمہ سے بڑا ہونا صریحاً ناممکن ہے۔

اگر بَ > جَ اور زاویہ ب حادہ ہو تو ج کی دونوں قیمتیں شرائط سوال کو پورا کریں گی۔ اس صورت میں ا کی دو قیمتیں ہونگی اور اس لئے ارتباط (۲) سے اَ کی بھی دو قیمتیں حاصل

ہونگی اور اس لئے دو مثلث شرائط مطلوبہ کو پورا کرینگے۔

صورت دوم۔ فرض کرو کہ ب منفرجہ ہے

اگر بَ < یا = جَ تو ب بالترتیب کم ہوگا یا برابر ہوگا ج کے اس لئے ج زاویہ منفرجہ ہوگا اس صورت میں مثلث کا بننا ہی ناممکن ہوگا

اگر بَ > جَ تو زاویہ ج کی حادہ قیمت جو مساوات (۱) سے حاصل ہوگی شرائط سوال کو پورا کرے گی مگر منفرجہ قیمت جائز نہیں ہوگی اس صورت میں مثلث کا صرف ایک جائز حل ہوگا چونکہ بَ، جَ اور ب کی بعض قیمتوں کے لئے مثلث کے حل کرنے میں شک یا اشتباہ واقع ہوتا ہے اس لئے اس صورت کو مثلثوں کے حل کی مشتبہ صورت کہتے ہیں

۱۹۲۔ صورت مشتبہ پر بحث بطریق ہندسی اس طرح ہوسکتی ہے فرض کرو کہ اجزاء بَ، جَ اور ب معلوم ہیں اور ہم مثلث کو بنانے کی کوشش کرتے ہیں۔

سب سے اول زاویہ اب د برابر زاویہ ب کے بناؤ اسکے بعد سمت ب ا میں طول ب ا کو جَ کے مساوی قطع کرو اس طرح سے زاویہ ا کا نقطۂ راس معلوم ہو جائے گا۔

اب ہمیں ایک تیسرا نقطہ ج معلوم کرنا ہے جو ب د پر واقع ہو اور جس کا فاصلہ نقطہ ا سے بَ کے برابر ہو، اس نقطہ کا مقام دریافت کرنے کے لئے ا کو مرکز مان کر ایک دائرہ کھینچو جس کا نصف قطر بَ ہو، اب اگر یہ دائرہ ب د کو قطع کرے تو جو

نقطہ یا نقاط تقاطع اس طرح حاصل ہونگے ان سے ج کا مقام معلوم ہو جائے گا

ب د پر عمود ا د نکالو پس

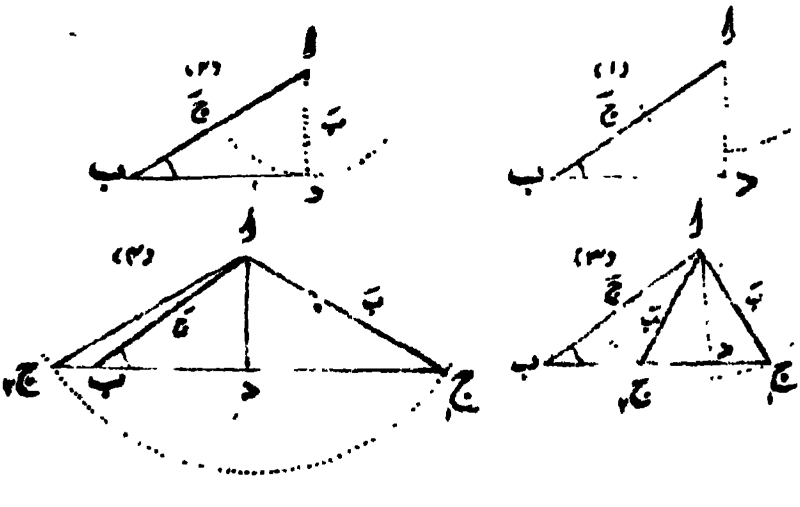
ا د = ا ب جب ب = ج جب ب

ذیل کی صورتوں میں سے ایک نہ ایک پیدا ہوگی

ممکن ہے کہ دائرہ ب د کو قطع نہ کرے (شکل اوّل)

یا ممکن ہے کہ دائرہ ب د کو مس کرے (شکل دوم)

یا دائرہ ب د کو دو نقطوں ج اور ج پر قطع کرے (اشکال سوم و چہارم)



پہلی شکل سے ظاہر ہے کہ اس صورت میں کوئی ایسا مثلث نہیں ہو سکتا جو شرائط مطلوبہ کو پورا کرے

اس صورت میں ب > ا د یعنی > ج جب ب

دوسری شکل سے ایک مثلث ا ب د حاصل ہوتا ہے جسمیں

زاویہ د قائمہ ہے

اس صورت میں بَ = اد = جَ جب ب

تیسری شکل سے دو مثلث ا ب ج، اور ا ب ج، حاصل ہوتے ہیں

اس صورت میں بَ بلحاظ مقدار کے اد اور جَ کے درمیان

واقع ہے یعنی

بَ > جَ جب ب اور < جَ

چوتھی شکل میں صرف ایک مثلث ا ب ج، ایسا ہے جو شرائط

سوال کو پورا کرتا ہے،

[مثلث اُ ب ج، شرائط مطلوبہ کو پورا نہیں کرتا کیونکہ اس میں

مقام ب پر جو زاویہ بنتا ہے وہ زاویہ ب کے برابر نہیں لیکن

وہ زاویہ ۱۸۰° - ب کے برابر ہے] ظاہر ہے کہ اس صورت میں

مقدار بَ مقادیر جَ جب ب اور جَ دونوں سے بڑی ہے۔

اگر زاویہ ب منفرجہ ہو تو مناسب شکلیں کھینچنے سے معلوم ہوگا

کہ اگر بَ < جَ تو کوئی مثلث شرائط مطلوبہ کو پورا نہیں کر سکتا

(کیونکہ مثلثوں ا ب ج، اور ا ب ج، میں

مقام ب پر جو زاویہ بنے گا وہ ۱۸۰° - ب کے برابر ہوگا

اور ب کے برابر نہیں ہوگا) اگر بَ > جَ تو معلوم ہوگا کہ

اس صورت میں صرف ایک مثلث شرائط مطلوبہ کو پورا کر سکتا ہے

اوپر کے نتائج کا خلاصہ یہ ہے

فرض کرو کہ مثلث کے اجزا بَ، جَ، ب معلوم ہیں

(۱) اگر بَ < جَ جب ب تو اس صورت میں کوئی مثلث

شرائط سوال کو پورا نہیں کرتا۔

(۲) اگر بَ = جَ جب ب تو ایک مثلث قائم الزاویہ شرائط سوال کو پورا کرتا ہے

(۳) اگر بَ > جَ جب ب اور < جَ اور زاویہ ب حادہ ہو تو دو مثلث شرائط معلومہ کو پورا کرتے ہیں

(۴) اگر بَ > جَ تو اس صورت میں صرف ایک مثلث ہوگا صریحاً اگر بَ = جَ تو شکل سوم میں نقاط ب اور جہ ایک دوسرے پر منطبق ہونگے اور اس صورت میں صرف ایک مثلث ہوگا،

(۵) اگر ب منفرجہ ہو تو کوئی مثلث شرائط سوال کو پورا نہیں کرسکتا سوائے اس صورت کے جبکہ بَ > جَ

۱۹۳۔ صورت مشتبہ پر بحث بطریق جبریہ اس طرح ہوسکتی ہے۔

شکل دفعہ ۱۹۰ سے حاصل ہوگا

$$بَ^۲ = جَ^۲ + اَ^۲ - ۲ جَ اَ \text{ جم } ب$$

$$\therefore\ اَ^۲ - ۲ اَ جَ \text{ جم } ب + جَ^۲ \text{جم}^۲ ب$$

$$= بَ^۲ - جَ^۲ + جَ^۲ \text{جم}^۲ ب = بَ^۲ - جَ^۲ \text{جب}^۲ ب$$

$$\therefore\ اَ - جَ \text{ جم } ب = \pm \sqrt{بَ^۲ - جَ^۲ \text{جب}^۲ ب}$$

یعنی $$اَ = جَ \text{ جم } ب \pm \sqrt{بَ^۲ - جَ^۲ \text{جب}^۲ ب} \quad \ldots\ldots (۱)$$

مساوات (۱) سے اَ کی قیمت معلوم ہوسکتی ہے اگر بَ، جَ

اور ب معلوم ہوں

(ا) اگر بَ < جَ جب ب تو مقدار ٢√(بَ - جَ جب^٢ ب) خیالی ہوگی اور (١) سے دَ کی کوئی حقیقی قیمت حاصل نہ ہوگی

(ب) اگر بَ = جَ جب ب تو اَ کی صرف ایک قیمت جَ جب ب ہوگی

پس اس صورت میں صرف ایک مثلث شرائط مطلوبہ کو پورا کرے گا اور وہ مثلث قائم الزاویہ ہوگا۔

(ج) اگر بَ > جَ جب ب تو اَ کی دو قیمتیں ہونگی لیکن چونکہ اَ کا مثبت ہونا ضروری ہے اس لئے مساوات (١) میں ہم علامت جذر کے ماقبل منفی علامت صرف اُس صورت میں لے سکتے ہیں

جبکہ جَ جم ب - ٢√(بَ^٢ - جَ^٢ جب^٢ ب) مثبت ہو

یعنی جبکہ ٢√(بَ^٢ - جَ^٢ جب^٢ ب) < جَ جم ب

یعنی بَ^٢ - جَ^٢ جب^٢ ب < جَ^٢ جم^٢ ب یعنی بَ^٢ < جَ^٢

اس لئے معلوم ہوا کہ دو مثلث صرف اُسی صورت میں حاصل ہونگے جبکہ بَ > جَ جب ب اور ساتھ ہی < جَ

(د) اگر زاویہ ب منفرجہ ہو تو جَ جم ب منفی ہوگا اور اَ کی ایک قیمت ہمیشہ منفی ہوگی اور مثلث ناممکن ہوگا

دوسری قیمت صرف اُس صورت میں مثبت ہوگی

اگر جَ جم ب + ٢√(بَ^٢ - جَ^٢ جب^٢ ب) مثبت ہو

یعنی اگر √ب۲ - ج۲ جب۲ ب > - ج جم ب

یعنی اگر ب۲ > ج۲ جب۲ ب + ج۲ جم۲ ب

یعنی اگر ب > ج

اس لئے معلوم ہوا کہ جب زاویہ ب منفرجہ ہو تو کوئی مثلث شرائط سوال کو پورا نہیں کر سکتا اگر ب < ج، اور صرف ایک مثلث شرائط مطلوبہ کو پورا کرے گا اگر ب > ج

۱۹۴- مثال۔ معلوم ہے ب = ۱۶، ج = ۲۵ اور ب = ۳۳° ۱۵′، ثابت کرو کہ مثلث کا حل مشتبہ ہے، باقی زاویے دریافت کرو معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ر۰، ل جب ۳۳° ۱۵′ = ۹٫۷۳۹۰۱۲۹

ل جب ۵۸° ۵۶′ = ۹٫۹۳۲۷۶۱۶

اور ل جب ۵۸° ۵۷′ = ۹٫۹۳۲۸۳۷۶

جب ج = ج/ب جب ب = ۲۵/۱۶ جب ب = ۱۰۰/۶۴ جب ب = ۱۰۲/۲۶ جب ۳۳° ۱۵′

اس لئے ل جب ج = ۲ + ل جب ۳۳° ۱۵′ - ۶ لوک ۲ = ۹٫۹۳۲۸۳۲۹

اسلئے ل جب ج = ۹٫۹۳۲۸۳۲۹	ل جب ۵۸° ۵۷′ = ۹٫۹۳۲۸۳۷۶
ل جب ۵۸° ۵۶′ = ۹٫۹۳۲۷۶۱۶	ل جب ۵۸° ۵۶′ = ۹٫۹۳۲۷۶۱۶
فرق = ۷۱۳	فرق ا′ کے لئے = ۷۶۰

∴ زاوی فرق = ۷۱۳/۷۶۰ × ۶۰″

= ۵۶″ تقریباً

۷۱۳
۶
۷۶) ۴۲۷۸ (۵۶
۳۸۰
۴۷۸
۴۵۶

∴ ج = ۵۸° ۵۶' ۵۶" یا ۱۸۰° − ۵۸° ۵۶' ۵۶"

اس لئے (شکل ۳ دفعہ ۱۹۲) سے حاصل ہوگا

ج = ۵۸° ۵۶' ۵۶" اور ج، = ۱۲۱° ۳' ۴"

∴ ∠ ب ا ج = ۱۸۰° − ۳۳° ۱۵' − ۵۸° ۵۶' ۵۶"

= ۸۷° ۴۸' ۴"

اور ب ا ج، = ۱۸۰° − ۳۳° ۱۵' − ۱۲۱° ۳' ۴"

= ۲۵° ۴۱' ۵۶"

امثلہ نمبری ۳۱

[طالب علم کو امثلہ ذیل میں سے بعض (مثلاً ۳، ۵، ۶، ۸، ۹، ۱۰، ۱۲، ۱۳) کے نتائج کی ترسیمی عمل سے تصدیق کرنی چاہیئے]

۱۔ اگر اَ = ۵، بَ = ۷ اور جب ا = ۳/۴ تو معلوم کرو کہ مثلث کے حل کرنے میں مشتبہ صورت پیدا ہوگی یا نہیں۔

۲۔ اگر اَ = ۲، جَ = ۱ + √۳ اور ا = ۴۵° تو مثلث کو حل کرو

۳۔ اگر اَ = ۱۰۰، جَ = ۱۰۰ √۲ اور ا = ۳۰° تو مثلث کو حل کرو

۴۔ اگر ۲ بَ = ۳ اَ اور مس² ا = ۳/۵ تو ثابت کرو کہ تیسرے ضلع کی دو قیمتیں ہوسکتی ہیں جن میں سے ایک دوسری کی دوچند ہے

۵۔ اگر ا = ۳۰°، بَ = ۸ اور اَ = ۶ تو جَ دریافت کرو

۶۔ معلوم ہے ب = ۳۰°، جَ = ۱۵۰ اور بَ = ۵۰ √۳

ثابت کرو کہ اُن دو مثلثوں میں سے جو شرائط سوال کو پورا کرتے ہیں ایک مثلث متساوی الساقین ہے اور دوسرا مثلث قائم الزاویہ ہے،

تیسرے ضلع کی بڑی قیمت دریافت کرو
اگر ب = ۳۰° ، جَ = ۱۵۰ اور بَ = ۷۵ تو کیا حل مشتبہ ہوگا؟

۷۔ صورت مشتبہ میں اَ ، بَ اور ا معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ جَ کی دو قیمتوں کا تفاوت ۲ √(اَ² - بَ² جب² ا) ہے

۸۔ اگر اَ = ۵ ، بَ = ۴ اور ا = ۴۵° تو مثلث کے باقی زاویے دریافت کرو، معلوم ہے
لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء ، ل جب ۳۳° ۲۹َ = ۹ء۷۵۲۰۵۰۷
اور ل جب ۳۳° ۳۰َ = ۹ء۷۵۳۰۹۹۴

۹۔ اگر اَ = ۹ ، بَ = ۱۲ اور ا = ۳۰° تو جَ دریافت کرو، معلوم ہے
لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء لوک ۳ = ۴۷۷۱۲ء
لوک ۱۷۱ = ۲ء۲۳۳۰۱ لوک ۳۶۸ = ۲ء۵۶۵۸۳
ل جب ۱۱° ۴۸َ ۳۹ً = ۹ء۳۱۱۰۸ ، ل جب ۴۱° ۴۸َ ۳۹ً = ۹ء۸۲۳۹۱
اور ل جب ۱۰۸° ۱۱َ ۲۱ً = ۹ء۹۷۷۷۴

۱۰۔ معلوم کرو کہ ذیل کے مثلثوں کے حل مشتبہ ہیں یا نہیں۔ صورت مشتبہ میں تیسرے ضلع کی چھوٹی قیمت اور دونوں صورتوں میں باقی زاویے دریافت کرو

(۱) ا = ۳۰° ، جَ = ۲۵۰ فٹ اور اَ = ۱۲۵ فٹ
(۲) ا = ۳۰° ، جَ = ۲۵۰ فٹ اور اَ = ۲۰۰ فٹ

معلوم ہے
لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء ، لوک ۶ء۰۳۸۹۳ = ۷۸۰۹۶۰۱ء
ل جب ۳۸° ۴۱َ = ۹ء۷۹۵۸۸۰۰

اور ل جب ۸° ۴۱َ = ۹٫۱۷۸۹۰۰۱

۱۱ — معلوم ہے اَ = ۲۵۰، بَ = ۲۴۰ اور ا = ۷۲° ۴َ ۴۸ً زاویۂ ب اور ج دریافت کرو اور نیز یہ بھی معلوم کرو کہ کیا ان کی ایک سے زیادہ قیمت ہوسکتی ہے؟

معلوم ہے، لوک ۲٫۵ = ۰٫۳۹۷۹۴۰۰، لوک ۲٫۴ = ۰٫۳۸۰۲۱۱۲،
ل جب ۷۲° ۴َ = ۹٫۹۷۸۳۷۰۲، ل جب ۷۲° ۵َ = ۹٫۹۷۸۴۱۱۱
اور ل جب ۶۵° ۵۹َ = ۹٫۹۶۰۶۷۳۹

۱۲ — دو سیدھی سڑکیں ایک دوسرے کو زاویہ ۳۰° پر قطع کرتی ہیں اور اُن کے مقام تقاطع سے دو مسافر ا اور ب ایک ہی وقت پر روانہ ہوتے ہیں، ا ایک سڑک پر ۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جاتا ہے اور ب یکساں رفتار سے دوسری سڑک پر چلتا ہے، تین گھنٹہ کے بعد اُن کا باہمی فاصلہ ۹ میل ہے ثابت کرو کہ اس شرط کو پورا کرنے کے لئے ب کی رفتار کی دو قیمتیں ہوسکتی ہیں، انکو معلوم کرو

۱۳ — ایک مثلث کا ایک ضلع ۷۳۲ فٹ ہے اور اس کے مقابل کا زاویہ ۴۰° ہے، مثلث کا دوسرا ضلع ۱۰۱۵ فٹ ہے، اسکے مقابل کا زاویہ دریافت کرو اور ثابت کرو کہ اس زاویہ کی ایک سے زیادہ قیمتیں ہوسکتی ہیں۔

۱۴ — ایک مثلث کے دو اضلاع ۵۳۷٫۴۵ اور ۱۵۸٫۶۶ فٹ ہیں اور ضلع ۱۵۸٫۶۶ کے مقابل کا زاویہ ۱۵° ۱۱َ ہے، مثلث یا مثلثوں کے باقی زاویے دریافت کرو

۱۵ — معلوم ہے ا = ۱۰°، اَ = ۲۳۰۸٫۷ اور بَ = ۷۹۰۳٫۲ جَ کی چھوٹی قیمت دریافت کرو۔

۱۹۵۔ صورت چہارم۔ ایک ضلع اور دو زاویے یعنی اَ اور ب اور ج معلوم ہیں

چونکہ ایک مثلث کے تین زاویے دو قائموں کے برابر ہوتے ہیں اس لئے تیسرا زاویہ معلوم ہو سکتا ہے،



اضلاع بَ اور جَ ارتباطات ذیل سے حاصل ہو سکتے ہیں

$$\frac{\text{بَ}}{\text{جب ب}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جب ج}} = \frac{\text{اَ}}{\text{جب ا}}$$

جس سے $\text{بَ} = \text{اَ}\,\frac{\text{جب ب}}{\text{جب ا}}$ اور $\text{جَ} = \text{اَ}\,\frac{\text{جب ج}}{\text{جب ا}}$

۱۹۶۔ صورت پنجم۔ تینوں زاویے ا، ب، ج معلوم ہیں

اس صورت میں صرف اضلاع کی نسبتیں ذیل کے ضابطوں سے معلوم ہو سکتی ہیں۔

$$\frac{\text{اَ}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جب ب}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جب ج}}$$

اضلاع کی مطلق قیمتیں اس صورت میں معلوم نہیں ہو سکتیں

امثلہ نمبری ۳۲

۱۔ اگر جم ا = $\frac{۱۷}{۲۲}$ اور جم ج = $\frac{۱}{۱۴}$ تو اَ : بَ : جَ کی نسبتیں دریافت کرو

۲۔ ایک مثلث کے زاویوں کی باہمی نسبتیں ۱ : ۲ : ۷ ہیں ثابت کرو

کہ سب سے بڑے ضلع کی نسبت سب سے چھوٹے ضلع کے ساتھ
√۵ + ۱ : √۵ - ۱ ہے ۔

۳ - اگر ا = ۴۵°، ب = ۷۵° اور ج = ۶۰° تو ثابت کرو کہ
اَ + جَ √۲ = ۲ بَ

۴ - ایک مثلث کے دو زاویے بالترتیب ۴۱° ۱۳′ ۲۲″ اور ۷۱° ۱۹′ ۵″ ہیں اور پہلے زاویہ کے مقابل کا ضلع ۵۵ ہے، دوسرے زاویے کے مقابل جو ضلع ہو اُس کا طول دریافت کرو، معلوم ہے
لوک ۵۵ = ۱٫۷۴۰۳۶۲۷، لوک ۷۹۰۶۳ = ۴٫۸۹۷۹۷۷۵

ل جب ۴۱° ۱۳′ ۲۲″ = ۹٫۸۱۸۸۷۷۹

اور ل جب ۷۱° ۱۹′ ۵″ = ۹٫۹۷۶۴۹۲۷

۵ - دو جہازوں کے درمیان فاصلہ ایک میل ہے اور ہر ایک جہاز سے اُس زاویہ کا مشاہدہ کیا گیا ہے جو دوسرے جہاز اور کنارہ پر کے ایک مینارۂ روشنی کے درمیانی فاصلے کے محاذی اول الذکر جہاز پر بنتا ہے اور یہ زاویے بالترتیب ۵۲° ۲۵′ ۱۵″ اور ۷۵° ۹′ ۳۰″ ہیں، معلوم ہے

ل جب ۷۵° ۹′ ۳۰″ = ۹٫۹۸۵۲۶۳۵

ل جب ۵۲° ۲۵′ ۱۵″ = ۹٫۸۹۹۰۰۵۵

لوک ۱٫۲۱۹۷ = ۰٫۰۸۶۲۵۳۰ اور لوک ۱٫۲۱۹۸ = ۰٫۰۸۶۲۸۸۶
ہر ایک جہاز سے روشنی کا فاصلہ دریافت کرو

۶ - ایک مثلث میں قاعدے کے متصل زاویے ۲۲½° اور ۱۱۲½° ہیں، ثابت کرو کہ قاعدہ ارتفاع کا دو چند ہے ۔

ذیل کی پانچ مثالوں کے لئے لوگارثمی جدولوں کی ضرورت ہوگی

۷۔ ایک مثلث کا قاعدہ ۷ فٹ ہے اور قاعدے کے متصلہ زاویے ۲۹°۱ ۲۳' اور ۴۸° ۳۶' ہیں، چھوٹے ضلع کا طول دریافت کرو

۸۔ اگر ایک مثلث کے زاویوں کی باہمی نسبتیں ۵ : ۱۰ : ۲۱ ہوں اور چھوٹے زاویے کے مقابل کا ضلع ۳ فٹ ہو تو باقی اضلاع دریافت کرو۔

۹۔ ایک مثلث کے زاویے ۵۰°۱ ۸°۱ ۲۰' اور ۱۱° ۴۰' ہیں اور سب سے بڑا ضلع ۱۰۰۰ فٹ ہے، سب سے چھوٹا ضلع دریافت کرو

۱۰۔ نقطہ ب سے نقطہ ا کا فاصلہ دریافت کرنے کے لئے خط ب ج اور زوایا ا ب ج اور ب ج ا کو ناپا گیا ہے اور ان کی پیمائشیں بالترتیب ۲۸۷ گز اور ۵۵° ۳۲' ۱۰" اور ۵۱° ۸' ۲۰" ہیں، فاصلہ ا ب دریافت کرو۔

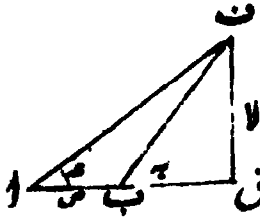
۱۱۔ فاصلہ ا ف معلوم کرنے کی غرض سے ا ب مساوی ۱۰۰۰ گز کسی مناسب سمت میں ناپا گیا ہے، نقاط ا اور ب پر کے زاویے ف ا ب اور ف ب ا بالترتیب ۱۴° ۱۸' اور ۱۴۳°۱ ۴۸' مشاہدہ کئے گئے ہیں، فاصلہ ا ف کو قریب ترین گز تک دریافت کرو

باب چہاردہم

بلندیاں اور فاصلے

۱۹۷ــ اس باب میں ہم خاص قسم کے عملی مسائل پر غور کرینگے جو بالعموم ارضی پیمائشوں میں استعمال ہوتے ہیں، اس قسم کے سادہ سوالات کا ذکر باب سوم میں آ چکا ہے

۱۹۸ــ مختلف مقامات پر زاویوں کا مشاہدہ کرنے سے ایک ایسے برج کی بلندی دریافت کرو جس تک ہم نہیں پہنچ سکتے۔



فرض کرو کہ ف ق برج ہے اور پائین برج ق میں سے جو زمین گذرتی ہے وہ متوازی الافق ہے۔

اس زمین کے نقطہ ا پر برج کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ع ناپو مقام ا سے پائین برج کی سیدھ میں فاصلہ اب (=ص) ناپو

اور مقام ب پر زاویۂ ارتفاع بہ مشاہدہ کرو۔
اب برج کی بلندی لا مطلوب ہے، اس کو فاصلہ ص سے
اس طرح منسلک کرو۔

مثلث ن ب ق سے

$$\frac{\text{لا}}{\text{ب ن}} = \text{جب بہ} \quad \ldots\ldots (1)$$

اور مثلث ن ا ب سے

$$\frac{\text{ن ب}}{\text{ص}} = \frac{\text{جب ن ا ب}}{\text{جب ب ن ا}} = \frac{\text{جب عہ}}{\text{جب (بہ - عہ)}} \quad \ldots\ldots (2)$$

چونکہ $\angle$ ب ن ا = $\angle$ ق ب ن - $\angle$ ق ا ن = بہ - عہ

(۱) اور (۲) کو باہم ضرب دینے سے

$$\frac{\text{لا}}{\text{ص}} = \frac{\text{جب عہ جب بہ}}{\text{جب (بہ - عہ)}}$$

یعنی
$$\text{لا} = \text{ص} \, \frac{\text{جب عہ جب بہ}}{\text{جب (بہ - عہ)}}$$

جس سے بلندی لا حاصل ہوتی ہے اور اس ضابطہ کی صورت لوکارتمی حسابات کے لئے نہایت موزوں ہے۔

عددی مثال — اگر ص = ۱۰۰ فٹ، عہ = ۳۰° اور بہ = ۶۰° تو

$$\text{لا} = 100 \, \frac{\text{جب } 30^\circ \text{ جب } 60^\circ}{\text{جب } 30^\circ} = 100 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 86.6 \text{ فٹ}$$

۱۹۹— اگر فاصلہ ا ب کو ق کی سیدھ میں ناپنا آسان

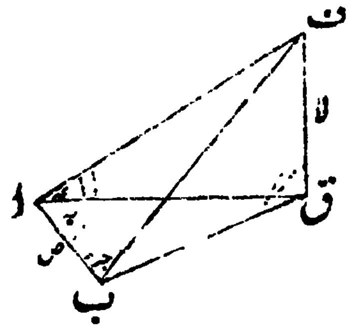
نہ ہو تو اس کو سطح اُفقی پر کسی اور مناسب سمت میں ناپو اور مقام ا پر ف کا زاویۂ ارتفاع عہ مشاہدہ کرو، نیز زاویہ ف ا ب (= بہ) معلوم کرو۔

مقام ب پر زاویہ ف ب ا (= جہ) ناپو۔

مثلث ف ا ب میں

∠ ا ف ب = ۱۸۰° - ∠ ف ا ب - ∠ ف ب ا

= ۱۸۰° - (بہ + جہ)



اس لئے $\frac{\text{ا ف}}{\text{ص}} = \frac{\text{جب ف ب ا}}{\text{جب ب ف ا}} = \frac{\text{جب جہ}}{\text{جب (بہ + جہ)}}$

مثلث ف ا ق سے حاصل ہوگا۔

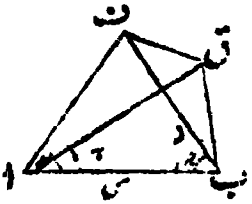
$\text{لا} = \text{ا ف جب عہ} = \text{ص} \frac{\text{جب عہ جب جہ}}{\text{جب (بہ + جہ)}}$

اور یہ جملہ لوکارثمی حسابات کے لئے موزوں ہے۔

۲۰۰ ـــ دو مقامات کے درمیان کا فاصلہ معلوم ہے، اُن پر کھڑے ہوکر دو اور ایسے مقامات کا درمیانی فاصلہ دریافت کرو جن تک ہم نہیں پہنچ سکتے، چاروں مقام

ایک ہی سطح میں واقع ہیں۔

فرض کرو کہ ف اور ق دو مقام ہیں جن کا باہمی فاصلہ ف ق مطلوب ہے۔



فرض کرو کہ مقامات ا اور ب کا فاصلہ (ص) دیا ہوا ہے مقام ا پر زاویے ف ا ب اور ق ا ب ناپو اور ان کو بالترتیب عہ اور بہ سے تعبیر کرو۔

نیز مقام ب پر زاویے ف ب ا اور ق ب ا ناپو اور انکو بالترتیب جہ اور لہ سے تعبیر کرو۔

اب چونکہ مثلث ف ا ب میں ایک ضلع ص اور دو متصل زاویے عہ اور جہ معلوم ہیں اس لئے بموجب دفعہ ۱۶۹، اف ذیل کے ربط سے حاصل ہو سکتا ہے

$$\frac{\text{اف}}{\text{ص}} = \frac{\text{جب جہ}}{\text{جب اف ب}} = \frac{\text{جب جہ}}{\text{جب(عہ+جہ)}} \quad \text{......(۱)}$$

اسی طرح سے مثلث ق ا ب میں

$$\frac{\text{اق}}{\text{ص}} = \frac{\text{جب لہ}}{\text{جب(بہ+لہ)}} \quad \text{......(۲)}$$

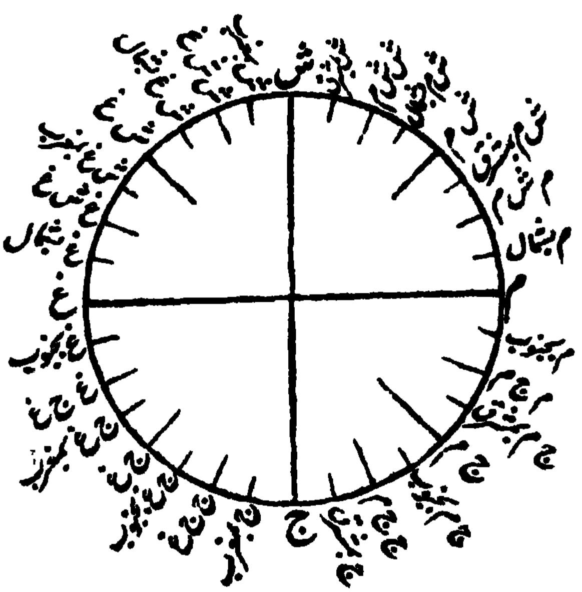
اب ہمیں مثلث ا ف ق کے اضلاع اف اور اق نیز انکا درمیانی زاویہ ف ا ق (= عہ − بہ) معلوم ہوگیا اس لئے ہم ضلع ف ق کو ترکیب دفعہ ۱۸۷ سے

معلوم کر سکتے ہیں۔

اگر چاروں مقامات د، ب، ف، ق ایک ہی سطح میں نہ ہوں تو ہمیں زاویہ ف د ق بھی ناپ لینا چاہیئے کیونکہ اس صورت میں ف د ق زاویہ عہ - بہ کے برابر نہیں ہے، باقی سب طرح سے حل مندرجہ بالا عمل کے مطابق ہوگا۔

۱۰۲ — بحری قطب نما کے نقاط و جہات

اگر نقطہ معینہ و پر کھڑے ہوکر ایک اور نقطہ معلوم ب کی طرف دیکھیں تو جس سمت میں نقطہ ب نقطہ و سے نظر آئے اس کو بلحاظ نقطہ و کے نقطہ ب کی جہت کہتے ہیں مثلاً اگر و ب اسمات شمال اور



مشرق کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرے تو
ب کی جہت یا سمت کو ہم "شمال۔ مشرق" کہینگے۔
اگر یہ کہا جائے کہ ایک خط کی جہت یا سمت شمال سے
۲۰° مغرب کو ہے تو اس کا یہ مطلب ہوگا کہ یہ سمت
شمال سے زاویہ ۲۰° بناتی ہے اور یہ زاویہ شمال کی
جانب سے مغرب کی طرف کو ناپا گیا ہے۔

اس غرض سے کہ ایک نقطہ کی جہت بآسانی قائم
ہو سکے یا بیان ہو سکے بحری قطب نما کے کارڈ کو
۳۲ مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں ملاحظہ ہو شکل بالا
ان حصوں میں مختلف نشان لگے ہوئے ہیں۔ فرض کرو
کہ فی الحال زیر بحث صرف وہی ربع ہے جو شمال اور
مشرق کے درمیان واقع ہے۔ ش اور م کی درمیانی
قوس کے نقطہ وسط پر نشان ش م یعنی "شمال۔مشرق"
بنا ہوا ہے۔

نیز ش م اور ش اور م کے درمیان جو قوسیں ہیں
ان کے منصفوں پہ بالترتیب "شمال۔ شمال۔مشرق" اور
"مشرق۔شمال۔مشرق" (یعنی ش ش م اور م ش م)
لکھا ہوا ہے۔

اگر شمال کی طرف سے شمار کیا جائے تو باقی چھوٹے
چار حصوں کو شمال بمشرق، ش م بشمال، ش م بمشرق
اور مشرق بشمال کہتے ہیں اسی طرح سے قطب نما کے

باقی تین حصے بھی منقسم ہو سکتے ہیں ۔
ظاہر ہے کہ کارڈ کے دو چھوٹے درجوں کی درمیانی قوس کے محاذی مرکز و پر زاویہ $\frac{۳۶۰°}{۳۲}$ یعنی $۱۱\frac{۱}{۴}°$ بنتا ہے ۔

امثلہ نمبری ۳۳

۱ ۔ ایک مربع برج کے وسط میں ایک علم قائم ہے، ایک شخص کو جو برج کے ایک رخ کے وسط کے مقابل زمین پر چلتا ہے علم کی چوٹی عین سو فٹ کے فاصلے سے دکھائی دینی شروع ہوتی ہے، ۱۰۰ فٹ پیچھے ہٹنے پر وہ برج کی چوٹی اور علم کی چوٹی کے ارتفاعی زاویوں کو مشاہدہ کرتا ہے، ان زاویوں کے مماس بالترتیب $\frac{۱}{۲}$ اور $\frac{۵}{۹}$ ہیں، برج کی بلندی اور عرض نیز علم کی بلندی دریافت کرو، زمین متوازی الافق ہے ۔

۲ ۔ سطح ہموار پر ایک شخص ایک برج کی سیدھ میں جاتا ہے اور ایک خاص مقام پر برج کا زاویہ ارتفاع ۱۰° مشاہدہ کرتا ہے، برج کی سمت میں ۵۰ گز جانے کے بعد وہی زاویہ ارتفاع ۱۵° دکھائی دیتا ہے، اگر معلوم ہو
ل جب ۱۵° = ۹٫۴۱۲۹۹۶۲، ل جم ۵° = ۹٫۹۹۸۳۴۴۲
لوک ۲۵٫۷۸۳ = ۱٫۴۱۱۳۳۳۴ اور لوک ۲۵٫۷۸۴ = ۱٫۴۱۱۳۵۰۲
تو برج کی بلندی گزوں میں ۴ مرتبہ کے اعشاریہ تک دریافت کرو ۔

۳ ۔ ایک برج دع سطح اُفقی پر کھڑا ہے اور اسی

سطح میں ایک خط اب ج د واقع ہے، برج کی بلندی کے محاذی ا پر زاویہ طہ، ب پر زاویہ ۲طہ اور ج پر زاویہ ۳طہ بنتا ہے اگر اب اور ب ج بالترتیب ۵۰ اور ۲۰ فٹ ہوں تو برج کی بلندی اور فاصلہ ج د معلوم کرو۔

۴ — ایک ۵۰ فٹ اونچا برج ایک ٹیلے کی چوٹی پر واقع ہے، سطح زمین پر کے کسی نقطہ سے برج کے پائین اور راس کے ارتفاعی زاوئے بالترتیب ۴۵° اور ۴۵° ناپے گئے ہیں، ٹیلے کی بلندی دریافت کرو۔

۵ — ایک عمودی لاٹھ ۱۰۰ فٹ سے زیادہ اونچی ہے اور اس کے دو حصے ہیں، نچلا حصہ کل طول کا $\frac{1}{3}$ ہے، لاٹھ کی جڑمیں سے جو سطح اُفقی گذرتی ہے اس پر ایک نقطہ لاٹھ سے ۴۰ فٹ کے فاصلے پر لیا گیا ہے اور اوپر کے حصے کے محاذی اُس نقطہ پر جو زاویہ بنتا ہے اُسکا مماس $\frac{1}{2}$ ہے، لاٹھ کی بلندی دریافت کرو۔

۶ — ایک برج کے محاذی ایک نقطہ پر جو پائین برج میں سے گذرنیوالی سطح اُفقی پر واقع ہے زاویہ هہ بنتا ہے اور ایک دوسرے نقطہ پر جو پہلے نقطہ سے ح فٹ اونچا ہے پائین برج کا زاویہ انخفاض یہ مشاہدہ کیا گیا ہے، برج کی بلندی دریافت کرو۔

۷ — سطح سمندر کے کنارے ہموار زمین کے کسی مقام سے ایک شخص غبارہ کے ذریعہ سمت راس میں اوپر چڑھا اور

اس نے سمندر میں ایک ساکن جہاز کا زاویہ نشیب ۳۰° مشاہدہ کیا، پھر ۶۰۰ فٹ عمودی سمت میں نیچے اترنے کے بعد اس نے دیکھا کہ زاویہ نشیب ۱۵° ہے، نقطہ صعود سے جہاز کا افقی فاصلہ دریافت کرو۔

۸۔ سطح ہموار پر ایک برج ف ق کا پائیں ق ہے، اسی سطح افقی میں دو اور نقاط ا اور ب ایسے ہیں کہ ∠ق ا ب = ۹۰° اور ا ب = ۴۰ فٹ، نیز یہ معلوم ہے کہ

$$\text{مم ف ا ق} = \frac{3}{10} \quad \text{اور مم ف ب ق} = \frac{1}{2}$$

برج کی بلندی دریافت کرو۔

۹۔ ایک مینار کسی شخص کے م ج م کی طرف واقع ہے، اور دو پہر کے وقت اس کے سایہ کا سرا ایک شخص کے شمال۔مشرق کی طرف ہوتا ہے، اگر سایہ ۸۰ فٹ لمبا ہو اور نقطہ نظر سے مینار کا ارتفاع ۴۵° ہو تو مینار کی بلندی دریافت کرو۔

۱۰۔ دو مقامات ا اور ب سے ایک برج کا مشاہدہ کرنے پر معلوم ہوا کہ یہ ا کے شمال کی طرف اور ب کے شمال۔مغرب کی طرف واقع ہے، ب مقام ا سے ۱۰۰ فٹ کے فاصلے پر مشرق کی طرف کو ہے، اگر مقام ا سے برج کا زاویہ ارتفاع دیکھا جائے تو یہ زاویہ اس زاویہ ارتفاع کے متمم کے برابر ہوتا ہے جو مقام ب سے مشاہدہ کیا گیا ہو، برج کی بلندی دریافت کرو۔

ایک مینار کا ارتفاع ایک ایسے مقام سے جو اس کے
، طرف واقع ہے ۴۵° ہے اور ایک دوسرے مقام
مقام اول الذکر کے مغرب کی طرف واقع ہے ۱۵° ہے؛
و مقامات کے درمیان فاصلہ ا ہو تو ثابت کرو کہ

$\frac{ا(۱-\sqrt{۳})}{۲\sqrt[۴]{۳}}$ ہے۔

۔ ایک گرجے کے برج کا قاعدہ شکل میں مربع ہے؛
شخص اس کے قطر ممدودہ پر ۱۲ فٹ کے فاصلے پر
وکر برج کی چوٹی کے دو بیرونی کونوں میں سے ہر ایک
اویہ ارتفاع کو ۳۰° مشاہدہ کرتا ہے، نیز سب سے
ے کونے کا ارتفاع ۴۵° ہے؛ ثابت کرو کہ برج کا
ا ($\sqrt{۱۰}-\sqrt{۲}$) فٹ ہے۔

ـــ ایک برج سطح افقی پر قائم ہے اور ایک شخص
کے جنوب کی طرف مقام ا پر کھڑا ہوکر اس کا زاویہ
ع ۶۰° مشاہدہ کرتا ہے، پھر وہ ا کے مغرب کی طرف
ب پر جاتا ہے اور اس جگہ زاویہ ارتفاع ۴۵° پاتا ہے؛
کے بعد اب ممدودہ میں ایک مقام ج پر زاویہ
ع ۳۰° ہوتا ہے، ثابت کرو کہ مقام ب مقامات
ا ج کے عین وسط میں واقع ہے۔

ـــ ایک افقی قاعدہ کا طول ۲ ا ہے اور اس کے
ناروں سے ایک چوٹی کا زاویہ ارتفاع ط مشاہدہ کیا گیا ہے

اور اس کے وسط سے یہی زاویہ فہ دکھائی دیتا ہے ثابت کرو کہ چوٹی کی بلندی $\frac{\text{ا جب طہ جب فہ}}{\sqrt{\text{جب(فہ + طہ) جب(فہ - طہ)}}}$ ہے

۱۵ — دو مقامات ا اور ب کے درمیان فاصلہ ۱۰۰۰ فٹ ہے اسی سطح اُفقی میں جس میں ا ب واقع ہے ف اور ق خط ا ب کی ایک ہی جانب میں واقع ہیں، زاویے ف ا ب، ف ب ا، ق ا ب، ق ب ا بالترتیب ۷۵°، ۳۰°، ۴۵° اور ۹۰° ہیں، معلوم کرو کہ ف مقام ق سے کتنی دور ہے اور انہیں سے ہر ایک ا اور ب سے کتنی دور ہے۔

امثلہ ذیل کے حل کرنے میں لوکارتمی جداول کی ضرورت ہوگی

۱۶ — سطح اُفقی کے ایک نقطہ پر کسی پہاڑ کی چوٹی کا ارتفاع ۲۲° ۱۵َ ہے اور سطح کے ایک اور نقطہ پر جو کہ پہاڑ اور نقطہ اول کو ملانے والے خط راست میں نقطۂ اول سے ایک میل کے فاصلے پر واقع ہے چوٹی کا ارتفاع ۱۰° ۱۲َ ہے، پہاڑ کی بلندی دریافت کرو۔

۱۷ — ایک پہاڑ کی چوٹی سے دو مسلسل میل کے پتھروں کے انخفاضی زاویے ۵° اور ۱۰° مشاہدہ کئے گئے ہیں، پتھر ہموار زمین پر ایک ایسی سطح عمودی میں واقع ہیں جو نقطہ نظر میں سے گذرتی ہے، پہاڑ کی بلندی اور نزدیک کے پتھر کا افقی فاصلہ دریافت کرو۔

۱۸ — سطح افقی پر ایک قلعہ اور مقبرہ ہے، قلعہ کی بلندی ۱۴۰ فٹ ہے اور اسکی چوٹی سے مقبرہ کی چوٹی اور پائین کے انخفاضی زاویے ۴۰° اور ۸۰° مشاہدہ کئے گئے ہیں، مقبرہ کی بلندی دریافت کرو۔

۱۹ — ایک علم ع ن ہموار زمین پہ قائم ہے، ایک قاعدہ ا ب خط ا ن کی عمودی سمت میں ناپا گیا ہے، نقاط ا، ب، ن ایک ہی سطح اُفقی میں واقع ہیں اور زاوئے ع ا ن اور ع ب ن بالترتیب عہ اور بہ ہیں، ثابت کرو کہ علم کی بلندی $\text{ا ب}\,\dfrac{\text{جب عہ جب بہ}}{\sqrt{\text{جب(عہ − بہ) جب(عہ + بہ)}}}$ ہے

اگر ا ب = ۱۰۰ فٹ، عہ = ۷۰° اور بہ = ۵۰° تو بلندی دریافت کرو۔

۲۰ — ایک شخص نے ایک برج کے ٹھیک جنوب میں اُس سطح اُفقی پر کھڑے ہوکر جو پائین برج میں سے گذرتی ہے برج کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ۴۵° ۱۲′ دیکھا، ۱۰۰ گز مشرق کی طرف جانے پر اُس نے ارتفاع ۵۰° ۸′ پایا، برج کی بلندی دریافت کرو۔

۲۱ — ایک شخص نے غبارہ میں بیٹھکر زمین پر ایک چیز کا زاویہ انخفاض ۳۴° دیکھا، وہ چیز اس وقت اس کے ٹھیک جانب شمال میں تھی، اس کے بعد ہوا غبارہ کو ۳ میل مغرب کی طرف لیگئی اب زاویہ انخفاض ۲۱° تھا، غبارہ کی بلندی دریافت کرو۔

۲۲ — ایک بنیادی خط ا ب (= ۱۰۰۰ فٹ) کے دونوں

سروں سے پائیں برج ج کی جہات مشاہدہ کی گئیں اور معلوم ہوا کہ ∠ ج ا ب = ۵۶° ۲۳' اور ∠ ج ب ا = ۴۷° ۱۵' اور مقام ا سے برج کا ارتفاع ۹° ۲۵' دیکھا گیا، برج کی بلندی دریافت کرو۔

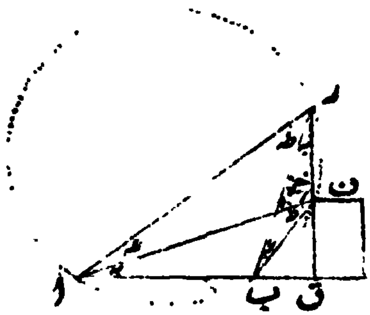
۲۰۲ — مثال ا — سطح افقی پر ایک برج ہے اور برج کی چوٹی پر ایک جھنڈا ہے۔ جھنڈے اور برج کے محاذی سطح اُفقی کے ایک مقام پر زاوئے عہ اور بہ بنتے ہیں، ایک شخص اُن کو ناپتا ہے اس کے بعد وہ برج کے پائیں کی طرف ایک معلوم فاصلہ ا چلکر دیکھتا ہے کہ جھنڈے کے محاذی نئے مقام پر وہی زاویہ بنتا ہے جو پہلے تھا، ثابت کرو کہ برج کی بلندی اور جھنڈے کا طول بالترتیب

$$\frac{\text{ا جب بہ جم (عہ + بہ)}}{\text{جم (عہ + ۲ بہ)}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{ا جب عہ}}{\text{جم (عہ + ۲ بہ)}} \quad \text{ہیں}$$

فرض کرو کہ ف چوٹی اور ق پائین برج ہے۔ نیز ف ر جھنڈا ہے۔ فرض کرو کہ نقاط ا اور ب پر زاوئے ناپے گئے ہیں یعنی ∠ ف ا ق = بہ اور ∠ ف ا ر = ∠ ف ب ر = عہ، چونکہ یہ دو آخری زاوئے برابر ہیں اس لئے ان چار نقاط ا، ب، ف، ر میں سے ایک دائرہ گذریگا۔

جھنڈے کی بلندی دریافت کرنیکے لئے ہمیں نامعلوم

طول ف ر اور معلوم طول ا ب کا باہمی تعلق دریافت کرنا چاہیئے ۔ اس غرض سے ہمکو چاہیئے کہ ان میں سے ہر ایک طول کو ا ر کے ساتھ ایک ربط کے ذریعہ منسلک کردیں ۔



سب سے اول مثلث ا ر ف اور ا ر ب کے زاویوں کی تحقیق کرنی چاہیئے ۔

چونکہ نقاط ا، ب، ف، ر ایک دائرہ پر واقع ہیں

اس لئے ∠ ب ر ف = ∠ ب ا ف = بہ

اور ∠ ا ف ب = ∠ ا ر ب = طہ (فرض کرو)

نیز ∠ ا ف ر = ۹۰° + ∠ ف ا ق = ۹۰° + بہ

اب چونکہ مثلث ا ف ر کے زاوے ملکر دو قائموں کے برابر ہیں اس لئے

۱۸۰° = عہ + (۹۰° + بہ) + طہ + بہ

یعنی طہ = ۹۰° − (عہ + ۲ بہ) .... (۱)

مثلث ا ف ر اور ا ب ر سے

ن ر / جب عہ = ا ر / جب ا ن ر = ا ر / جب ر ب ر = ا / جب طہ (دفعہ ۱۶۹)

[باب پانزدہم سے معلوم ہوگا کہ ان میں سے ہر ایک مقدار قطر دائرہ کے برابر ہے]

پس جھنڈے کی بلندی = ن ر = ا جب عہ / جب طہ = ا جب عہ / جم (عہ + ۲ بہ) بذریعہ (۱)

نیز ن ق / ن ب = جم ب ن ق = جم (عہ + بہ) .... (۲)

اور ن ب / ا = جب ن ا ب / جب ا ن ب = جب بہ / جب طہ .... (۳)

تعلقات (۲) اور (۳) کو اکٹھا ضرب دینے سے

ن ق / ا = جب بہ جم (عہ + بہ) / جب طہ = جب بہ جم (عہ + بہ) / جم (عہ + ۲ بہ) بذریعہ (۱)

نیز ب ق = ن ق مس ب ن ق

= ن ق مس (عہ + بہ) = ا جب بہ جب (عہ + بہ) / جم (عہ + ۲ بہ)

اور ا ق = ا + ب ق = ا [جم (عہ + ۲ بہ) + جب بہ جب (عہ + بہ)] / جم (عہ + ۲ بہ)

= ا جم بہ جم (عہ + بہ) / جم (عہ + ۲ بہ)

اگر ا، عہ اور بہ کی عددی قیمتیں دی ہوئی ہوں تو ان نتائج کی شکل لوکارثمی حسابات کے لئے نہایت موزوں ہے۔

مثال ۲۔ برج ن ق کی بلندی ب معلوم ہے، برج کے اوپر ایک جھنڈا ق ر ہے، پائیں برج سے فاصلہ ا پر برج اور جھنڈے دونوں کے

محاذی برابر زاوئے بنتے ہیں، جھنڈے کی بلندی دریافت کرو۔
فرض کرو کہ ن نقطہ نگاہ ہے اور زاویوں ف ن ق اور ق ن ل میں سے ہر ایک طہ کے برابر ہے۔ نیز فرض کرو کہ بلندی ق ر = ما

تب مس طہ = $\frac{ب}{ا}$ اور مس ۲طہ = $\frac{ب + ما}{ا}$

اسلئے $\frac{ب + ما}{ا}$ = مس ۲طہ = $\frac{۲ مس طہ}{۱ - مس^۲ طہ}$ = $\frac{\frac{۲ ب}{ا}}{۱ - \frac{ب^۲}{ا^۲}}$

یعنی $\frac{ب + ما}{ا} = \frac{۲ ا ب}{ا^۲ - ب^۲}$

تب ما = $\frac{۲ ا^۲ ب}{ا^۲ - ب^۲}$ - ب = ب $\frac{ا^۲ + ب^۲}{ا^۲ - ب^۲}$

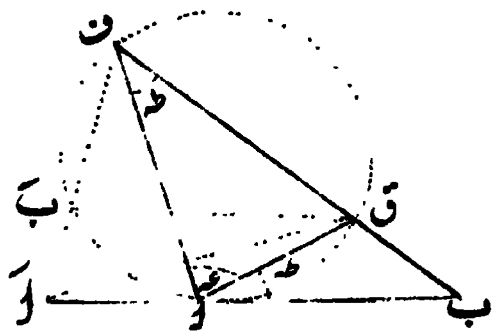
اگر ا اور ب کی عددی قیمتیں دی ہوئی ہوں تو ما بآسانی حاصل ہو سکتا ہے۔

۲۰۳ — ایک شخص سیدھی سڑک پر جاتا تھا اس نے سڑک کے ایک مقام پر دیکھا کہ دو اشیاء کے محاذی بڑے سے بڑا زاویہ عہ بنتا ہے اور اس مقام سے سڑک فاصلہ ص آگے چلکر اس نے دیکھا کہ دونوں اشیا ایک ایسے خط مستقیم میں واقع ہیں جو سڑک سے زاویہ بہ بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ اشیا کے درمیان فاصلہ

ص جب عہ جب بہ قط $\frac{عہ + بہ}{۲}$ قط $\frac{عہ - بہ}{۲}$ ہے

فرض کرو کہ ف اور ق دو نقطے ہیں اور خط ف ق سڑک کو نقطہ ب پر ملتا ہے اگر نقطہ ا پر بڑے سے بڑا زاویہ بنے تو لازماً نقاط ف اور ق میں سے گذرنیوالا دائرہ

سٹرل کو نقطہ اؔ پر مس کریگا۔



[کیونکہ فرض کروکہ اب پر کوئی اور نقطہ اؔ ہے اسکو ف سے ملاؤ اور فرض کروکہ اؔف دائرہ کو نقطہ بؔ پر قطع کرتا ہے۔

تب زاویہ ف اؔق < زاویہ ف بؔق (اقلیدس م ا ش ۱۶)

اور اس لئے < زاویہ ف ا ق (اقلیدس م ۳ ش ۲۱)]

فرض کروکہ زاویہ ق اب = طہ تب

بموجب اقلیدس م ۳ ش ۳۲ زاویہ اف ق بھی طہ کے برابر ہے

اس لئے ۱۸۰° = مثلث ف اب کے زاویوں کا مجموعہ

= طہ + (عہ + طہ) + بہ

یعنی طہ = ۹۰° − $\frac{\text{عہ} + \text{بہ}}{۲}$

مثلثات ف ا ق اور ق اب سے

$\frac{\text{ف ق}}{\text{ا ق}} = \frac{\text{جب عہ}}{\text{جب طہ}}$ اور $\frac{\text{ا ق}}{\text{ص}} = \frac{\text{جب بہ}}{\text{جب اق ب}} = \frac{\text{جب بہ}}{\text{جب (طہ + عہ)}}$

اس لئے عمل ضرب سے حاصل ہوگا

$$\frac{\text{ف ق}}{\text{ص}} = \frac{\text{جب عہ جب بہ}}{\text{جب طہ جب (طہ + عہ)}}$$

$$= \frac{\text{جب عہ جب بہ}}{\text{جم } \frac{\text{عہ} + \text{بہ}}{۲} \text{ جم } \frac{\text{عہ} - \text{بہ}}{۲}}$$

$$\therefore \text{ف ق} = \text{ص جب عہ جب بہ قط } \frac{\text{عہ} + \text{بہ}}{۲} \text{ قط } \frac{\text{عہ} - \text{بہ}}{۲}$$

امثلہ نمبری ۳۴

۱ — ایک پل ۶ ستونوں پر قائم ہے جو ایک دوسرے سے برابر برابر فاصلوں پر ہیں اور دو مسلسل ستونوں کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ ۱۰۰ فٹ ہے، ایک کشتی ایک درمیانی ستون کی سیدھ میں لنگر ڈالے کھڑی ہے اور پل کی تمام لمبائی کے محاذی کشتی پر زاویہ قائمہ بنتا ہے ثابت کرو کہ کشتی کا فاصلہ پل سے $۱۰۰\sqrt{۶}$ فٹ ہے۔

۲ — ایک سیڑھی بازار کے ایک طرف ۲۷ فٹ اونچی کھڑکی کے نچلے پتھر تک پہنچتی ہے اور زمین سے زاویہ °۷۵ کا بناتی ہے، سیڑھی کے نچلے سرے کو قائم رکھکر اس کو اسطرح پھرایا گیا ہے کہ وہ بازار کی دوسری طرف دیوار کے ساتھ جا لگتی ہے اس حالت میں سیڑھی کا زاویہ زمین کے ساتھ °۱۵ ہوتا ہے، ثابت کرو کہ بازار کی چوڑائی اور سیڑھی کی لمبائی بالترتیب $۲۷(۳-\sqrt{۳})$ اور $۲۷(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})$ فٹ ہے۔

۳ — بازار کی ایک طرف ایک گھر سے مقابل کے گھر کی

اونچائی کے محاذی جو زاوئے بنتے ہیں اُنکا مشاہدہ کیا گیا ہے سطح زمین پر اونچائی کے محاذی جو زاویہ بنتا ہے اُس کا مماس ۲ ہے اور دو کھڑکیوں پر جو ایک دوسرے کے اوپر واقع ہیں اونچائی کے محاذی جو زاوئے بنتے ہیں اُن میں سے ہرایک کا مماس ۳ ہے، اگر مقابل کے گھر کی بلندی ۶۰ فٹ ہو تو سطح زمین سے دونوں کھڑکیوں کی بلندیاں دریافت کرو۔

۴ــ ایک سلاخ کا طول معلوم ہے اور اُس کا ایک سرا زمین پر ثابت کردیا گیا ہے، اگر وہ سورج میں سے گذرنیوالی سطح عمودی میں بلا تکلف حرکت کرسکے تو بڑے سے بڑے سایہ کا طول جو سلاخ زمین پر ڈال سکتی ہے دریافت کرو۔

اگر بڑے سے بڑا سایہ سلاخ کے طول کا $\frac{1}{2}$۲ گنا ہو تو سورج کا ارتفاع دریافت کرو۔

۵ــ جہاز ا پر ایک شخص ایک اور جہاز ب کو بندرگاہ سے باہر آتا ہو دیکھتا ہے اس وقت بندرگاہ کی جہت شمال مغرب ہے۔ دس منٹ تک ا ایک میل شمال بمشرق کی طرف جاتا ہے اور اُس وقت اس کے مقام سے جہاز ب ٹھیک مغرب کی طرف دکھائی دیتا ہے اور بندرگاہ کی سمت اُس وقت شمال سے ۶۰° کا زاویہ مغرب کی طرف کو بناتی ہے اور دس منٹ کے بعد ب کی سمت جنوب مغرب ہوتی ہے ا اور ب کا درمیانی فاصلہ اول مشاہدہ کیوقت دریافت کرو نیز ب کی سمت اور رفتار معلوم کرو۔

۶ — ایک جہاز شمال کی طرف جا رہا تھا اُس پر ایک شخص نے ٹھیک اپنے مغرب کی طرف ایک سیدھ میں دو روشنی گھر دیکھے جن کا درمیانی فاصلہ ۶ میل تھا۔ ایک گھنٹہ کے بعد ایک روشنی گھر کی سمت جنوب۔مغرب تھی اور دوسرے کی جنوب۔جنوب مغرب جہاز کی رفتار دریافت کرو۔

۷ — تختۂ جہاز پر ایک شخص نے ایک روشنی گھر کو اپنے ٹھیک شمال مغرب کی طرف دیکھا، اس کے بعد جہاز ۱۲ میل ایسی سمت میں چلا جو سمت مغرب سے جنوب کی طرف کو °۱۵ کا زاویہ بناتی تھی۔ اُس وقت روشنی گھر کی سمت شمال تھی، ہر ایک مقام پر جہاز کا فاصلہ روشنی گھر سے دریافت کرو۔

۸ — ایک شخص سیدھی سڑک پر مغرب کی طرف جا رہا تھا اُس نے دیکھا کہ جب وہ ایک پون چکی کے ٹھیک جنوب میں ہو تو جو خط مستقیم اس کے مقام کو ایک دور کے برج کے ساتھ وصل کرتا ہے وہ سڑک سے زاویہ °۳۰ بناتا ہے، ایک میل آگے چل کر پون چکی اور برج کی اسمات اس نے بالترتیب شمال مشرق اور شمال مغرب دیکھیں، برج کے فاصلے پون چکی سے اور سڑک کے قریب ترین نقطہ سے دریافت کرو۔

۹ — اُونچی زمین پر کھڑے ہوکر ایک شخص نے ایک جہاز کو ٹھیک اپنے شمال کی طرف دیکھا۔ ایک چوتھائی گھنٹہ کے بعد جہاز کی سمت ٹھیک مشرق تھی، اور آدھ گھنٹہ گذرنے کے بعد جہاز کی سمت جنوب مشرق ہوگئی۔ اگر یہ فرض کرلیا جائے کہ

جہاز یکساں رفتار سے ایک خط مستقیم میں حرکت کرتا ہے تو جہاز کی سمتِ طریق اور نصف النہار کے درمیان جو زاویہ بنے اس کو دریافت کرو۔ نیز وہ وقت معلوم کرو جو جہاز کو اول مشاہدہ کے مقام سے اس مقام تک طے کرنے میں صرف ہوا جب وہ مشاہدہ کرنے والے کے نہایت ہی قریب تھا۔

۱۰۔ ایک شخص سیدھی سڑک پر جا رہا تھا جو سمت شمال سے مشرق کی طرف کو ۳۰° کا زاویہ بناتی تھی۔ اس نے ایک مقام پر دیکھا کہ وہ ایک گھر کے ٹھیک جنوب کیطرف ہے ایک میل آگے جانے پر اس نے مشاہدہ کیا کہ گھر اس کے ٹھیک مغرب کی طرف ہے اور سڑک کے مقابل کی جانب میں اس وقت ایک پون چکی اس کو ٹھیک اپنے شمال مشرق کیطرف دکھائی دی۔ تین میل آگے چلکر اس نے دیکھا کہ وہ چکی کے ٹھیک شمال کی طرف ہے ثابت کرو کہ چکی اور گھر کا خط وصل سڑک کے ساتھ ایک ایسا زاویہ بناتا ہے جس کا مماس $\frac{۴۸-۲۵\sqrt{۳}}{۱۱}$ ہے۔

۱۱۔ ایک سیدھی سڑک پر تین متسلسل میل کے پتھروں ا، ب، ج سے ایک دور کا مینارہ دکھائی دیتا ہے، مینارہ کی سمت ا پر شمال مشرق اور ب پر ٹھیک مشرق ہے اور ج پر سمت جنوب سے مشرق کی طرف کو ۶۰° کا زاویہ بناتی ہے، ثابت کرو کہ سڑک سے مینارہ کا کم سے کم فاصلہ $\frac{۷+۵\sqrt{۳}}{۱۳}$ میل ہے۔

۱۲۔ ایک برج شمال کی طرف جھکا ہوا ہے اور پائیں برج سے ا اور ب فٹ کے فاصلوں پر دو مقامات برج کے عین جنوب میں

واقع ہیں اگر ان مقامات سے برج کی چوٹی کے ارتفاعی زاویے عہ اور بہ ہوں تو ثابت کرو کہ برج کا میلان افق سے $\text{مم}^{-1} \frac{\text{ب مم عہ} - \text{ا مم بہ}}{\text{ب} - \text{ا}}$ ہے

۱۳ — سطح ہموار کے ایک نقطہ ا پر ایک غبارہ کا زاویہ ارتفاع عہ دکھائی دیا، غبارہ اس وقت ا کے ٹھیک جنوب کیطرف تھا۔ نقطہ ب سے جو ا کے جنوب میں فاصلہ ج پر واقع ہے غبارہ کا زاویہ ارتفاع شمال کی طرف بہ مشاہدہ ہوا، نقطہ ا سے غبارہ کا فاصلہ، نیز غبارہ کی بلندی زمین سے دریافت کرو۔

۱۴ — ایک ستون کی چوٹی پر ایک بت ہے اور اس کے محاذی ستون سے ۹ اور ۱۱ گز کے فاصلوں پر ایک ہی زاویہ عہ بنتا ہے، اگر مس عہ = $\frac{۱}{۱۰}$ تو ستون اور بت کی بلندیاں دریافت کرو۔

۱۵ — ایک برج کی چوٹی پر ایک علم قائم ہے، سطح مستوی پر قاعدۂ برج کے مرکز میں سے ایک خط گذرتا ہے اس پر دو ایسے نقاط ہیں جنکا باہمی فاصلہ ۲ ا ہے اور جن میں سے ہر ایک پر علم کے محاذی زاویہ عہ بنتا ہے، اگر ان نقطوں کو ملانیوالے خط کے نقطۂ تنصیف پر علم کے محاذی زاویہ بہ بنے تو ثابت کرو کہ علم کی بلندی

$$\text{ا جب عہ} \sqrt{\frac{\text{۲ جب بہ}}{\text{جم عہ جب (بہ - عہ)}}} \quad \text{ہے}$$

۱۶ — کسی ٹیلے پر ایک ستون ہے، ستون سے ا فٹ کے فاصلے پر کھڑے ہو کر ایک شخص نے دیکھا کہ اس کی آنکھ پر

جو زاویہ ستون کے محاذی بنتا ہے اس کا مماس $\frac{۱}{۲}$ ہے، ستون کی سیدھ میں فاصلہ $\frac{۲}{۳}$ ا فٹ جانے پر اس نے دیکھا کہ ستون کے محاذی اس کی آنکھ پر وہی زاویہ بنتا ہے جو پہلے تھا۔ ٹیلے اور ستون کی بلندیاں دریافت کرو۔ اس مثال میں ہم مشاہدہ کرنیوالے کی آنکھ کو ٹیلے کے قاعدہ میں سے گذرنیوالی سطح مستوی پر منطبق خیال کرتے ہیں۔

۱۷ — ایک دریا کا عرض ۱۵۰ فٹ ہے، اس کے کنارہ پر ایک گرجے کا برج ہے اور برج کی چوٹی پر ایک مینارہ ہے جسکی بلندی ۳۰ فٹ ہے، دریا کے دوسرے کنارہ پر ایک شخص نے دیکھا کہ اگر ایک ۶ فٹ اونچی لکڑی پائیں برج میں سے گذرنیوالی سطح مستوی پر برج کے قریب سیدھی کھڑی کی جائے تو اس لکڑی اور مینارہ دونوں کے محاذی اس کی آنکھ پر ایک ہی زاویہ بنتا ہے، ثابت کرو کہ برج کی بلندی تقریباً ۲۸۵ فٹ ہے۔

۱۸ — ایک شخص ایک برج کی بلندی دریافت کرنا چاہتا ہے، اس نے پائیں برج میں سے گذرنیوالی سطح مستوی کے ایک مقام پر کھڑے ہوکر چوٹی کا ارتفاع ۳۰° دیکھا۔ کسی خاص سمت میں ایک فاصلہ ا جانے پر اس نے دیکھا کہ چوٹی کا ارتفاع وہی ہے جو پہلے تھا اور سمت مذکورہ کی عمودی سمت میں فاصلہ $\frac{۵}{۳}$ ا جانے پر اس نے چوٹی کا ارتفاع ۶۰° دیکھا، ثابت کرو کہ برج کی بلندی ا $\sqrt{\frac{۵}{۶}}$ ہے یا ا $\sqrt{\frac{۸۵}{۴۸}}$

۱۹ — سطح افقی پر ایک برج ہے، برج کے قاعدہ سے

ا اور ب فٹ کے فاصلہ پر برج کی سیدھ میں دو نقاط ہیں اور ان پر جو ارتفاعی زاوئے برج کی چوٹی کے محاذی بنتے ہیں وہ ایک دوسرے کے متمم ہیں، ثابت کرو کہ برج کا ارتفاع $\sqrt{\text{اب}}$ فٹ ہے۔
اگر دو نقاط کے خط وصل کے محاذی برج کی چوٹی پر زاویہ طہ بنے تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب طہ} = \frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ا} + \text{ب}}$$

۲۰ — ایک ۸۰ فٹ اونچے ٹیلے کی چوٹی پر ایک ۱۵۰ فٹ بلند برج ہے، معلوم کرو کہ ٹیلے کے پائیں سے جو سطح گذرتی ہے اس کے کس مقام پر ایک شخص کھڑا ہو کہ برج اور ٹیلہ کے محاذی اس کی انکھ پر برابر زاوئے بنیں، آنکھ کی اونچائی ۵ فٹ ہے

۲۱ — سطح ہموار پر ایک ستون ہے اور ستون کی چوٹی پر ایک بت ہے، اگر ایک شخص کی انکھ پر بت کے محاذی بڑے سے بڑا زاویہ عہ بنے جبکہ وہ ستون سے ج فٹ کے فاصلہ پر ہو تو ثابت کرو کہ بت کی بلندی ۲ ج مس عہ فٹ ہے، ستون کی بلندی بھی دریافت کرو۔

۲۲ — ایک سطح مائل اور سطح ہموار کے خط فصل پر ایک برج ہے اور سطح مائل افق سے زاویہ ۹° بناتی ہے، اگر پائیں برج سے سطح مائل کے اوپر کی طرف ۱۰۰ فٹ لمبا مستقیم خط ناپا جائے اور اس خط کے سرے پر برج کے محاذی زاویہ ۴۵° بنے تو برج کی بلندی دریافت کرو۔ معلوم ہے لوک ۲ = ۰٫۳۰۱۰۳
لوک ۱۲۲٫۴۱۵۱۱ = ۲٫۰۵۸۴۲۶

اور ل جب ۵۴° = ۹٫۹۰۷۹۵۷۶

۲۳ — ایک ڈھلان اُفق سے ۱۵° کا زاویہ بناتی ہے، اُس پر ایک عمودی برج قائم ہے، ایک شخص پائیں برج سے ڈھلان کے اوپر کی طرف ۸۰ فٹ چڑھکر دیکھتا ہے کہ اس کی آنکھ پر برج کے محاذی زاویہ ۳۰° بنتا ہے، ثابت کرو کہ برج کی بلندی

۴۰ (√۶ − √۲) فٹ ہے

۲۴ — ایک چٹان کا ارتفاع ۴۷° ہے، ایک شخص ایک سطح مائل پر جو اُفق سے ۳۰° کا زاویہ بناتی ہے ۱۰۰۰ فٹ چٹان کی طرف چڑھکر دیکھتا ہے کہ اس کا ارتفاع ۷۷° ہے اگر جب ۴۷° = ۷۳۱۳۵٫ تو اُس مقام سے چٹان کی عمودی بلندی دریافت کرو جہاں سب سے پہلے زاویہ ارتفاع مشاہدہ کیا گیا۔

۲۵ — ایک شخص نے ایک سطح مائل پر ج فٹ اوپر جاکر دیکھا کہ اس کے پائین سے جو سطح مستوی گذرتی ہے اُس پر ایک چیز کا زاویہ انخفاض عہ ہے، ج فٹ اور اوپر جاکر اُس نے دیکھا کہ اسی چیز کا زاویہ انخفاض بہ ہے ثابت کرو کہ سطح مائل اُفق سے ایک ایسا زاویہ بناتی ہے جس کا مماس التمام

(۲ ظم بہ − ظم عہ) ہے۔

۲۶ — ایک منتظم مینار مربع قاعدہ پر قائم ہے، اس کا ایک کنارہ ۱۵۰ فٹ اور اس کے قاعدہ کا ایک ضلع ۲۰۰ فٹ ہے اُس کے ایک رخ کا میلان قاعدہ سے دریافت کرو۔

۲۷ — ایک مینار کے مربع قاعدے کا ضلع ا ہے اور اسکا

راس ایک ایسے خط مستقیم پہ واقع ہے نقطوں کے تقسیم
میں سے گزرتا ہے اور اس پہ عمود ہے، مینار کی بلندی ح فٹ
ہے، ثابت کرو کہ مینار کے متصل رخوں کا درمیانی زاویہ مساوات ذیل
سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب عہ} = \frac{۲ح\sqrt{۲ا^{۲}+۴ح^{۲}}}{ا^{۲}+۴ح^{۲}}$$

۲۸ — ایک متساوی الاضلاع مثلث کے مرکز پہ ایک ۱۰۰ فٹ اونچا علم قائم ہے، مثلث متوازی الافق ہے، علم کی چوٹی پہ ہر ایک ضلع کے محاذی زاویہ ۶۰° بنتا ہے، ثابت کرو کہ مثلث کے ضلع کا طول ۵۰ $\sqrt{۶}$ فٹ ہے۔

۲۹ — مربع قاعدہ پہ ایک مینار ہے اور اس کی چوٹی پر ایک ۶ فٹ اونچا علم ہے، اگر علم کا سایہ عین قاعدہ کے ایک ضلع تک پہنچے اور اس ضلع کے سروں سے ۵۶ اور ۸ فٹ کے فاصلہ پر ہو تو سورج کا زاویہ ارتفاع دریافت کرو، مینار کی بلندی ۴۳ فٹ ہے۔

۳۰ — مربع قاعدہ پہ ایک مینار قائم ہے، اس کی چوٹی پہ ایک ۶ فٹ اونچا علم ہے، علم کا سایہ عین قاعدہ کے ضلع تک پہنچتا ہے اور اس ضلع کے سروں سے لا اور ما فٹ کے فاصلہ پہ ہے، ثابت کرو کہ مینار کی بلندی $\sqrt{\frac{لا^{۲}+ما^{۲}}{۲}}$ مس عہ − ۶ ہے
جہاں عہ سورج کا زاویہ ارتفاع ہے۔

۳۱ — ایک نقطہ ایک جھیل کی سطح سے ح فٹ اونچا ہے اور اس

نقطہ سے ایک بادل کا زاویہ ارتفاع عہ مشاہدہ کیا گیا ہے اگر جھیل میں بادل کے عکس کا زاویہ انحفاض دیکھا جائے تو وہ بہ ہوتا ہے ثابت کرو کہ بادل کی بلندی

$$ح \frac{\text{جب}\ (بہ + عہ)}{\text{جب}\ (بہ - عہ)}$$ ہے

۳۲ — ایک برج کا سایہ کسی خاص وقت اس کی بلندی کا نصف تھا کچھ عرصہ بعد سایہ بلندی کے برابر تھا۔ معلوم کرو کہ اس عرصہ میں سورج کا زاویہ ارتفاع کتنا کم ہوا ہے، معلوم ہے

لوک ۲ = ۰ء۳۰۱۰۳ ، ل مس ۶۳° ۲۶َ = ۱۰ء۳۰۰۹۹۹۴

اور فرق اَ کیلئے = ۳۱۵۹

۳۳ — ایک تختی کی شکل مثلث متساوی الساقین ہے اور وہ سورج کے مقابل سطح عمودی میں رکھی گئی ہے، اگر تختی کا قاعدہ ۲ا، اونچائی ح اور سورج کا ارتفاع ۳۰° ہو تو ثابت کرو کہ تختی کے سایہ کے راس پر جو زاویہ بنتا ہے اس کا حاس

$$\frac{۲ اح \sqrt{۳}}{۳ح^۲ - ا^۲}$$ ہے۔

۳۴ — سطح افقی پر نشانہ لگانے کا چاند سیدھا کھڑا کیا گیا ہے، اگر اس کا رخ جنوب کی طرف ہو اور وہ شکل میں مستطیل ہو تو جو اس کی سطح کا رقبہ ہے اس کا مقابلہ اس کے سایہ کے رقبہ سے اس وقت کرو جبکہ سورج کا ارتفاع عہ° ہو اور سورج جنوب سے زاویہ بہ° بنائے۔

۳۵ — ایک کرہ کا قطر ق ہے اور جب اس کے مرکز کا ارتفاع بہ ہو تو اس کے محاذی ایک شخص کی آنکھ پر زاویہ عہ بنتا ہے، ثابت کرو کہ کرہ کے مرکز کی بلندی

$\frac{1}{4}$ ق جب بہ قم $\frac{\pi}{2}$ ہے

۳۶ — ایک شخص سطح افقی پر کھڑا ہوکر ایک مساوی اور مساوی الفصل ستونوں کی قطار کو دیکھکر یہ نتیجہ نکالتا ہے کہ جو زاویے دسویں اور سترہویں ستون کے محاذی اُس کی آنکھ پر بنتے ہیں وہ اُس صورت میں بھی وہی رہینگے اگر انکو پہلے ستون کی جگہ لاکر کھڑا کردیا جائے اور انکی بلندیوں کو بالترتیب بقدر $\frac{1}{4}$ اور $\frac{2}{3}$ کے کم کردیا جائے۔ اگر آنکھ کی بلندی کو نظر انداز کرسکیں تو ثابت کرو کہ ستونوں کی قطار اُس خط سے جو اسکی آنکھ کو پہلے ستون کے ساتھ ملانے سے پیدا ہو ایک ایسا زاویہ بناتی ہے جس کا قاطع ۲،۶ ہے۔

امثلہ ذیل کے حل کرنے میں لوکارتمی جدولوں کی ضرورت ہوگی

۳۷ — ایک دریا کے مقابل کے کناروں پر دو نقاط ا اور ب ایک دوسرے کے سامنے واقع ہیں اور انکے درمیان ایک جہاز کا مستول م ن ہے، دریا کا عرض ۱۰۰۰ فٹ ہے اور نقطہ ا پر م کا زاویہ ارتفاع ۱۴° ۲۰' ہے اور نقطہ ب پر ارتفاع ۸° ۱۰' ہے، خط ا ب پر م کی بلندی دریافت کرو۔

۳۸ — خط ا ب کا طول ۱۰۰۰ گز ہے، ب نقطہ ا کے ٹھیک شمال کیطرف واقع ہے اور ب سے ایک دور کے نقطہ ط کی سمت، شمال سے مشرق کی جانب میں زاویہ ۷۰° کا بناتی ہے اور نقطہ ا پر یہ سمت شمال سے مشرق کی طرف کو زاویہ ۴۱° ۴۲' بناتی ہے، ا اور ط کا درمیانی فاصلہ دریافت کرو۔

۳۹ — ب کے ٹھیک مغرب کی طرف دس میل کے فاصلے پر ایک مقام ا ہے، نقطہ ا سے ایک چٹان کی سمت، شمال سے مشرق کی طرف کو زاویہ ۴۰° ۱۹َ بناتی ہے اور نقطہ ب سے سمت، شمال سے مغرب کی جانب میں زاویہ ۲۶° ۱۵َ بناتی ہے، خط اب سے چٹان کا فاصلہ شمال کی جانب میں دریافت کرو۔

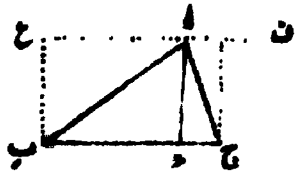
۴۰ — ایک اُفقی مربع احاطہ کے ایک ضلع کا طول ا ہے اور عین اس کے نقطہ وسط کے اوپر سمت راس میں ایک مینار کی چوٹی ہے، مربع کی سطح سے چوٹی کی بلندی ب ہے اگر سورج کا ارتفاع ط ہو اور مینار کا سایہ مربع کے ٹھیک ایک کونے تک پہنچے تو ثابت کرو کہ ب $\sqrt{۲}$ = ا مس ط

اگر ا = ۱۰۰۰ فٹ اور ط = ۲۵° ۱۵َ تو ب کی قیمت دریافت کرو۔

باب پانزدہم

مثلث کے خواص

۲۰۴- مثلث کا رقبہ - فرض کرو کہ کوئی مثلث اب ج ہے اور زاویہ ا سے مقابل کے ضلع ب ج پر عمود اد نکالا گیا ہے۔



نقطہ ا میں سے ب ج کے متوازی خط ع ا ف کھینچو اور اس پر عمود ب ع اور ج ف نکالو۔

بموجب اقلیدس م ۱ ش ۴۱ مثلث اب ج کا رقبہ

= $\frac{1}{2}$ مستطیل ب ف = $\frac{1}{2}$ ب ج × ج ف

= $\frac{1}{2}$ اَ × اد

لیکن اد = اب جب ب = جَ جب ب

اسلئے مثلث اب ج کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ جَ اَ جب ب

اس رقبہ کو بالعموم △ سے تعبیر کرتے ہیں

اس لئے △ = ½ جَ اَ جب ب = ½ اَ بَ جب ج

= ½ بَ جَ جب ا .... (۱)

بموجب دفعہ ۱۷۵، جب ا = ۲/بَ جَ √ن(ن - اَ)(ن - بَ)(ن - جَ)

یعنی △ = ½ بَ جَ جب ا

= √ن(ن - اَ)(ن - بَ)(ن - جَ) .... (۲)

اس مقدار کو اکثر ف سے تعبیر کرتے ہیں۔

امثلہ نمبری ۳۵

مثلث ا ب ج کا رقبہ دریافت کرو جبکہ

۱- اَ = ۱۳، بَ = ۱۴ اور جَ = ۱۵

۲- اَ = ۱۸، بَ = ۲۴ اور جَ = ۳۰

۳- اَ = ۲۵، بَ = ۵۲ اور جَ = ۶۳

۴- اَ = ۱۲۵، بَ = ۱۲۳ اور جَ = ۶۲

۵- اَ = ۱۵، بَ = ۳۶ اور جَ = ۳۹

۶- اَ = ۲۸۷، بَ = ۸۱۶ اور جَ = ۸۶۵

۷- اَ = ۳۵، بَ = ۸۴ اور جَ = ۹۱

۸- اَ = √۳، بَ = √۲ اور جَ = (√۲ + √۶)/۲

۹- اگر ب = ۴۵°، ج = ۹۰° اور اَ = ۲(√۳ + ۱) الخ تو ثابت کرو

کہ مثلث کا رقبہ (۶ ۲۴ ۱۸ ۳/۴) مربع انچ ہے

۱۰- ایک مثلث کے اضلاع ۱۱۹، ۱۱۱، ۹۲ گز ہیں ثابت کرو کہ اس کا رقبہ ایک ایکڑ سے دس مربع گز کم ہے۔

۱۱- ایک مثلثی کھیت کے اضلاع ۲۴۲، ۱۲۱۲ اور ۱۳۵۰ گز ہیں ثابت کرو کہ کھیت کا رقبہ ۶ ایکڑ ہے

۱۲- ایک شخص کو ایک ایسا مثلثی احاطہ بنانے کی اجازت ملی جسکے اضلاع بالترتیب ۵۰، ۴۱، ۲۱ گز ہیں، غلطی سے اس نے پہلے ضلع کو ایک گز بڑا بنا لیا، اگر احاطہ کا رقبہ اور مجموعۂ اضلاع وہی رکھنا منظور ہو جو اوپر تجویز ہوا تو باقی دو اضلاع کے طول دریافت کرو۔

۱۳- ایک متساوی الساقین مثلث کا قاعدہ ۱۴ انچ ہے اور اس کا رقبہ ایک اور مثلث کے رقبہ کے برابر ہے جس کے اضلاع ۱۳٫۶، ۱۵، ۱۵٫۴ انچ ہیں، مثلث اول الذکر کے مساوی ضلعوں میں سے ایک کی قیمت ۰٫۰۰۱ انچ تک صحیح طور پر دریافت کرو،

۱۴- ثابت کرو کہ مثلث کا رقبہ ½ آ۲ جب ب جب ج / جب ا کے برابر ہے

اگر مثلث کا ایک زاویہ ۹۰° ہو، رقبہ ۱۰ ۱۳/۱۶ مربع فٹ اور مجموعۂ اضلاع ۲۰ فٹ تو اضلاع کے طول دریافت کرو

۱۵- ایک مثلث کے اضلاع سلسلۂ حسابیہ میں ہیں اور اسکا رقبہ ایک ایسے مثلث متساوی الاضلاع کے رقبہ کا ۳/۵ ہے جس کا مجموعہ اضلاع مثلث اول الذکر کے مجموعہ اضلاع کے برابر ہے، ثابت کرو کہ مثلث کے اضلاع کی باہمی نسبتیں ۳ : ۵ : ۷ ہے، نیز مثلث کا سب سے

بڑا زاویہ دریافت کرو۔

۱۶۔ ایک مثلث میں سب سے چھوٹا زاویہ ۴۵° ہے اور زاویوں کے مماس سلسلہ حسابیہ میں ہیں، اگر اس کا رقبہ ۳ مربع گز ہو تو ثابت کرو کہ اضلاع کے طول ۳ $\sqrt{5}$، ۶ $\sqrt{2}$ اور ۹ فٹ ہیں اور باقی زاویوں کے مماس بالترتیب ۲ اور ۳ ہیں

۱۷۔ کسی مثلث کے دو اضلاع کے طول بالترتیب ۱ فٹ اور $\sqrt{2}$ ہیں اور چھوٹے زاویئے کے مقابل کا زاویہ ۳۰ درجہ ہے، ثابت کرو کہ دو مثلث شرائط سوال کو پورا کرتے ہیں، ان کے زاویئے دریافت کرو اور ثابت کرو کہ ان کے رقبوں کی باہمی نسبت $\sqrt{3}+1 : \sqrt{3}-1$ ہے

۱۸۔ مفروضات ذیل سے دو مثلث حاصل ہوتے ہیں، جدولوں کی مدد سے بڑے مثلث کا رقبہ دریافت کرو

ا = ۳۱° ۱۵'، ؔ = ۵ انچ اور ب = ۷ انچ

۲۰۵۔ مثلث کے متعلقہ دائرے

جو دائرہ مثلث کے نقاط راس میں سے گزرتا ہے اُس کو مثلث کے گرد بنا ہوا دائرہ یا اختصاراً مثلث کا بیرونی دائرہ کہتے ہیں۔

اس دائرہ کا مرکز اقلیدس م ۴ ش ۵ کے عمل سے حاصل ہو سکتا ہے، اس کے نصف قطر کو ہم ر سے تعبیر کریں گے جو دائرہ مثلث کے اندر اس طرح سے کھینچ سکے کہ وہ مثلث کے ہر ایک ضلع کو مس کرے اُس کو اختصاراً مثلث کا

اندرونی دائرہ کہتے ہیں، اس دائرہ کا مرکز اقلیدس م ۴ ش ۴ کے عمل سے حاصل ہو سکتا ہے۔ اس کے نصف قطر کو ہم آیندہ ر سے تعبیر کرینگے۔

جو دائرہ ضلع ب ج اور باقی دو اضلاع ا ب اور ا ج ممدودہ میں سے ہرایک کو مس کرے اس کو زاویہ ا کے مقابل مثلث کا جانبی دائرہ کہتے ہیں، اس کے نصف قطر کو ہم ر۱ سے تعبیر کریں گے

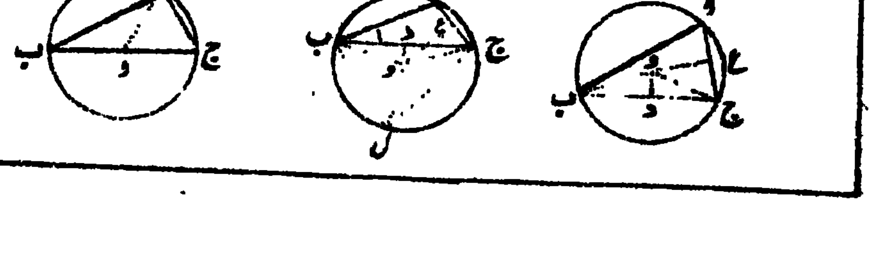
اسی طرح سے حرف ر۲ سے ہم اس دائرہ کے نصف قطر کو تعبیر کریں گے جو ضلع ج ا اور باقی دو اضلاع ب ج اور ب ا ممدودہ کو مس کرے۔

نیز ر۳ سے ہم اس دائرہ کے نصف قطر کو تعبیر کرینگے جو ضلع ا ب اور باقی دو اضلاع ج ا اور ج ب ممدودہ کو مس کرے

۲۰۶ – مثلث ا ب ج کے بیرونی دائرہ کا نصف قطر سا دریافت کرو۔

اضلاع ب ج اور ج ا کی تنصیف نقاط د اور ع پر کرو اور ب ج اور ج ا پر عمود د و اور ع و قائم کرو۔

بموجب اقلیدس م ۴ ش ۵، نقطہ و مثلث کے بیرونی دائرہ کا مرکز ہے، و ب اور و ج کو ملاؤ



نقطہ و مثلث کے اندر واقع ہوسکتا ہے (شکل ۱) یا باہر (شکل ۲)
یا مثلث کے ایک ضلع پر (شکل ۳)

پہلی شکل میں مثلث ب و د اور ج و د آپس میں ہر طرح سے
برابر ہیں۔ اس لئے

∠ ب و د = ∠ ج و د

∴ ∠ ب و د = ½ ∠ ب و ج

= ∠ ب ا ج (اقلیدس م ۳ ش ۲۰)

= ا

نیز ب د = ب و جب ب و د

∴ لَ/۲ = ر جب ا

اگر ا منفرجہ ہو جیسا کہ شکل ۲ میں تو

∠ ب و د = ½ ∠ ب و ج = ∠ ب ل ج

= ۱۸۰° − ا (اقلیدس م ۳ ش ۲۲)

یعنی بموجب سابق، جب ب و د = جب ا اور ر = لَ/(۲ جب ا)

اگر ا زاویہ قائمہ ہو جیسا کہ شکل ۳ میں تو

ر = و ا = و ج = لَ/۲

= لَ/(۲ جب ا) چونکہ اس صورت میں جب ا = ۱

اس سے معلوم ہوا کہ مندرجہ بالا ارتباط سب مثلثوں کے لئے
درست ہے۔

اس لئے تینوں صورتوں میں

$$ر = \frac{ا}{۲ جب ا} = \frac{ب}{۲ جب ب} = \frac{ج}{۲ جب ج} \quad (\text{دفعہ ۱۶۹})$$

...... (۱)

۲۰۷- دفعہ ۱۷۵ میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ

$$جب ا = \frac{۲}{ب ج}\sqrt{ن(ن-ا)(ن-ب)(ن-ج)}$$

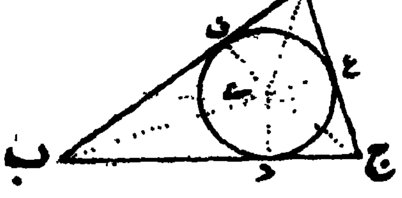
$$= \frac{۲ ف}{ب ج}$$ اس میں ف مثلث کے رقبہ کو تعبیر کرتا ہے

جب ا کی قیمت ربط (۱) دفعہ ۲۰۶ میں مندرج کرنے سے

$$ر = \frac{ا ب ج}{۴ ف}$$

اور اس سے بیرونی دائرہ کا نصف قطر اضلاع کی رقوم میں حاصل ہوتا ہے۔

۲۰۸- مثلث ا ب ج کے دائرہ اندرونی کے نصف قطر ر کی قیمت دریافت کرو۔



زاویہ ب اور ج کی تنصیف بالترتیب دو خطوط ب م اور ج م سے کرو اور فرض کرو کہ یہ خط نقطہ م پر ملتے ہیں،

بموجب اقلیدس م ۳ ش ۴ نقطہ ے اندرونی دائرہ کا مرکز ہے ے ا کو ملاؤ اور تینوں اضلاع پر عمود ے د، ے ع، ے ف نکالو۔

تب ے د = ے ع = ے ف = ر

اب رقبہ △ ے ب ج = ۱/۲ ے د × ب ج = ۱/۲ ر × اَ

رقبہ △ ے ج ا = ۱/۲ ے ع × ج ا = ۱/۲ ر × بَ

اور رقبہ △ ے ا ب = ۱/۲ ے ف × ا ب = ۱/۲ ر × جَ

اس لئے جمع کرنے سے

۱/۲ ر × اَ + ۱/۲ ر × بَ + ۱/۲ ر × جَ = مثلثات ے ب ج، ے ج ا اور ے ا ب کے رقبوں کا مجموعہ

= △ ا ب ج کا رقبہ

یعنی ر (اَ + بَ + جَ) / ۲ = ں

یعنی ر × ن = ں

∴ ر = ں / ن

۲۰۹۔ چونکہ زاویے ے ب د اور ے د ب بالترتیب زاویا ے ب ف اور ے ف ب کے برابر ہیں اس لئے مثلث ے د ب اور ے ف ب ہر طرح سے برابر ہیں۔

اس لئے ب د = ب ف یعنی ۲ ب د = ب د + ب ف

نیز اع = اف یعنی ۲ اع = اع + اف

اور ج ع = ج د یعنی ۲ ج ع = ج ع + ج د

اس لئے جمع کرنے سے

۲ ب د + ۲ ا ع + ۲ ج ع = (ب د + ج د) + (ج ع + ا ع) + (ا ف + ف ب)

یعنی ۲ ب د + ۲ ا ج = ب ج + ج ا + ا ب

∴ ۲ ب د + ۲ بَ = اَ + بَ + جَ = ۲ ن

اس لئے ب د = ن - بَ = ب ف

اسیطرح سے ج ع = ن - جَ = ج د

اور ا ف = ن - اَ = ا ع

اب $\frac{\text{ے د}}{\text{ب د}}$ = مس ے ب د = مس $\frac{\text{ب}}{۲}$

∴ ر = ے د = ب د مس $\frac{\text{ب}}{۲}$ = (ن - اَ) مس $\frac{\text{ب}}{۲}$

پس ر = ے ع = ج ع مس ے ج ع = (ن - جَ) مس $\frac{\text{ج}}{۲}$

اور نیز ر = ے ف = ف ا مس ے ا ف = (ن - اَ) مس $\frac{\text{ا}}{۲}$

اسلئے ر = (ن - اَ) مس $\frac{\text{ا}}{۲}$ = (ن - بَ) مس $\frac{\text{ب}}{۲}$

= (ن - جَ) مس $\frac{\text{ج}}{۲}$

۲۱۰ - ر کی ایک تیسری قیمت اس طرح سے حاصل ہوسکتی ہے۔

اَ = ب د + د ج = ے د مم ے ب د + ے د مم ے ج د

$$= \text{رم}\,\frac{\text{ب}}{\text{۲}} + \text{رم}\,\frac{\text{ج}}{\text{۲}}$$

$$= \text{ر}\left[\frac{\text{جم}\,\frac{\text{ب}}{\text{۲}}}{\text{جب}\,\frac{\text{ب}}{\text{۲}}} + \frac{\text{جم}\,\frac{\text{ج}}{\text{۲}}}{\text{جب}\,\frac{\text{ج}}{\text{۲}}}\right]$$

$$\therefore \text{اَ جب}\,\frac{\text{ب}}{\text{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\text{ج}}{\text{۲}} = \text{ر}\left[\text{جب}\,\frac{\text{ج}}{\text{۲}}\,\text{جم}\,\frac{\text{ب}}{\text{۲}} + \text{جم}\,\frac{\text{ج}}{\text{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\text{ب}}{\text{۲}}\right]$$

$$= \text{ر جب}\left(\frac{\text{ب}}{\text{۲}} + \frac{\text{ج}}{\text{۲}}\right) = \text{ر جب}\left(\text{۹۰}^\circ - \frac{\text{ا}}{\text{۲}}\right)$$

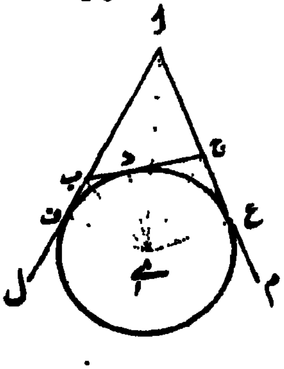
$$= \text{ر جم}\,\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$$

$$\therefore \text{ر} = \frac{\text{اَ جب}\,\frac{\text{ب}}{\text{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\text{ج}}{\text{۲}}}{\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{\text{۲}}}$$

نتیجہ صریح ۔ چونکہ $\text{اَ} = \text{۲ س جب ا} = \text{۴ س جب}\,\frac{\text{ا}}{\text{۲}}\,\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$

اس لئے $\text{ر} = \text{۴ س جب}\,\frac{\text{ا}}{\text{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\text{ب}}{\text{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\text{ج}}{\text{۲}}$

۲۱۱ ۔ مثلث ا ب ج کے زاویہ ا کے مقابل جو جانبی دائرہ بن سکتا ہے اُس کا نصف قطر $\text{ر}_{\text{۱}}$ دریافت کرو



اب اور اج کو ل اور م تک خارج کرو، زاویوں ج ب ل اور ب ج م کی

تنصیف خطوط ب م۱ اور ج م۱ سے کرو، اور فرض کرو کہ یہ خطوط نقطہ م۱ پر ملتے ہیں۔

تینوں اضلاع پر عمود م۱ د، م۱ ع اور م۱ ف نکالو۔

مثلث م۱ د ب اور م۱ ف ب ہر طرح سے برابر ہیں، اسلئے

م۱ ف = م۱ د

اسی طرح سے م۱ ع = م۱ د

چونکہ تینوں عمود م۱ د، م۱ ع، م۱ ف آپس میں برابر ہیں، اس لئے نقطہ م۱ دائرہ مجوزہ کا مرکز ہے

اب رقبہ ا ب م۱ ج مثلثات ا ب ج اور م۱ ب ج کے مجموعہ کے برابر ہے

نیز یہ رقبہ مثلثات م۱ ب ا اور م۱ ج ا کے مجموعہ کے بھی برابر ہے

اس لئے △ ا ب ج + م۱ ب ج = △ م۱ ج ا + △ م۱ ا ب

∴ ف + ½ م۱ د × ب ج = ½ م۱ ع × ج ا + ½ م۱ ف × ا ب

یعنی ف + ½ ر۱ × اَ = ½ ر۱ × بَ + ½ ر۱ × جَ

∴ ف = ر۱ [(بَ + جَ − اَ) / ۲] = ر۱ [(بَ + جَ + اَ) / ۲ − اَ] = ر۱ (ن − اَ)

∴ ر۱ = ف / (ن − اَ)

اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

ر۲ = ف / (ن - بَ) اور ر۳ = ف / (ن - جَ)

۲۱۲ - چونکہ اع۱ اور اف۱ میں سے ہر ایک دائرہ کا مماس ہے
اس لئے بموجب دفعہ ۲۰۹، اع۱ = اف۱

اسی طرح سے ب ف۱ = ب د۱ اور ج ع۱ = ج د۱

∴ ۲ اع۱ = اع۱ + اف۱ = اب + ب ف۱ + اج + ج ع۱

= اب + ب د۱ + اج + ج د۱

= اب + ب ج + ج ا = ۲ ن

∴ اع۱ = ن = اف۱

نیز ب د۱ = ب ف۱ = اف۱ - اب = ن - جَ

اور ج د۱ = ج ع۱ = اع۱ - اج = ن - بَ

∴ م۱ع۱ = اع۱ مس م۱اع۱

یعنی ر۱ = ن مس (ا / ۲)

۲۱۳ - ر۱ کی ایک تیسری قیمت اَ اور زوایا ب اور ج کی رقوم میں اس طرح حاصل ہوسکتی ہے

چونکہ م۱ج زاویہ ب ج ع۱ کی تنصیف کرتا ہے، اس لئے

∠ م۱ج د۱ = ½ (۱۸۰° - ج) = ۹۰° - ج/۲

اس لئے ∠ م۱ب د۱ = ۹۰° - ب/۲

∴ اَ = ب ج = ب د۱ + د۱ج

= م۱د۱ مس م۱ب د۱ + م۱د۱ مس م۱ج د۱

$$= ر_۱ \left(مس\frac{ب}{۲} + مس\frac{ج}{۲} \right)$$

$$= ر_۱ \left(\frac{جب\frac{ب}{۲}}{جم\frac{ب}{۲}} + \frac{جب\frac{ج}{۲}}{جم\frac{ج}{۲}} \right)$$

$$\therefore اَ\, جم\frac{ب}{۲}\, جم\frac{ج}{۲} = ر_۱ \left(جب\frac{ب}{۲}\, جم\frac{ج}{۲} + جم\frac{ب}{۲}\, جب\frac{ج}{۲} \right)$$

$$= ر_۱\, جب\left(\frac{ب}{۲} + \frac{ج}{۲} \right) = ر_۱\, جب\left(۹۰ - \frac{ا}{۲} \right) = ر_۱\, جم\frac{ا}{۲}$$

$$\therefore ر_۱ = \frac{اَ\, جم\frac{ب}{۲}\, جم\frac{ج}{۲}}{جم\frac{ا}{۲}}$$

نتیجہ صریح — چونکہ $اَ = ۲ ر\, جب\, ا = ۴ ر\, جب\frac{ا}{۲}\, جم\frac{ا}{۲}$

اسلئے $ر_۱ = ۴ ر\, جب\frac{ا}{۲}\, جم\frac{ب}{۲}\, جم\frac{ج}{۲}$

امثلہ نمبری ۳۶

۱ — ایک مثلث کے اضلاع بالترتیب ۱۸، ۲۴، ۳۰ انچ ہیں ثابت کرو کہ بیرونی دائرہ، اندرونی دائرہ اور تین جانبی دائروں کے نصف قطر بالترتیب ۱۵، ۶، ۱۲، ۸ اور ۳۶ انچ ہیں

۲ — ایک مثلث کے اضلاع ۱۳، ۱۴، ۱۵ فٹ ہیں، ثابت کرو کہ

(۱) $ر = ۸\frac{۱}{۸}$ فٹ (۲) $ر = ۴$ فٹ (۳) $ر_۱ = ۱۰\frac{۱}{۲}$ فٹ

(۴) $ر_۲ = ۱۲$ فٹ اور (۵) $ر_۳ = ۱۴$ فٹ

۳ — اگر مثلث ا ب ج میں $اَ = ۱۴$، $بَ = ۴$ اور $جم\, ج = -\frac{۱۱}{۱۴}$

تو س، ر، $ر_۱$، $ر_۲$ اور $ر_۳$ کی قیمتیں دریافت کرو۔

۴۔ مثلثوں کے حل کی مشتبہ صورت میں ثابت کرو کہ دونوں مثلثوں کے بیرونی دائرے برابر ہوتے ہیں

ثابت کرو کہ

۵۔ $ر_۱(ن - اَ) = ر_۲(ن - بَ) = ر_۳(ن - جَ) = رن = ف$

۶۔ $\frac{ر ر_۱}{ر_۲ ر_۳} = مس^۲ \frac{ا}{۲}$ ۷۔ $ر ر_۱ ر_۲ ر_۳ = ف^۲$

۸۔ $ر_۱ ر_۲ ر_۳ = ن^۳ مم^۲ \frac{ا}{۲} مم^۲ \frac{ب}{۲} مم^۲ \frac{ج}{۲}$

۹۔ $ر ر_۱ مم \frac{ا}{۲} = ف$

۱۰۔ $ر_۱ ر_۲ + ر_۲ ر_۳ + ر_۳ ر_۱ = ن^۲$

۱۱۔ $\frac{۱}{ر_۱} + \frac{۱}{ر_۲} + \frac{۱}{ر_۳} - \frac{۱}{ر} = ۰$

۱۲۔ $اَ(ر ر_۱ + ر_۲ ر_۳) = بَ(ر ر_۲ + ر_۳ ر_۱) = جَ(ر ر_۳ + ر_۱ ر_۲)$

۱۳۔ $(ر_۱ + ر_۲) مس \frac{ج}{۲} = (ر_۳ - ر) مم \frac{ج}{۲} = جَ$

۱۴۔ $ف = ۲ر^۲$ جب ا جب ب جب ج

۱۵۔ ۴ ر جب ا جب ب جب ج = اَ جم ا + بَ جم ب + جَ جم ج

۱۶۔ $ف = ۴ ر ر جم \frac{ا}{۲} جم \frac{ب}{۲} جم \frac{ج}{۲}$

۱۷- $\frac{1}{\text{ر}^2}+\frac{1}{\text{ر}_1^2}+\frac{1}{\text{ر}_2^2}+\frac{1}{\text{ر}_3^2}=\frac{\text{ا}^2+\text{ب}^2+\text{ج}^2}{\text{ن}^2}$

۱۸- $\text{ر}_1+\text{ر}_2+\text{ر}_3-\text{ر}=4\,\text{س}$

۱۹- $(\text{ر}_1-\text{ر})(\text{ر}_2-\text{ر})(\text{ر}_3-\text{ر})=4\,\text{س}\,\text{ر}^2$

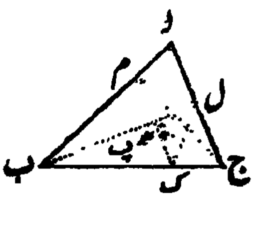
۲۰- $\frac{1}{\text{ب}\,\text{ج}}+\frac{1}{\text{ج}\,\text{ا}}+\frac{1}{\text{ا}\,\text{ب}}=\frac{1}{2\,\text{س}\,\text{ر}}$

۲۱- $\frac{\text{ر}_1}{\text{ب}\,\text{ج}}+\frac{\text{ر}_2}{\text{ج}\,\text{ا}}+\frac{\text{ر}_3}{\text{ا}\,\text{ب}}=\frac{1}{\text{ر}}-\frac{1}{2\,\text{س}}$

۲۲- $\text{ر}^2+\text{ر}_1^2+\text{ر}_2^2+\text{ر}_3^2=16\,\text{س}^2-\text{ا}^2-\text{ب}^2-\text{ج}^2$

۲۱۴- مثلث پائیں اور مرکز عمودی

فرض کرو کہ ا ب ج کوئی مثلث ہے اور زاویوں ا، ب، ج سے مقابل کے اضلاع پر عمود بالترتیب اک، ب ل اور ج م نکالے گئے ہیں۔



علم ہندسہ کی اکثر کتابوں میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ یہ تینوں عمود ایک نقطہ مشترک پ پر ملتے ہیں، اس نقطہ کو مثلث کا مرکز عمودی کہتے ہیں۔ مثلث ک ل م جو ان عمودوں کے پایوں کو ملانے سے بنتا ہے ا ب ج کا مثلث پائیں کہلاتا ہے۔

۲۱۵- مرکز عمودی سے مثلث کے رؤس الزوایا کے

فاصلے دریافت کرو۔

پ ک = ک ب مس پ ب ک = ک ب مس (۹۰° - ج)

= اب جم ب مم ج = ج / جب ج جم ب جم ج

= ۲ ر جم ب جم ج .... (دفعہ ۲۰۶)

نیز ا پ = ال × قطک اج

= ج جم ا × قم ج

= ج / جب ج × جم ا

= ۲ ر جم ا .... (دفعہ ۲۰۶)

پس ب پ = ۲ ر جم ب اور ج پ = ۲ ر جم ج

لہذا مرکز عمودی کے فاصلے زاویوں کے رائسوں سے ۲ رجم ا، ۲ ر جم ب، ۲ ر جم ج ہیں۔ اور اضلاع سے اس کے فاصلے ۲ ر جم ب جم ج، ۲ ر جم ج جم ا اور ۲ ر جم ا جم ب ہیں۔

۲۱۶ - مثلث پائیں کے اضلاع اور زاوئے دریافت کرو

چونکہ زاوے پ ک ج اور پ ل ج دونوں قائمے ہیں، اس لئے نقاط پ، ل، ج اور ک سب ایک دائرہ کے محیط پر واقع ہیں۔

∴ ∠ پ ک ل = ∠ پ ج ل (اقلیدس م ۳ ش ۲۱)

= ۹۰° - ا

اسی طرح سے پ، ب، ک اور م ایک دائرہ کے محیط واقع

ہیں، اس لئے

∠ پ ک م = ∠ پ ب م

= ۹۰° - ا

اس لئے ∠ م ک ل = ۱۸۰° - ۲ ا

= تکملہ زاویہ ۲ ا

پس ∠ ک ل م = ۱۸۰° - ۲ ب

اور ∠ ل م ک = ۱۸۰° - ۲ ج

نیز مثلث ا ل م سے

ل م / جب ا = ا ل / جب ا م ل = ا ب جم ا / جم پ م ل

= جَ جم ا / جم پ ا ل = جَ جم ا / جب ج

∴ ل م = (جَ / جب ج) جب ا جم ا

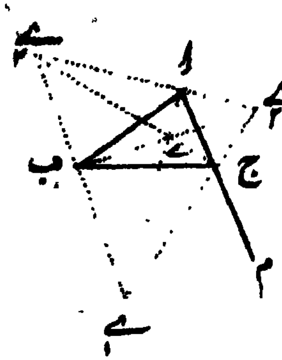
= اَ جم ا　　(دفعہ ۱۶۹)

پس م ک = بَ جم ب اور ک ل = جَ جم ج

اس لئے معلوم ہوا کہ مثلث پائین کے اضلاع اَ جم ا، بَ جم ب، جَ جم ج ہیں۔ اور اس کے زاویے ۲ ا، ۲ ب اور ۲ ج کے تکملے ہیں۔

۲۱۷ — فرض کرو کہ م اندرونی دائرہ کا مرکز ہے اور م۱، م۲، م۳ ان جانبی دائروں کے مرکز ہیں جو بالترتیب

ا، ب، ج کے محاذی ہیں۔



جیسا دفعات ۲۰۸ اور ۲۱۱ میں ہم نے دیکھا ے ج زاویہ اج ب کی تنصیف کرتا ہے اور ے۱ ج زاویہ ب ج م کی تنصیف کرتا ہے۔

∴ ∠ ے ج ے۱ = ∠ ے ج ب + ∠ ے۱ ج ب

= ½ ∠ اج ب + ½ ∠ م ج ب

= ½ [∠ اج ب + ∠ م ج ب]

= ½ × ۱۸۰° = ایک زاویہ قائمہ

اسی طرح سے ∠ ے ج ے۲ بھی قائمہ ہے

لہذا ے۱ ج ے۲ ایک خط مستقیم ہے اور ے ج اس پر عمود ہے اسی طرح سے ے۲ ا ے۳ ایک خط مستقیم ہے اور اس پر ے ا عمود ہے اور ے۳ ب ے۱ خط مستقیم ہے اور ے ب اس پر عمود ہے۔

نیز چونکہ ے ا اور ے۱ ا دونوں زاویہ ب اج کی تنصیف کرتے ہیں اس لئے معلوم ہوا کہ تینوں نقطے ا، ے، ے۱ ایک خط مستقیم پر واقع ہیں، اسی طرح سے ب ے ے۲ اور ج ے ے۳ بھی مستقیم خط ہیں۔

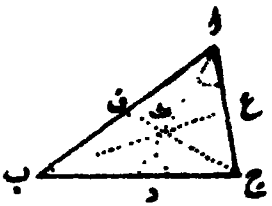
لہذا ثابت ہوا کہ ے۱ ے۲ ے۳ ایک مثلث ہے جس میں

ا، ب، ج اُن عمودوں کے پائین ہیں جو نقاط راس سے مقابل کے اضلاع پر نکالے جائیں اور ے اُن عمودوں کا نقطہ تقاطع ہے، یا دوسرے الفاظ میں ہم اس کو یوں بیان کرسکتے ہیں کہ مثلث ے، ے، ے کا مثلث پائین ا ب ج ہے اور اس کا مرکز عمودی نقطہ ے ہے

مثلث ے، ے، ے کو اکثر جانبی مرکزوں کا مثلث کہتے ہیں

۲۱۸ - مثلث کا مرکز ہندسی اور وسطانیات

اگر ا ب ج کوئی مثلث ہو اور د، ع، ف اضلاع ب ج، ج ا، ا ب کے نقاط تنصیف ہوں تو خطوط ا د، ب ع، ج ف میں سے ہرایک کو مثلث کا وسطانیہ کہتے ہیں



علم ہندسہ کی اکثر کتابوں میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ مثلث کے وسطانیات ایک مشترک نقطہ ث پر ملتے ہیں اور

$$\text{ا ث} = \frac{2}{3}\,\text{ا د}،\quad \text{ب ث} = \frac{2}{3}\,\text{ب ع}$$

اور

$$\text{ج ث} = \frac{2}{3}\,\text{ج ف}$$

نقطہ ث کو مثلث کا مرکز ہندسی کہتے ہیں

۲۱۹ - وسطانیات کے طول

بموجب دفعہ ۱۷۰

$\text{ا د}^2 = \text{ا ج}^2 + \text{ج د}^2 - ۲\ \text{ا ج} \times \text{ج د جم ج}$

$= \text{ب}^2 + \frac{\text{ا}^2}{۴} - \text{ا ب جم ج}$

اور $\text{ج}^2 = \text{ب}^2 + \text{ا}^2 - ۲\ \text{ا ب جم ج}$

اس لئے $۲\ \text{ا د}^2 - \text{ج}^2 = \text{ب}^2 - \frac{\text{ا}^2}{۲}$

پس $\text{ا د} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲\ \text{ب}^2 + ۲\ \text{ج}^2 - \text{ا}^2}$

نیز $\text{ا د} = \frac{۱}{۲}\sqrt{\text{ب}^2 + \text{ج}^2 + ۲\ \text{ب ج جم ا}}$ ......(دفعہ ۱۷۰)

نیز $\text{ب ع} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲\ \text{ج}^2 + ۲\ \text{ا}^2 - \text{ب}^2}$

اور $\text{ج ف} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲\ \text{ا}^2 + ۲\ \text{ب}^2 - \text{ج}^2}$

۲۲۰ — جو زاوئے کوئی وسطانیہ اضلاع کے ساتھ بناتا ہے اُن کو دریافت کرو

اگر $\angle$ ب ا د = ہ اور $\angle$ ج ا د = جہ

تو $\frac{\text{جب جہ}}{\text{جب ج}} = \frac{\text{د ج}}{\text{ا د}} = \frac{\text{ا}}{۲\ \text{ا د}}$

$\therefore$ $\text{جب جہ} = \frac{\text{ا جب ج}}{۲\ \text{ا د}} = \frac{\text{ا جب ج}}{\sqrt{۲\ \text{ب}^2 + ۲\ \text{ج}^2 - \text{ا}^2}}$

اسی طرح سے $\text{جب ہ} = \frac{\text{ا جب ب}}{\sqrt{۲\ \text{ب}^2 + ۲\ \text{ج}^2 - \text{ا}^2}}$

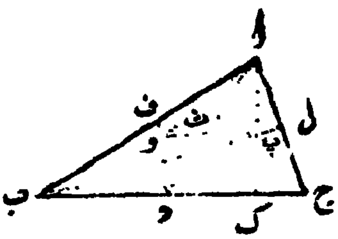
نیز اگر $\angle$ ا د ج = ط تو

$$\frac{\text{جب ط}}{\text{جب ج}} = \frac{\text{اج}}{\text{اد}} = \frac{\text{ب}}{\text{لا}}$$

$$\therefore \text{جب ط} = \frac{\text{ب جب ج}}{\text{لا}} = \frac{\text{۲ ب جب ج}}{\sqrt{\text{۲ ب}^{۲} + \text{۲ ج}^{۲} - \text{ا}^{۲}}}$$

پس جو زاوئے اد اضلاع سے بناتا ہے وہ معلوم ہوئے

۲۲۱۔ ثابت کرو کہ مثلث کا مرکز ہندسی ہمیشہ اُس خط پر واقع ہوتا ہے جو بیرونی مرکز اور مرکز عمودی کو ملانے سے پیدا ہو



فرض کرو کہ نقطہ و بیرونی دائرہ کا مرکز ہے اور پ مرکز عمودی ہے، ضلع ب ج پر عمود و د اور پ ک نکالو اور فرض کرو کہ اد اور وپ نقطہ ث پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

مثلث وث د اور پ ث ا کے زاوے باہم برابر ہیں

نیز بموجب دفعہ ۲۰۶

و د = ں جم ا

اور بموجب دفعہ ۲۱۵

ا پ = ۲ ں جم ا

اس لئے بحکم اقلیدس م ۶ ش ۴

$$\frac{\text{ا ث}}{\text{ث د}} = \frac{\text{ا پ}}{\text{و د}} = ۲$$

لہٰذا نقطہ ث مثلث کا مرکز ہندسی ہے،
نیز مسئلہ مذکورہ بالا کی مدد سے

$$\frac{\text{وث}}{\text{ثپ}} = \frac{\text{ود}}{\text{اپ}} = \frac{1}{2}$$

اس لئے معلوم ہوا کہ مثلث کا مرکز ہندسی اُس خط پر واقع ہے جو بیرونی دائرہ کے مرکز کو مرکز عمودی کے ساتھ ملاتا ہے اور اس خط کو ۱ : ۲ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

نیز عمل ہندسی سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ مثلث کے نونقطی دائرہ کا مرکز (یعنی ایسے دائرہ کا مرکز جو عمودوں کے پایوں اور ضلعوں کے نقاط تنصیف اور اُن خطوط کے وسطی نقاط میں سے ہو کر گزرے جو مثلث کے نقاط راس کو مرکز عمودی سے ملاتے ہیں) ہمیشہ خط وپ پر واقع ہوگا اور اس کی تنصیف کریگا۔

اس سے یہ نتیجہ نکلا کہ بیرونی دائرہ کا مرکز، مرکز ہندسی، نونقطی دائرہ کا مرکز اور مرکز عمودی چاروں نقطے ایک خط مستقیم پر واقع ہیں۔

۲۲۲۔ بیرونی دائرہ کے مرکز اور مرکز عمودی کا درمیانی فاصلہ دریافت کرو۔

اگر اب پر عمود وف نکالا جائے تو

$\angle$ واف = ۹۰ − $\angle$ اوف = ۹۰ − ج

نیز $\angle$ ب ال = ۹۰ − ج

∴ ∠ واپ = ا − ∠ واف − ∠ ب ال

= ا − ۲ (۹۰ − ج) = ا + ۲ ج − ۱۸۰°

= ا + ۲ ج − (ا + ب + ج) = ج − ب

نیز وا = س اور بموجب دفعہ ۲۱۵، پ ا = ۲ س جم ا

∴ وپ² = وا² + پ ا² − ۲ وا × پ ا جم واپ

= س² + ۴ س² جم² ا − ۴ س² جم ا جم (ج − ب)

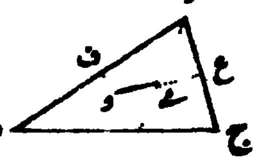
= س² + ۴ س² جم ا [جم ا − جم (ج − ب)]

= س² − ۴ س² جم ا [جم (ب + ج) + جم (ج − ب)] دفعہ

= س² − ۸ س² جم ا جم ب جم ج

∴ وپ = س √(۱ − ۸ جم ا جم ب جم ج)

۲۲۳۔ مثلث کے بیرونی اور اندرونی دائروں کے مرکزوں کا باہمی فاصلہ دریافت کرو۔



فرض کرو کہ و بیرونی دائرہ کا مرکز ہے اور وف ضلع اب پر عمود ہے نیز فرض کرو کہ ے اندرونی دائرہ کا مرکز ہے اور ضلع اج پر ےع عمود ہے

تب بموجب دفعہ سابق

∠ واف = ۹۰ − ج

∴ ∠ واے = ∠ ےاف − ∠ واف

$$= \frac{\text{ا}}{\text{۲}} - (\text{۹۰} - \text{ج}) = \frac{\text{ا}}{\text{۲}} + \text{ج} - \frac{\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}}{\text{۲}}$$

$$= \frac{\text{ج} - \text{ب}}{\text{۲}}$$

نیز $\text{ا ے} = \dfrac{\text{ع ے}}{\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{\text{۲}}} = \dfrac{\text{ر}}{\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{\text{۲}}} = \text{۴ ر جب}\,\frac{\text{ب}}{\text{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\text{ج}}{\text{۲}}$

.... (دفعہ ۲۱۰ نتیجہ صریح)

$\therefore$ $\text{و ے}^{\text{۲}} = \text{و ا}^{\text{۲}} + \text{ا ے}^{\text{۲}} - \text{۲ و ا} \times \text{ا ے جم و ا ے}$

$$= \text{ر}^{\text{۲}} + \text{۱۶ ر}^{\text{۲}}\,\text{جب}^{\text{۲}}\,\frac{\text{ب}}{\text{۲}}\,\text{جب}^{\text{۲}}\,\frac{\text{ج}}{\text{۲}}$$

$$- \text{۸ ر}^{\text{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\text{ب}}{\text{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\text{ج}}{\text{۲}}\,\text{جم}\,\frac{\text{ج} - \text{ب}}{\text{۲}}$$

$\therefore$ $\dfrac{\text{و ے}^{\text{۲}}}{\text{ر}^{\text{۲}}} = \text{۱} + \text{۱۶ جب}^{\text{۲}}\,\frac{\text{ب}}{\text{۲}}\,\text{جب}^{\text{۲}}\,\frac{\text{ج}}{\text{۲}}$

$$- \text{۸ جب}\,\frac{\text{ب}}{\text{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\text{ج}}{\text{۲}}\left[\text{جم}\,\frac{\text{ب}}{\text{۲}}\,\text{جم}\,\frac{\text{ج}}{\text{۲}} + \text{جب}\,\frac{\text{ب}}{\text{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\text{ج}}{\text{۲}}\right]$$

$$= \text{۱} - \text{۸ جب}\,\frac{\text{ب}}{\text{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\text{ج}}{\text{۲}}\left(\text{جم}\,\frac{\text{ب}}{\text{۲}}\,\text{جم}\,\frac{\text{ج}}{\text{۲}} - \text{جب}\,\frac{\text{ب}}{\text{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\text{ج}}{\text{۲}}\right)$$

$$= \text{۱} - \text{۸ جب}\,\frac{\text{ب}}{\text{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\text{ج}}{\text{۲}}\,\text{جم}\,\frac{\text{ب} + \text{ج}}{\text{۲}}$$

$$= \text{۱} - \text{۸ جب}\,\frac{\text{ب}}{\text{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\text{ج}}{\text{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$$ (دفعہ ۷۵) ..... (۱)

$\therefore$ $\text{و ے} = \text{ر}\sqrt{\text{۱} - \text{۸ جب}\,\frac{\text{ب}}{\text{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\text{ج}}{\text{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{\text{۲}}}$

نیز ربط (۱) کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں

و سے^{2} = ر^{2} − ۲ ر × ۴ ر جب ا/۲ جب ب/۲ جب ج/۲

= ر^{2} − ۲ ر د (دفعہ ۲۱۰ نتیجہ صریح)

اسی طرح سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر زاویہ ا کے مقابل کے جانبی دائرہ کا مرکز سے$_{1}$ ہو تو

و سے$_{1}$ = ر √(۱ + ۸ جب ا/۲ جم ب/۲ جم ج/۲)

اور اس لئے و سے$_{1}^{2}$ = ر^{2} + ۲ ر ر$_{1}$ (دفعہ ۲۱۳، نتیجہ صریح)

یا بطرز دیگر۔ فرض کرو کہ اگر و سے کو دونوں طرف خارج کیا جائے تو وہ مثلث کے بیرونی دائرہ کو نقاط س اور ط پر قطع کرتا ہے اور خط ا سے سے$_{1}$ دائرہ کو نقطہ ھ پر ملتا ہے۔

بحکم اقلیدس م ۳ ش ۳۵

س سے × سے ط = ا سے × سے ھ .... (۲)

لیکن س سے × سے ط = (ر + و سے)(ر − و سے)

= ر^{2} − و سے^{2}

نیز ∠ ھ سے ج = ∠ سے ج ا + ∠ سے ا ج

= ∠ سے ج ب + ∠ ھ ا ب

= ∠ سے ج ب + ∠ ھ ج ب

= ∠ ھ ج سے

ھ سے = ھ ج = ۲ ر جب ا/۲ (دفعہ ۲۰۶)

نیز
$$\text{ا ے} = \frac{\text{ے ع}}{\text{جیب}\,\frac{\text{ا}}{۲}} = \frac{\text{ر}}{\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}}$$

(۲) میں یہ قیمتیں مندرج کرنے سے

$$\text{سر}^{۲} - \text{وے}^{۲} = ۳\ \text{سر ر}$$

یعنی
$$\text{وے}^{۲} = \text{سر}^{۲} - ۲\ \text{سر ر}$$

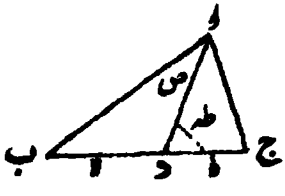
اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ $\text{ے}_{۱}\text{ھ} = \text{ے}_{۱}\text{ج}$

اس لئے $\text{ے}_{۱}\text{و}^{۲} - \text{سر}^{۲} = \text{ے}_{۱}\text{ھ} \times \text{ے}_{۱}\text{ا} = ۲\ \text{سر ر}_{۱}$

یعنی
$$\text{ے}_{۱}\text{و}^{۲} = \text{سر}^{۲} + ۲\ \text{سر ر}_{۱}$$

۲۲۴- زاویوں کے منصّف

اگر ا د زاویہ ا کی تنصیف کرے اور قاعدہ کو دو ایسے حصوں میں تقسیم کرے جنکے طول لا اور ما ہوں تو



بموجب اقلیدس م ۶ ش ۳

$$\frac{\text{لا}}{\text{ما}} = \frac{\text{اب}}{\text{اج}} = \frac{\text{ج}}{\text{ب}}$$

$$\therefore\ \frac{\text{لا}}{\text{ج}} = \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = \frac{\text{لا} + \text{ما}}{\text{ب} + \text{ج}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب} + \text{ج}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (۱)$$

جس سے لا اور ما کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔
نیز اگر ا د ضلع ب ج سے زاویہ طہ بنائے اور اس کا

طول ص ہو تو

△ ا ب ج = △ ا ج د + △ ا ب د

∴ ½ جَ ص جب (ا/۲) + ½ بَ ص جب (ا/۲)
= ½ بَ جَ جب ا

یعنی ص = (بَ جَ)/(بَ + جَ) × (جب ا)/(جب ا/۲)

= (۲ بَ جَ)/(بَ + جَ) جم (ا/۲) .... (۲)

نیز ط = ∠ د ا ب + ب = ا/۲ + ب .... (۳)

اس طرح سے ہمیں منصف کا طول اور ب ج سے اس کا میلان حاصل ہوتا ہے۔

امثلہ نمبری ۳۷

اگر ایک مثلث ا ب ج کے اندرونی دائرہ کا مرکز م ہو اور تین جانبی دائروں کے مرکز م۱، م۲، م۳ ہوں تو ثابت کرو کہ

۱۔ ا م = ر قم (ا/۲)

۲۔ م ا × م ب × م ج = اَ بَ جَ مس (ا/۲) مس (ب/۲) مس (ج/۲)

۳۔ ا م۱ = ر۱ قم (ا/۲)　　۴۔ م م۱ = اَ قط (ا/۲)

۵۔ م۲ م۳ = اَ قم (ا/۲)

۶۔ م م۱ × م م۲ × م م۳ = ۱۶ ر² ر

۷۔ م۱ م۲² = ۴ ر (ر۱ + ر۲)

۸- $\angle$ ے $م_۱$ $م_۲$ = $\frac{ب + ج}{۲}$

۹- ے $م_۱^۲$ + $م_۲$ $م_۳^۲$ = ے $م_۲^۲$ + $م_۳$ $م_۱^۲$ = ے $م_۳^۲$ + $م_۱$ $م_۲^۲$

۱۰- مثلث $م_۱$ $م_۲$ $م_۳$ کا رقبہ = ۸ $ر^۲$ جم $\frac{ا}{۲}$ جم $\frac{ب}{۲}$ جم $\frac{ج}{۲}$ = $\frac{اَ بَ جَ}{۲ ر}$

۱۱- $\frac{ے م_۱ \times م_۲ م_۳}{جب ا}$ = $\frac{ے م_۲ \times م_۳ م_۱}{جب ب}$ = $\frac{ے م_۳ \times م_۱ م_۲}{جب ج}$

اگر مثلث ا ب ج کے اندرونی دائرہ کا مرکز ے ہو اور بیرونی دائرہ کا مرکز و، نیز عمودی مرکز پ ہو اور ہندسی مرکز ث تو ثابت کرو کہ

۱۲- ے $و^۲$ = $ر^۲$ (۳ - ۲ جم ا - ۲ جم ب - ۲ جم ج)

۱۳- ے $پ^۲$ = ۲ $ر^۲$ - ۴ $ر^۲$ جم ا جم ب جم ج

۱۴- و $ث^۲$ = $ر^۲$ - $\frac{۱}{۹}$ ($اَ^۲$ + $بَ^۲$ + $جَ^۲$)

۱۵- $\triangle$ ے و پ کا رقبہ = ۲ $ر^۲$ جب $\frac{ب - ج}{۲}$ جب $\frac{ج - ا}{۲}$ جب $\frac{ا - ب}{۲}$

۱۶- $\triangle$ ے پ ث کا رقبہ = $\frac{۴}{۳}$ $ر^۲$ جب $\frac{ب - ج}{۲}$ جب $\frac{ج - ا}{۲}$ جب $\frac{ا - ب}{۲}$

۱۷- ثابت کرو کہ نو نقطی دائرہ کے مرکز کا فاصلہ زاویہ ا سے

$\frac{ر}{۲}$ $\sqrt{۱ + ۸ \text{ جم ا جب ب جب ج}}$ ہے

۱۸- مثلث ا ب ج کا مثلث پائیں د ع ف ہے ثابت کرو کہ

(۱) اس کا رقبہ ۲ ف جم ا جم ب جم ج ہے

(۲) اس کے بیرونی دائرہ کا نصف قطر $\frac{ر}{۲}$ ہے

اور (۳) اس کے اندرونی دائرہ کا نصف قطر ۲ ر جم ا جم ب جم ج ہے

۱۹- اگر مثلث ا ب ج کے جانبی دائروں کے مرکزوں کو ملانے

سے مثلث د۱ د۲ د۳ بنے تو ثابت کرو کہ

(۱) اس کے اضلاع ۴ ر جم $\frac{ا}{۲}$، ۴ ر جم $\frac{ب}{۲}$، ۴ ر جم $\frac{ج}{۲}$ ہیں

(۲) اس کے زاویے $\frac{\pi}{۲}-\frac{ا}{۲}$، $\frac{\pi}{۲}-\frac{ب}{۲}$ اور $\frac{\pi}{۲}-\frac{ج}{۲}$ ہیں

اور (۳) اس کا رقبہ ۲ ر ن ہے

۲۰- جن نقطوں پر مثلث ا ب ج کا دائرہ اندرونی اضلاع کو مس کرتا ہے اُن کو ملانے سے ایک اور مثلث د ع ف بنتا ہے ثابت کرو کہ

(۱) اس مثلث کے اضلاع ۲ ر جم $\frac{ا}{۲}$، ۲ ر جم $\frac{ب}{۲}$، ۲ ر جم $\frac{ج}{۲}$ ہیں

(۲) اس کے زاویے $\frac{\pi}{۲}-\frac{ا}{۲}$، $\frac{\pi}{۲}-\frac{ب}{۲}$ اور $\frac{\pi}{۲}-\frac{ج}{۲}$ ہیں

اور (۳) اس کا رقبہ $\frac{۲ف^۳}{ا ب ج ن}$ یعنی $\frac{۱}{۲}\frac{ر}{ر}$ ف ہے

۲۱- مثلث ا ب ج کے اضلاع کے نقاطِ تنصیف د، ع، ف ہیں، ثابت کرو کہ مثلث د ع ف اور مثلث ا ب ج کے ہندسی مرکز ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں، نیز ثابت کرو کہ مثلث د ع ف کا مرکز عمودی ا ب ج کے بیرونی دائرہ کا مرکز ہے

کسی مثلث ا ب ج میں ثابت کرو کہ -

۲۲- اگر زاویہ ا سے مقابل کے ضلع ب ج پر عمود نکالا جائے تو وہ اس ضلع کو دو ایسے حصوں میں تقسیم کرتا ہے جو اپنے متصل زاویوں کے مماسات التمام کے متناسب ہوتے ہیں اور زاویہ ا کو دو ایسے حصوں میں تقسیم کرتا ہے جن کی جیوب التمام اضلاع متصلہ کے بالعکس متناسب ہوتی ہیں -

۲۳- زاویہ ا میں سے گزرنے والا وسطانیہ اس کو دو ایسے زاویوں میں تقسیم کرتا ہے جن کے مماس التمام ۲ مم ا + مم ج اور ۲ مم ا + مم ب ہیں اور مثلث کے قاعدہ سے ایک ایسا زاویہ بناتا ہے جس کا مماس التمام $\frac{۱}{۲}$ (مم ج - مم ب) ہے

۲۴۔ اگر زاویہ ا سے مقابل کے ضلع ب ج پر عمود نکالا جائے تو پائین عمود اور ب ج کے نقطہ تنصیف کا باہمی فاصلہ $\frac{\text{ب}^2 - \text{ج}^2}{2\,\text{ا}}$ ہے۔

۲۵۔ د مثلث ا ب ج کا مرکز عمودی ہے، ثابت کرو کہ مثلثات ب د ج، ج د ا، ا د ب اور ا ب ج کے بیرونی دائرے سب برابر ہیں۔

۲۶۔ مثلث ا ب ج کے رؤس الزوایا سے مقابل کے اضلاع پر عمود ا د، ب ع اور ج ف کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ مثلثات ا ع ف، ب د ف، ج د ع کے بیرونی دائروں کے قطر بالترتیب اَ مم ا، بَ مم ب اور جَ مم ج ہیں اور مثلث د ع ف اور ا ب ج کے اضلاع کے مجموعوں کی باہمی نسبت ر : م ہے

۲۷۔ ثابت کرو کہ کسی مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز سے رؤس الزوایا کے فاصلوں کا حاصل ضرب ۴ م ر۲ ہوتا ہے۔

۲۸۔ مثلث ا ب ج کے تین جانبی دائروں کے گرد ایک، مثلث د ع ف بنایا گیا ہے، ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ع ف}}{\text{اَ جم ا}} = \frac{\text{ف د}}{\text{بَ جم ب}} = \frac{\text{د ع}}{\text{جَ جم ج}}$$

۲۹۔ اگر ایک ایسا دائرہ کھینچا جائے جو ایک مثلث کے اندرونی اور بیرونی دائروں کو مس کرے، نیز ضلع ب ج کو خارجاً مس کرے تو ثابت کرو کہ اس کا نصف قطر = $\frac{\Delta}{\text{ا}}$ مس۲ $\frac{\text{ا}}{2}$

۳۰۔ اگر تین ایسے دائروں کے نصف قطر جو ایک دوسرے کو خارجاً مس کریں اَ، بَ، جَ ہوں اور اگر ان تینوں کو مس کرتے ہوئے دو اور دائرے کھینچے جائیں جن کے نصف قطر ر۱ اور ر۲ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\text{ر}_2} - \frac{1}{\text{ر}_1} = \frac{2}{\text{اَ}} + \frac{2}{\text{بَ}} + \frac{2}{\text{جَ}}$$

۳۱۔ ایک مثلث معلوم کا رقبہ Δ سے تعبیر ہوتا ہے اس کے اندرونی دائرہ کے نقاط تماس کو ملانے سے ایک اور مثلث بنتا ہے جس کا رقبہ Δ' ہے، اگر اسی طرح جانبی دائروں کے متعلقہ مثلثوں کے رقبے بالترتیب Δ_1'، Δ_2'، Δ_3' ہوں تو ثابت کرو کہ $\Delta_1' + \Delta_2' + \Delta_3' - \Delta' = 2\Delta$

۳۲۔ اگر مثلث ا ب ج کے زاویوں کے منصف مقابل کے اضلاع کو نقاط ا'، ب'، ج' پر ملیں تو ثابت کرو کہ مثلثات ا' ب' ج' اور ا ب ج کے رقبوں کی باہمی نسبت

$$2\,\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{2}\,\text{جب}\,\frac{\text{ب}}{2}\,\text{جب}\,\frac{\text{ج}}{2} : \text{جم}\,\frac{\text{ا}-\text{ب}}{2}\,\text{جم}\,\frac{\text{ب}-\text{ج}}{2}\,\text{جم}\,\frac{\text{ج}-\text{ا}}{2}$$ ہے

۳۳۔ ایک مثلث کے زاویوں کے راسوں میں سے ایسے مستقیم خط کھینچے گئے ہیں جو مقابل کے اضلاع کے ساتھ ایک ہی زاویہ عہ بناتے ہیں، ثابت کرو کہ ان کے تقاطع سے جو مثلث بنتا ہے اس کے رقبہ کو اصلی مثلث کے رقبہ کے ساتھ نسبت $4\,\text{جم}^2\,\text{عہ} : 1$ ہے

۳۴۔ دو دائروں کا زاویہ تقاطع طہ ہے اور ان کے نصف قطر ا اور ب ہیں، ثابت کرو کہ ان کے مشترک وتر کا طول

$$\frac{2\,\text{ا}\,\text{ب}\,\text{جب}\,\text{طہ}}{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + 2\,\text{ا}\,\text{ب}\,\text{جم}\,\text{طہ}}}$$ ہے

۳۵۔ تین مساوی دائرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں، اس دائرہ کا نصف قطر دریافت کرو جو ان تینوں کو مس کرے۔

۳۶۔ تین دائروں کے نصف قطر ا، ب، ج ہیں اور وہ ایک دوسرے کو خارجاً مس کرتے ہیں، اگر ان کے نقاط تماس پر مماس کھینچے جائیں تو وہ ایک نقطہ پر قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ اس نقطہ تقاطع کا فاصلہ کسی

نقطۂ تماس سے $\left(\frac{ا ب ج}{ا + ب + ج}\right)^{\frac{1}{2}}$ ہے

۳۷۔ اضلاع ب ج ، ج ا، ا ب میں تین نقطے $ا_1$، $ب_1$، $ج_1$ ایسے مقرر کئے گئے ہیں کہ

ب $ا_1$: $ا_1$ ج = ج $ب_1$: $ب_1$ ا = ا $ج_1$: $ج_1$ ب = م : ن ، ثابت کرو کہ خطوط ا $ا_1$، ب $ب_1$، ج $ج_1$ کے باہمی تقاطع سے ایک ایسا مثلث پیدا ہوگا جس کے رقبہ کی نسبت مثلث ا ب ج کے ساتھ $(م - ن)^2 : م^2 + م ن + ن^2$ ہوگی۔

۳۸۔ مثلث ا ب ج کا اندرونی دائرہ اضلاع ب ج، ج ا، ا ب کو نقاط $ا_1$، $ب_1$، $ج_1$ پر بالترتیب مس کرتا ہے، اسی طرح سے مثلث $ا_1 ب_1 ج_1$ کا دائرہ اندرونی اضلاع کو نقاط $ا_2$، $ب_2$، $ج_2$ پر مس کرتا ہے اور علیٰ ہذا القیاس، اگر ن واں مثلث $ا_ن ب_ن ج_ن$ اس طرح سے پیدا ہو تو ثابت کرو کہ اس کے زاویے

$$\frac{\pi}{3} + (-2)^{-ن}\left(ا - \frac{\pi}{3}\right)،\quad \frac{\pi}{3} + (-2)^{-ن}\left(ب - \frac{\pi}{3}\right)$$

اور $\frac{\pi}{3} + (-2)^{-ن}\left(ج - \frac{\pi}{3}\right)$ ہیں

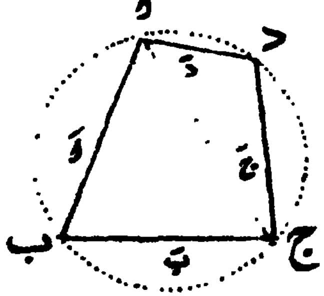
اس لئے ثابت کرو کہ آخر الامر اس طرح سے جو مثلث بنے گا وہ متساوی الاضلاع ہوگا۔

۳۹۔ مثلث ا ب ج کا مثلث پائین $ا_1 ب_1 ج_1$ ہے اور $ا_1 ب_1 ج_1$ کا مثلث پائین $ا_2 ب_2 ج_2$ ہے اور علیٰ ہذا القیاس، ن ویں مثلث پائین کے زاویے $ا_ن$، $ب_ن$، $ج_ن$ دریافت کرو۔

باب شانزدہم

اشکال ذواربعۃ الاضلاع اور منتظم کثیر الاضلاع

۲۲۵ — ایک ذو اربعۃ الاضلاع دائرہ کے اندر بن سکتی ہے، اُس کا رقبہ دریافت کرو۔



فرض کروکہ ذو اربعۃ الاضلاع ا ب ج د ہے اور اُس کے اضلاع کے طول اَ، بَ، جَ، دَ شکل میں دکھلائے گئے ہیں۔

ذو اربعۃ الاضلاع کا رقبہ = رقبہ △ ا ب ج + رقبہ △ ا د ج

= $\frac{1}{2}$ اَ بَ جب ب + $\frac{1}{2}$ جَ دَ جب د (دفعہ ۲۰۴)

= $\frac{1}{2}$ (اَ بَ + جَ دَ) جب ب

اور چونکہ اقلیدس م ۳ ش ۲۲ کی رو سے ∠ ب = ۱۸۰ − ∠ د

اس لئے جب ب = جب د

اب ہمیں جب ب کو اضلاع کی رقوم میں بیان کرنا ہے

اَ² + بَ² − ۲ اَ بَ جم ب = اج²

$$= \text{ج}^2 + \text{د}^2 - ۲\,\text{ج}\,\text{د}\ \text{جم}\ \text{د}$$

لیکن $\text{جم}\ \text{د} = \text{جم}\,(۱۸۰^\circ - \text{ب}) = -\ \text{جم}\ \text{ب}$

اس لئے $\text{ا}^2 + \text{ب}^2 - ۲\,\text{ا}\,\text{ب}\ \text{جم}\ \text{ب} = \text{ج}^2 + \text{د}^2 + ۲\,\text{ج}\,\text{د}\ \text{جم}\ \text{ب}$

یعنی
$$\text{جم}\ \text{ب} = \frac{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 - \text{ج}^2 - \text{د}^2}{۲\,(\text{ا}\,\text{ب} + \text{ج}\,\text{د})}$$

اس لئے
$$\text{جب}^2\ \text{ب} = ۱ - \text{جم}^2\ \text{ب} = ۱ - \frac{(\text{ا}^2 + \text{ب}^2 - \text{ج}^2 - \text{د}^2)^2}{\{۲\,(\text{ا}\,\text{ب} + \text{ج}\,\text{د})\}^2}$$

$$= \frac{\{۲\,(\text{ا}\,\text{ب} + \text{ج}\,\text{د})\}^2 - \{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 - \text{ج}^2 - \text{د}^2\}^2}{۴\,(\text{ا}\,\text{ب} + \text{ج}\,\text{د})^2}$$

$$= \frac{\{۲(\text{ا}\,\text{ب} + \text{ج}\,\text{د}) + (\text{ا}^2 + \text{ب}^2 - \text{ج}^2 - \text{د}^2)\}\{۲(\text{ا}\,\text{ب} + \text{ج}\,\text{د}) - (\text{ا}^2 + \text{ب}^2 - \text{ج}^2 - \text{د}^2)\}}{۴\,(\text{ا}\,\text{ب} + \text{ج}\,\text{د})^2}$$

$$= \frac{\{(\text{ا}^2 + ۲\,\text{ا}\,\text{ب} + \text{ب}^2) - (\text{ج}^2 - ۲\,\text{ج}\,\text{د} + \text{د}^2)\}\{(\text{ج}^2 + ۲\,\text{ج}\,\text{د} + \text{د}^2) - (\text{ا}^2 - ۲\,\text{ا}\,\text{ب} + \text{ب}^2)\}}{۴\,(\text{ا}\,\text{ب} + \text{ج}\,\text{د})^2}$$

$$= \frac{\{(\text{ا} + \text{ب})^2 - (\text{ج} - \text{د})^2\}\{(\text{ج} + \text{د})^2 - (\text{ا} - \text{ب})^2\}}{۴\,(\text{ا}\,\text{ب} + \text{ج}\,\text{د})^2}$$

$$= \frac{\{(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{د})(\text{ا} + \text{ب} - \text{ج} + \text{د})\}\{(\text{ج} + \text{د} + \text{ا} - \text{ب})(\text{ج} + \text{د} - \text{ا} + \text{ب})\}}{۴\,(\text{ا}\,\text{ب} + \text{ج}\,\text{د})^2}$$

فرض کروکہ $\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د} = ۲\,\text{ن}$

یعنی $\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{د} = (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د}) - ۲\,\text{د} = ۲\,(\text{ن} - \text{د})$

$$\text{ا} + \text{ب} - \text{ج} + \text{د} = ۲\,(\text{ن} - \text{ج})$$

$$\text{ا} - \text{ب} + \text{ج} + \text{د} = ۲\,(\text{ن} - \text{ب})$$

اور $-\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د} = ۲(\text{ن} - \text{ا})$

اسلئے $\text{جب}^2\,\text{ب} = \dfrac{۲(\text{ن}-\text{د}) \times ۲(\text{ن}-\text{ج}) \times ۲(\text{ن}-\text{ب}) \times ۲(\text{ن}-\text{ا})}{۴(\text{اب}+\text{جد})^2}$

یعنی $(\text{اب} + \text{جد})\,\text{جب}\,\text{ب} = ۲\sqrt{(\text{ن}-\text{ا})(\text{ن}-\text{ب})(\text{ن}-\text{ج})(\text{ن}-\text{د})}$

لہذا ذو اربعۃ الاضلاع کا رقبہ

$$= \tfrac{1}{۲}(\text{اب}+\text{جد})\,\text{جب}\,\text{ب} = \sqrt{(\text{ن}-\text{ا})(\text{ن}-\text{ب})(\text{ن}-\text{ج})(\text{ن}-\text{د})}$$

۲۲۶- چونکہ $\text{جم}\,\text{ب} = \dfrac{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 - \text{ج}^2 - \text{د}^2}{۲(\text{اب}+\text{جد})}$

اس لئے $\text{اج}^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 - ۲\,\text{اب}\,\text{جم}\,\text{ب}$

$$= \text{ا}^2 + \text{ب}^2 - \text{اب}\,\dfrac{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 - \text{ج}^2 - \text{د}^2}{\text{اب}+\text{جد}}$$

$$= \dfrac{(\text{ا}^2+\text{ب}^2)\,\text{جد} + \text{اب}(\text{ج}^2+\text{د}^2)}{\text{اب}+\text{جد}}$$

$$= \dfrac{(\text{اج}+\text{بد})(\text{اد}+\text{بج})}{\text{اب}+\text{جد}}$$

اسی طرح سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\text{بد}^2 = \dfrac{(\text{اب}+\text{جد})(\text{اج}+\text{بد})}{\text{اد}+\text{بج}}\,.$$

اس سے ہمیں ذو اربعۃ الاضلاع کے قطروں کے طول معلوم ہوتے ہیں۔

ضرب دینے سے اجؔ^{2} × ب دؔ^{2} = (اَ جَ + بَ دَ)^2

یعنی اج × ب د = اب × ج د + ب ج × ا د

اور یہ اقلیدس م ۶ مسئلہ د ہے

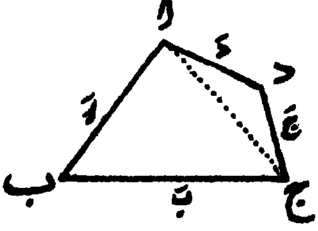
نیز ذو اربعۃ الاضلاع کے بیرونی دائرے کا مرکز

= ۱/۲ (اج)/(جب ب)

= √((اَجَ + بَ دَ)(اَدَ + بَ جَ) / (اَبَ + جَ دَ)) ÷ ۴ √((ن - اَ)(ن - بَ)(ن - جَ)(ن - دَ) / (اَبَ + جَ دَ)^2)

= ۱/۴ √((اَبَ + جَ دَ)(اَجَ + بَ دَ)(اَدَ + بَ جَ) / (ن - اَ)(ن - بَ)(ن - جَ)(ن - دَ))

۲۲۷- اگر کوئی ذوار بعۃ الاضلاع دی ہوئی ہو اور یہ ضروری نہیں کہ وہ ایک دائرہ کے اندر بن سکے تو ہم اس کے رقبہ کو اضلاع اور دو مقابل کے زاویوں کے مجموعہ کی رقوم میں بیان کر سکتے ہیں۔



فرض کرو کہ دو زاویوں ب اور د کا مجموعہ ۲عہ ہے، اگر ذوار بعۃ الاضلاع کے رقبہ کو قہ سے تعبیر کریں تو

قہ = رقبہ مثلث ا ب ج + رقبہ مثلث ا ج د

= ۱/۲ اَ بَ جب ب + ۱/۲ جَ دَ جب د

یعنی ۴ قہ = ۲ اَ بَ جب ب + ۲ جَ دَ جب د ....(۱)

نیز اَ^۲ + بَ^۲ − ۲ اَ بَ جم ب = جَ^۲ + دَ^۲ − ۲ جَ دَ جم د

پس اَ^۲ + بَ^۲ − جَ^۲ − دَ^۲ = ۲ اَ بَ جم ب − ۲ جَ دَ جم د ....(۲)

(۱) اور (۲) کو مربع کرنے اور جمع کرنے سے حاصل ہوگا۔

۱۶ قہ^۲ + (اَ^۲ + بَ^۲ − جَ^۲ − دَ^۲)^۲

= ۴ اَ^۲ بَ^۲ + ۴ جَ^۲ دَ^۲ − ۸ اَ بَ جَ دَ (جم ب جم د − جب ب جب د)

= ۴ اَ^۲ بَ^۲ + ۴ جَ^۲ دَ^۲ − ۸ اَ بَ جَ دَ جم (ب + د)

= ۴ اَ^۲ بَ^۲ + ۴ جَ^۲ دَ^۲ − ۸ اَ بَ جَ دَ جم ۲ عہ

= ۴ اَ^۲ بَ^۲ + ۴ جَ^۲ دَ^۲ − ۸ اَ بَ جَ دَ (۲ جم^۲ عہ − ۱)

= ۴ (اَ بَ + جَ دَ)^۲ − ۱۶ اَ بَ جَ دَ جم^۲ عہ

یعنی ۱۶ قہ^۲ = ۴ (اَ بَ + جَ دَ)^۲ − (اَ^۲ + بَ^۲ − جَ^۲ − دَ^۲)^۲

− ۱۶ اَ بَ جَ دَ جم^۲ عہ ....(۳)

لیکن بموجب دفعہ ۲۲۵

۴ (اَ بَ + جَ دَ)^۲ − (اَ^۲ + بَ^۲ − جَ^۲ − دَ^۲)^۲

= ۲ (ن − اَ) × ۲ (ن − بَ) × ۲ (ن − جَ) × ۲ (ن − دَ)

= ۱۶ (ن − اَ) (ن − بَ) (ن − جَ) (ن − دَ)

لہذا مساوات (۳) سے

قہ^۲ = (ن − اَ) (ن − بَ) (ن − جَ) (ن − دَ) − اَ بَ جَ دَ جم^۲ عہ

جس سے رقبہ مطلوبہ حاصل ہوتا ہے۔

نتیجہ صریح ۱۔ اگر د صفر ہو تو شکل ذواربعۃ الاضلاع مثلث بن جائے گی اور ضابطہ مندرجہ بالا سے ضابطہ دفعہ ۲۰۴ حاصل

ہو گا۔

نتیجہ صریح ۲۔ اگر ذواربعۃ الاضلاع کے چاروں اضلاع معلوم ہوں تو اَ، بَ، جَ، دَ کی قیمتیں اور اسلئے ن کی قیمت معلوم ہو جائے گی۔ رقبہ قد کی بڑی سے بڑی قیمت اُس وقت ہو گی جبکہ اَ بَ جَ دَ جم۲ عہ کی قیمت چھوٹی سے چھوٹی ہو یعنی جبکہ جم۲ عہ صفر کے برابر ہو اور اُس وقت عہ = ۹۰° اس صورت میں شکل کے دو مقابل کے زاویوں کا مجموعہ ۱۸۰° ہو گا اور شکل ایک دائرہ کے اندر بن سکے گی۔ (اقلیدس م ۳ ش ۲۲)

اس سے معلوم ہوا کہ جب ذواربعۃ الاضلاع کے اضلاع دئے ہوئے ہوں اس کے رقبہ کی بڑی سے بڑی قیمت اس وقت ہو گی جب وہ ایک دائرہ کے اندر بن سکے۔

۲۲۸۔ مثال۔ ایک ایسی ذواربعۃ الاضلاع کا رقبہ دریافت کرو جس کے اندر ایک دائرہ بن سکے۔

فرض کرو کہ ایک ذواربعۃ الاضلاع ا ب ج د کے اندر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے اور وہ اضلاع اب، ب ج، ج د، اور د ا کو ف، ق، ر، س پر مس کرتا ہے۔ تب

اف = اس، ب ف = ب ق، ج ق = ج ر اور در = د س

∴ اف + ب ف + ج ر + در = اس + ب ق + ج ق + د س

یعنی اب + ج د = ب ج + د ا

یعنی اَ + جَ = بَ + دَ

$$\text{اسلئے ن} = \frac{\text{اَ + جَ + بَ + دَ}}{۲} = \text{اَ + جَ} = \text{بَ + دَ}$$

∴ ن - اَ = جَ ، ن - بَ = دَ ، ن - جَ = اَ اور ن - دَ = بَ

اس لئے ضابطہ دفعہ آخر سے اس صورت میں ہوگا

قـ۲ = اَ بَ جَ دَ - اَ بَ جَ دَ جم۲ عہ = اَ بَ جَ دَ جب۲ عہ

یعنی رقبہ مطلوبہ = √(اَ بَ جَ دَ) جب عہ

اگر علاوہ اس کے ذوار بعتہ الاضلاع ایک دائرہ کے اندر بن سکے تو

۲ عہ = °۱۸۰ یعنی جب عہ = جب °۹۰ = ۱

اس سے یہ نتیجہ نکلا کہ ایک ایسی ذوار بعتہ الاضلاع کا رقبہ جس کے اندر ایک دائرہ اور باہر ایک دائرہ بن سکے = √(اَ بَ جَ دَ)

امثلہ نمبری ۳۸

۱۔ ایک ذوار بعتہ الاضلاع کے اندر ایک ایسا دائرہ بن سکتا ہے جو اضلاع کو مس کرے، اگر اس کے اضلاع مفصلہ ذیل ہوں تو ہر ایک صورت میں اس کا رقبہ دریافت کرو۔

(۱) ۳ ، ۵ ، ۷ ، اور ۹ فٹ

(۲) ۷ ، ۱۰ ، ۵ ، اور ۲ فٹ

۲۔ ایک ذوار بعتہ الاضلاع کے اضلاع بالترتیب ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ فٹ ہیں اور اس کے دو مقابل کے زاویوں کا مجموعہ °۱۲۰ ہے، ثابت کرو کہ ذوار بعتہ الاضلاع کا رقبہ ۳ √۳۰ مربع فٹ ہے

۳۔ ایک ذوار بعتہ الاضلاع کے اضلاع ۳ ، ۳ ، ۴ اور ۴ اور ۴ فٹ ہیں اور اس کے گرد ایک دائرہ بن سکتا ہے، اس کے اندرونی اور بیرونی دائروں کے نصف قطر دریافت کرو۔

۴۔ ثابت کرو کہ کسی ذوار بعۃ الاضلاع کا رقبہ اس کے دو قطروں اور اُن کے درمیانی زاویہ کی جیب کے نصف حاصل ضرب کے برابر ہے۔

۵۔ ایک ذوار بعۃ الاضلاع ایک دائرہ کے اندر بن سکتی ہے نیز ایک اور دائرہ کے گرد بھی بن سکتی ہے، ثابت کرو کہ اس کا رقبہ √ا َ بَ جَ دَ ہے اور آخرالذکر دائرہ کا قطر ۲ √اَ بَ جَ دَ / (اَ + بَ + جَ + دَ) ہے۔

۶۔ ایک ذوار بعۃ الاضلاع ا ب ج د ایک دائرہ کے گرد بنائی گئی ہے ثابت کرو کہ

ا ب جیب ا/۲ جیب ب/۲ = ج د جیب ج/۲ جیب د/۲

۷۔ ایک ذوار بعۃ الاضلاع کے اضلاع بالترتیب اَ، بَ، جَ، دَ ہیں اور قطروں کا درمیانی زاویہ جو ضلع بَ یا دَ کے مقابل ہے وہ عہ ہے ثابت کرو کہ ذوار بعۃ الاضلاع کا رقبہ ¼ (اَ² − بَ² + جَ² − دَ²) مس عہ ہے

۸۔ ایک ذوار بعۃ الاضلاع کے قطر لا اور ما ہیں اور اس کے اضلاع اَ، بَ، جَ اور دَ ہیں، ثابت کرو کہ اس کا رقبہ

¼ [۴ لا² ما² − (بَ² + دَ² − اَ² − جَ²)²]^½ ہے

۹۔ اگر کسی ذوار بعۃ الاضلاع کے گرد ایک دائرہ بن سکے تو ثابت کرو کہ اس کے قطروں کا درمیانی زاویہ

جیب⁻¹ [۲ √(ن − اَ)(ن − بَ)(ن − جَ)(ن − دَ) ÷ (اَ جَ + بَ دَ)] ہوگا

اگر اس ذوار بعۃ الاضلاع کے اندر ایک ایسا دائرہ بن سکے جو اس کے چاروں

کو مس کرے تو ثابت کرو کہ زاویہ مذکورہ $جم^{-1} \dfrac{اَجَ - بَ دَ}{اَجَ + بَ دَ}$ ہوگا

۱۰ ـ اگر ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے اضلاع کو بالترتیب نسبت م : ن میں تقسیم کیا جائے اور نقاطِ فصل کو وصل کرنے سے ایک نئی ذو اربعۃ الاضلاع بنائی جائے تو ثابت کرو کہ اس کے رقبہ کی نسبت اصلی ذو اربعۃ الاضلاع کے رقبہ کے ساتھ $م^{۲} + ن^{۲} : (م + ن)^{۲}$ ہوگی

۱۱ ـ اگر ذو اربعۃ الاضلاع ا ب ج د کے گرد ایک دائرہ بن سکے تو ثابت کرو کہ

$$مس \frac{ب}{۲} = \sqrt{\frac{(ن - اَ)(ن - بَ)}{(ن - جَ)(ن - دَ)}}$$

اور جن دو حصوں میں ایک قطر دوسرے قطر کو تقسیم کرتا ہے ان کا حاصل ضرب

$$\frac{اَ بَ جَ دَ\,(اَجَ + بَ دَ)}{(اَبَ + جَ دَ)(اَدَ + بَ جَ)}$$ ہے

۱۲ ـ اگر ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے اضلاع بالترتیب اَ، بَ، جَ، دَ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$دَ^{۲} = اَ^{۲} + بَ^{۲} + جَ^{۲} - ۲\,اَ بَ\, جم\, ھ - ۲\, بَ جَ\, جم\, یہ - ۲\, جَ اَ\, جم\, جہ$$

جہاں ھ، یہ، جہ اضلاع اَ، بَ اور بَ، جَ اور جَ، اَ کے درمیانی زاویوں کو تعبیر کرتے ہیں

۲۲۹ ـ منتظم کثیر الاضلاع ـ منتظم کثیر الاضلاع ایک ایسی کثیر الاضلاع ہے جس کے سب اضلاع برابر ہوں اور سب زاویے برابر ہوں ـ

اگر ایک کثیر الاضلاع کے ن زاویے ہوں تو

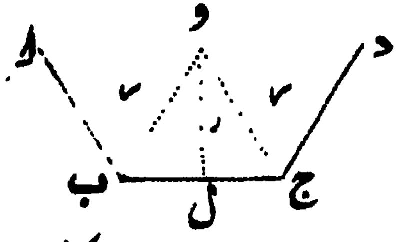
بموجب اقلیدس م ا ش ۳۲، نتیجہ صریح
اس کے ایک زاوئے کا ن گنا + ۴ قائمے
= اُن قائموں کی تعداد کے جو شکل کی تعدادِ اضلاع کے دو چند ہوں = ۲ ن قائمے

اس لئے ہر ایک زاویہ = $\frac{۲ن - ۴}{ن}$ قائمے

= $\frac{۲ن - ۴}{ن} \times \frac{\pi}{۲}$ نیم قطری زاوئے

نوٹ - شکل مستقیم الاضلاع کو کسی دائرہ کے اندر بنی ہوئی کہتے ہیں جب اسکے سب زاوئے دائرہ کے محیط پر واقع ہوں - کسی دائرہ کو کسی شکل مستقیم الاضلاع کے گرد بنا ہوا اُس وقت کہتے ہیں جب اُس دائرہ کا محیط اُس شکل کے سب زاویوں کے نقاط میں سے ہوکر گزرے، اس دائرہ کو شکل کا بیرونی دائرہ بھی کہتے ہیں - کسی دائرہ کو کسی شکل مستقیم الاضلاع کے اندر بنا ہوا کہتے ہیں جب شکل کا ہر ایک ضلع دائرہ کے محیط کو مس کرے، اس کو ہم شکل کا اندرونی دائرہ بھی کہیں گے، کسی شکل مستقیم الاضلاع کو دائرہ کے گرد بنی ہوئی اُس وقت کہتے ہیں جب شکل کا ہر ایک ضلع دائرہ کا ماس ہو۔

۲۳۰- ایک منتظم کثیر الاضلاع کے اندرونی اور بیرونی دائرہ کے نصف قطر دریافت کرو۔



فرض کرو کہ ا ب، ب ج، ج د ایک کثیر الاضلاع کے تین متصل اضلاع ہیں، اور کل تعداد اضلاع ن ہے، زاویوں ا ب ج اور ب ج د کی تنصیف

خطوط ب و اور ج و سے کرو، اور فرض کرو کہ یہ خطوط نقطہ و پر ملتے ہیں، ضلع ب ج پر عمود و ل نکالو، ظاہر ہے کہ نقطہ و کثیر الاضلاع کے اندرونی اور بیرونی دائروں کا مرکز ہے اور ب ل = ل ج

اس لئے و ب = و ج = ر یعنی بیرونی دائرہ کا نصف قطر اور و ل = ر یعنی اندرونی دائرہ کا نصف قطر

زاویہ ب و ج اُن تمام زاویوں کے مجموعہ کا $\frac{1}{ن}$ واں حصہ ہے جو اضلاع کے محاذی نقطہ و پر بنتے ہیں -

یعنی ∠ ب و ج = $\frac{۴ \text{ قائمے}}{ن}$ = $\frac{۲\pi}{ن}$ نیم قطری زاویے

اس لئے ∠ ب و ل = $\frac{1}{۲}$ ∠ ب و ج = $\frac{\pi}{ن}$

اگر کثیر الاضلاع کے ضلع کو اَ سے تعبیر کریں تو

اَ = ب ج = ۲ ب ل = ۲ ر جب ب و ل = ۲ ر جب $\frac{\pi}{ن}$

$$\therefore \quad ر = \frac{اَ}{۲ \text{ جب } \frac{\pi}{ن}} = \frac{اَ}{۲} \text{ قم } \frac{\pi}{ن} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

نیز اَ = ۲ ب ل = ۲ و ل مس ب و ل = ۲ ر مس $\frac{\pi}{ن}$

$$\therefore \quad ر = \frac{اَ}{۲ \text{ مس } \frac{\pi}{ن}} = \frac{اَ}{۲} \text{ مم } \frac{\pi}{ن} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

۳۳۱- منتظم کثیر الاضلاع کا رقبہ

کثیر الاضلاع کا رقبہ مثلث ب و ج کے رقبہ کا ن گنا ہے،

اس لئے کثیر الاضلاع کا رقبہ

= ن × ½ ول × ب ج = ن × ول × ب ل

= ن × ب ل مم ل و ب × ب ل

= ن × $\frac{ر^2}{2}$ مم $\frac{\pi}{ن}$ .... (۱)

جس سے اضلاع کی رقوم میں کثیر الاضلاع کا رقبہ حاصل ہوتا ہے۔

نیز رقبہ = ن × ول × ب ل = ن × ول × ول مس ب و ل

= ن ر۲ مس $\frac{\pi}{ن}$ .... (۲)

نیز رقبہ

= ن × ول × ب ل = ن × و ب جم ل و ب × و ب جب ل و ب

= ن ر۲ جم $\frac{\pi}{ن}$ جب $\frac{\pi}{ن}$ = $\frac{ن}{2}$ ر۲ جب $\frac{2\pi}{ن}$ .... (۳)

ضوابط (۲) اور (۳) سے کثیر الاضلاع کا رقبہ اندرونی اور بیرونی دائروں کے نصف قطروں کی رقوم میں معلوم ہوتا ہے

۲۳۲ــ مثال۔ ایک منتظم معشر کے ضلع کا طول ۲۰ فٹ ہے دریافت کرو (۱) اس کے اندرونی دائرہ کا نصف قطر (۲) اس کے بیرونی دائرہ کا نصف قطر (۳) اس کا رقبہ

کثیر الاضلاع کے مرکز پر ایک ضلع کے محاذی زاویہ = $\frac{360°}{12}$ = ۳۰°

اس لئے ۱۰ = ر مس ۱۵° = ر جب ۱۵°

∴ ر = ۱۰ مم ۱۵° = $\frac{10}{\sqrt{3}-2}$ (دفعہ ۱۰۷)

= ۱۰ (۲ + $\sqrt{3}$) = ... ۳۲ء۳۷ فٹ

نیز سا = ۱۰/جب ۱۵ = ۱۰ × ۲√۲/(√۳ − ۱) (دفعہ ۱۱۲)

= ۱۰ × √۲ (√۳ + ۱) = ۱۰ (√۶ + √۲)

= ۱۰ (۲ء۴۴۹۵ ..... + ۱ء۴۱۴۲ .....) = ۳۸ء۶۳۷ .... فٹ

نیز رقبہ = ۱۲ × ر × ۱۰ مربع فٹ

= ۱۲۰۰ (۲ + √۳) = ... ۴۴۷۸ء۴۶ مربع فٹ

امثلہ نمبری ۳۹

۱۔ ایک معشر منتظم ایک ایسے دائرہ کے گرد بنی ہوئی ہے جس کا نصف قطر ۱ فٹ ہے، اس کے مجموعہ اضلاع کو ۰۱ء انچ تک صحیح طور پر دریافت کرو۔

[مس ۱۸° = ۳۲۴۹۲ء]

۲۔ ایک ۱۲ اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع ایک دائرہ کے گرد بنی ہوئی ہے جس کا نصف قطر ۱ فٹ ہے اس کے ایک ضلع کا طول ۳ مرتبہ کے اعشاریہ تک دریافت کرو۔

۳۔ اشکال ذیل کا رقبہ دریافت کرو (۱) مخمس (۲) مسدس (۳) مثمن (۴) معشر (۵) اثنا عشری، ان میں سے ہر ایک شکل منتظم ہے اور ہر ایک کا ضلع ۱ فٹ ہے،

[ظم ۱۸° = ۳ء۰۷۷۶۸ .....، ظم ۳۶° = ۱ء۳۷۶۳۸ ....]

۴۔ ایک مثمن منتظم اور مسدس منتظم کے رقبوں کا تفاوت معلوم کرو، ہر ایک شکل کا مجموعۂ اضلاع ۲۴ فٹ ہے۔

۵۔ ایک مربع کا ضلع ۲ فٹ ہے، اس کے کونوں کو کاٹ کر ایک

منتظم مثمن بنائی گئی ہے اس کا رقبہ دریافت کرو۔

۶- ایک دئے ہوئے دائرہ کے اندر اور باہر دو مثمن شکلیں بنائی گئی ہیں، اُن کے اضلاع کے مجموعوں اور اُن کے رقبوں کا مقابلہ کرو اور ثابت کرو کہ دائرہ کے اندر بنی ہوئی مسدس اور مثمن شکلوں کے رقبوں کی باہمی نسبت $\sqrt{۲۷}$: $\sqrt{۳۲}$ ہے۔

۷- ثابت کرو کہ ایک ایسے دائرہ کا نصف قطر جو ایک منتظم مخمس کے گرد بن سکتا ہے مخمس کے ایک ضلع کا $\frac{۱۷}{۲۰}$ ہے۔

۸- اگر ایک مثلث متساوی الاضلاع اور منتظم مسدس کے اضلاع کے مجموعے برابر ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے رقبوں کی باہمی نسبت ۲ : ۳ ہے

۹- اگر ایک منتظم مخمس اور ایک منتظم مسدس کے اضلاع کے مجموعے مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے رقبوں کی باہمی نسبت ۲ : $\sqrt{۵}$ ہے۔

۱۰- ثابت کرو کہ ن اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع کے اندرونی اور بیرونی دائروں کے نصف قطروں کا مجموعہ $\frac{ل}{۲}$ قم $\frac{\pi}{۲ن}$ ہے جہاں ل کثیر الاضلاع کے ایک ضلع کو تعبیر کرتا ہے،

۱۱- ن اضلاع کی دو منتظم اشکال کثیر الاضلاع ہیں، ان میں سے ایک تو ایک دئے ہوئے دائرہ کے گرد بنی ہوئی ہے اور دوسری دائرہ کے اندر، ثابت کرو کہ بیرونی کثیر الاضلاع کے مجموعۂ اضلاع اور دائرہ کے محیط اور اندرونی کثیر الاضلاع کے مجموعۂ اضلاع کی باہمی نسبتیں

قط $\frac{\pi}{ن}$: $\frac{\pi}{ن}$ قم $\frac{\pi}{ن}$: ۱ ہیں، اور اشکال کے رقبوں کی باہمی نسبت

جم^{۲} $\frac{\pi}{ن}$: ۱ ہے۔

۱۲ - ایک ن اضلاع کی کثیر الاضلاع ایک دائرہ کے گرد بنی ہوئی ہے، اگر اس کے رقبے کی نسبت ایک ۲ن اضلاع کی کثیر الاضلاع کے رقبہ کے ساتھ جو اُسی دائرہ کے گرد بنائی جائے ۳ : ۲ ہو تو ن کی قیمت دریافت کرو۔

۱۳ - ثابت کرو کہ ۲ن اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع کا رقبہ جو ایک دائرہ کے اندر بنی ہوئی ہو اُن ن اضلاع کی منتظم اشکال کثیر الاضلاع کے رقبوں کا وسط تناسب ہے جو بالترتیب دائرہ کے اندر اور گرد بنی ہوئی ہوں۔

۱۴ - ن اضلاع کی دو منتظم اشکال کثیر الاضلاع میں سے ایک، دائرہ کے اندر اور دوسری دائرہ کے گرد بنی ہوئی ہے، ان کے رقبوں کی باہمی نسبت ۳ : ۴ ہے، ن کی قیمت دریافت کرو

۱۵ - ایک کثیر الاضلاع کے اندرونی زاویے سلسلہ حسابیہ میں ہیں، سب سے چھوٹا زاویہ ۱۲۰ ہے اور فرق مشترک ۵° ہے، اضلاع کی تعداد دریافت کرو۔

۱۶ - دو منتظم اشکال کثیر الاضلاع میں سے ایک کی تعداد اضلاع دوسری کی تعداد اضلاع کی دو چند ہے، اور ایک کے زاویے کو دوسری کے زاویے کے ساتھ نسبت ۹ : ۸ ہے، ہر ایک کثیر الاضلاع کی تعداد اضلاع دریافت کرو۔

۱۷ - ثابت کرو کہ منتظم اشکال کثیر الاضلاع کے کل ۱۱ زوج ایسے ہو سکتے ہیں کہ ہر ایک زوج میں ایک کثیر الاضلاع کے زاویے کے درجوں کی تعداد کو دوسری کثیر الاضلاع کے زاویہ کی درجوں کی تعداد

ے ساتھ نسبت ۱۰ اور ۹ کی ہو، ہرایک کثیرالاضلاع کی تعداد اضلاع ریافت کرو۔

۱۸۔ ایک مربع مینار کے قاعدہ کا ضلع ا فٹ ہے اور اس کے راس ی عمودی بلندی قاعدہ کے مرکز سے ف فٹ ہے، اگر مینار کے کسی رخ کا میلان قاعدہ کے ساتھ طہ ہو اور دو رخوں کا میلان آپس میں نہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس ط} = \frac{۲\text{ف}}{\text{ا}} \quad \text{اور} \quad \text{مس} \frac{\text{فہ}}{۲} = \sqrt{۱ + \frac{\text{ا}^۲}{۲\text{ف}^۲}}$$

۱۹۔ ایک مینار کا قاعدہ منتظم مسدس کی شکل کا ہے، اگر مینار کے راس سے قاعدہ پر عمود نکالا جائے تو وہ مسدس کے مرکز میں سے گزرتا ہے اور اس کا طول قاعدہ کے ایک ضلع کے برابر ہے، قاعدہ اور مینار کے کسی رخ کے درمیان جو زاویہ بنے اس کا مماس دریافت کرو۔ نیز دو بیرونی رخوں کے درمیانی زاویہ کے نصف کا مماس معلوم کرو۔

۲۰۔ ایک منتظم مضلع مخروط کا قاعدہ ایک ن اضلاع کی کثیرالاضلاع ہے جس کا ہر ایک ضلع اَ ہے، نیز مخروط کے ہر ایک ترچھے ضلع کا طول ل ہے، ثابت کرو کہ مخروط کے دو متصل بیرونی رخوں کا درمیانی زاویہ

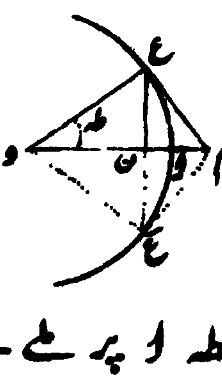
$$\frac{۴\text{ل}^۲ \text{جم} \frac{۳۲}{\text{ن}} + \text{ا}^۲}{۴\text{ل}^۲ - \text{ا}^۲} \quad \text{ہے۔}$$

باب ہفتدہم

صغیر زاویوں کی مثلثی نسبتیں - دائرہ کا رقبہ - اُفق کا میلان

۲۳۳ — ایک زاویہ قائمہ سے کم ہے، اُس میں نیم قطری زاویوں کی تعداد ط ہے۔ ثابت کرو کہ جب ط، ط، مس ط بلحاظ مقدار کے صعودی ترتیب میں ہیں۔

فرض کرو کہ م و ع کوئی زاویہ ہے جو زاویہ قائمہ سے کم ہے، مرکز و اور کسی نصف قطر و ع پر دائرہ



کی قوس ع ا عَ کھینچو جو و م کو نقطہ ا پر ملے۔ و ا پر عمود ع ن کھینچو اور اس کو اسقدر خارج کرو کہ وہ قوس دائرہ کو عَ پر ملے، نقطہ ع پر مماس ع م کھینچو

اور فرض کرو کہ وہ و ا کو نقطہ م پر ملتا ہے، م عَ کو ملاؤ

مثلث ع و ن اور عَ و ن آپسمیں ہر طرح سے برابر ہیں

اس لئے ع ن = ن عَ اور قوس ع ا = قوس ا عَ

نیز مثلث م و ع اور م و عَ ہر طرح سے برابر ہیں

اس لئے م ع = م عَ

خط مستقیم ع عَ طول میں قوس ع ا عَ سے کم ہے

یعنی ن ع < قوس ع ا

نیز ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ قوس ع ا عَ طول میں ع م اور م عَ کے مجموعہ سے کم ہے یعنی

قوس ع ا < ع م

پس معلوم ہوا کہ ن ع، قوس ا ع اور مماس ع م میں بلحاظ مقدار کے صعودی ترتیب ہے۔

اسلئے (ن ع)/(و ع)، (قوس ا ع)/(و ع) اور (ع م)/(و ع) میں بلحاظ مقدار کے صعودی ترتیب ہے

لیکن (ن ع)/(و ع) = جب ا و ع = جب ط

(قوس ا ع)/(و ع) = ∠ ا و ع میں نیمقطری زاویوں کی تعداد کے

= ط .... (دفعہ ۲۳)

اور (ع م)/(و ع) = مس ع و م = مس ا و ع = مس ط

لہذا ثابت ہوا کہ جب ط ، ط اور مس ط میں بلحاظ مقدار کے ترتیب صعودی ہے بشرطیکہ ط < $\frac{\pi}{2}$

۲۳۴ — چونکہ جب ط < ط < مس ط اس لئے اگر ان میں سے ہر ایک کو مثبت مقدار جب ط پر تقسیم کر دیا جائے تو

$$1 < \frac{\text{ط}}{\text{جب ط}} < \frac{1}{\text{جم ط}}$$

اسلئے $\frac{\text{ط}}{\text{جب ط}}$ ہمیشہ ۱ اور $\frac{1}{\text{جم ط}}$ کے درمیان واقع ہوتی ہے اور یہ نتیجہ درست ہے خواہ زاویہ ط کتنا ہی چھوٹا کیوں نہ ہو۔

لیکن جب زاویہ ط بہت چھوٹا ہو تو جم ط تقریباً ایک کے برابر ہوتی ہے اور جتنا چھوٹا ط ہوتا جائے گا اتنا ہی ایک کے زیادہ قریب جم ط آتی جائے گی یعنی اتنا ہی ایک کے زیادہ قریب $\frac{1}{\text{جم ط}}$ کی قیمت ہوگی۔

اسلئے جب زاویہ نہایت ہی قلیل ہوگا تو مقدار $\frac{\text{ط}}{\text{جب ط}}$ عدد ایک اور ایک ایسی مقدار کے درمیان واقع ہوگی جس کا تفاوت عدد ایک سے ایک لاانتہا قلیل مقدار کے برابر ہوگا

دوسرے الفاظ میں جب زاویہ ط لاانتہا چھوٹا ہوگا تو مقدار $\frac{\text{ط}}{\text{جب ط}}$ اور اسلئے $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$ آخرالامر ایک کے برابر ہوگی ، یعنی جتنا چھوٹا ایک زاویہ ہوتا جائے گا اتنا ہی اس کی جیب اُن نیم قطری زاویوں کی تعداد کے

برابر ہوتی جائے گی جو زاویہ مجوزہ میں شامل ہیں۔ اختصاراً اس کو یوں بیان کرتے ہیں۔

جب طہ = طہ اگر زاویہ طہ بہت چھوٹا ہو

اسی طرح سے مس طہ = طہ اگر زاویہ طہ بہت چھوٹا ہو

نتیجہ صریح فرض کروکہ طہ = $\frac{\text{عہ}}{\text{ن}}$ تو اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جب زاویہ طہ لا انتہا چھوٹا ہو تو ن لا انتہا بڑا ہوتا ہے۔

اس لئے $\frac{\text{جب}\ \frac{\text{عہ}}{\text{ن}}}{\frac{\text{عہ}}{\text{ن}}}$ ایک کے برابر ہے اگر ن لا انتہا بڑا ہو

پس ن جب $\frac{\text{عہ}}{\text{ن}}$ = عہ اگر ن لا انتہا بڑا ہو

اسی طرح سے ن مس $\frac{\text{عہ}}{\text{ن}}$ = عہ اگر ن لا انتہا بڑا ہو

۲۳۵ — دفعہ گذشتہ میں یہ خاص طور پر یاد رکھنا چاہئے کہ زاویہ مجوزہ میں طہ نیم قطری زاویوں کی تعداد کو تعبیر کرتا ہے۔

جب عہ° کی قیمت اگر عہ نہایت ہی چھوٹا ہو اسطرح معلوم ہو سکتی ہے

$\pi^{\text{نق}} = ۱۸۰^{\circ}$ اسلئے

$\text{عہ}^{\circ} = \left(\frac{\text{عہ}}{۱۸۰}\pi\right)^{\text{نق}}$

$\therefore$ جب عہ° = جب $\left(\frac{\pi\ \text{عہ}}{۱۸۰}\right)^{\text{نق}} = \frac{\pi\ \text{عہ}}{۱۸۰}$ بموجب نتیجہ دفعہ آخر۔

۲۳۶ — جدولوں سے معلوم ہوگا کہ کسی زاویہ کی جیب اور اس کا قوسی ناپ ۷ مرتبہ کے اعشاریہ تک برابر ہوتے ہیں جبتک کہ زاویہ کی مقدار ۱۸ سے کم رہتی ہے اور وہ ۵ مرتبہ کے اعشاریہ تک برابر ہوتے ہیں جب تک کہ زاویہ تقریباً ۲ سے کم رہتا ہے ۔

۲۳۷ — اگر کوئی زاویہ قائمہ سے کم ہو اور اسمیں نیم قطری زاویوں کی تعداد ط ہو تو ثابت کرو کہ جب ط > ط − $\frac{ط^3}{4}$ اور

جم ط > ۱ − $\frac{ط^2}{2}$

بموجب دفعہ ۲۳۳

مس ط > $\frac{ط}{2}$ ∴ جب $\frac{ط}{2}$ > $\frac{ط}{2}$ جم $\frac{ط}{2}$

اور چونکہ جب ط = ۲ جب $\frac{ط}{2}$ جم $\frac{ط}{2}$

اسلئے جب ط > ط جم^2 $\frac{ط}{2}$ یعنی > ط (۱ − جب^2 $\frac{ط}{2}$)

لیکن چونکہ بموجب دفعہ ۲۳۳ جب $\frac{ط}{2}$ < $\frac{ط}{2}$

اسلئے ۱ − جب^2 $\frac{ط}{2}$ > ۱ − $(\frac{ط}{2})^2$ یعنی > ۱ − $\frac{ط^2}{4}$

∴ جب ط > ط (۱ − $\frac{ط^2}{4}$) یعنی > ط − $\frac{ط^3}{4}$

نیز جم ط = ۱ − ۲ جب^2 $\frac{ط}{2}$

اور چونکہ جب^2 $\frac{ط}{2}$ < $(\frac{ط}{2})^2$

اسلئے ۱ − ۲ جب^2 $\frac{ط}{2}$ > ۱ − ۲ $(\frac{ط}{2})^2$ یعنی > ۱ − $\frac{ط^2}{2}$

علم مثلث کے حصہ دوم میں یہ ثابت کیا جائے گا کہ

جب ط > ط − $\frac{ط^3}{6}$ اور جم ط < ۱ − $\frac{ط^2}{2}$ + $\frac{ط^4}{24}$

۲۳۸ — **مثال ۱** — جب ۱۰َ اور جم ۱۰َ کی قیمتیں دریافت کرو

چونکہ ۱۰′ = $\frac{۱}{۶}^{\circ}$ = $\frac{\pi}{۶\times ۱۸۰}^{\text{نق}}$

اسلئے جب ۱۰′ = جب $\left(\frac{\pi}{۶\times ۱۸۰}\right)^{\text{نق}}$ = $\frac{\pi}{۶\times ۱۸۰}$

= $\frac{۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵...}{۶\times ۱۸۰}$ = ۰۰۲۹۰۸۹ ٫ تقریباً

نیز جم ۱۰′ = $\sqrt{۱ - \text{جب}^{۲}\, ۱۰'}$

= $\left[۱ - ۰۰۰۰۰۸۴۶۸ ٫ ......\right]^{\frac{۱}{۲}}$ = ۱ − $\frac{۱}{۲}$ $\left[۰۰۰۰۰۸۴۶۸ ٫ ......\right]$ تقریباً بذریعہ مسئلہ ثنائی

= ۱ − ۰۰۰۰۰۴۲۳۴ ٫ ...... = ۹۹۹۹۹۵۸ ٫ ......

مثال ۲ — مساوات جب طہ = ۵۲ ٫ میں طہ کی تقریبی قیمت دریافت کرو

چونکہ جب طہ تقریباً $\frac{۱}{۲}$ کے برابر ہے اس لئے طہ تقریباً $\frac{\pi}{۶}$ کے برابر ہے

اب فرض کرو کہ طہ = $\frac{\pi}{۶}$ + لا جہاں لا مقدار میں قلیل ہے

∴ ۵۲ ٫ = جب $\left(\frac{\pi}{۶} + \text{لا}\right)$ = جب $\frac{\pi}{۶}$ جم لا + جم $\frac{\pi}{۶}$ جب لا

= $\frac{۱}{۲}$ جم لا + $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ جب لا

چونکہ لا بہت چھوٹا ہے اس لئے جم لا = ۱ اور جب لا = لا تقریباً

∴ ۵۲ ٫ = $\frac{۱}{۲}$ + $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ لا

∴ لا = ۰۲ ٫ × $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ نیمقطری زاوئے = $\frac{\sqrt{۳}}{۷۵}^{\text{نق}}$ = ۱٫۳۲° تقریباً

اسلئے طہ = ۳۱° ۱۹′ تقریباً

امثلہ نمبری ۴۰

[π = ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵ ، $\frac{۱}{\pi}$ = ۳۱۸۳۱ ٫.....]

مفصلہ ذیل کی قیمتیں پانچ مرتبہ کے اعشاریہ تک دریافت کرو

۱ — جب ۷″ ۲ — جب ۱۵′ ۳ — جب ۱°

۴ — جم ۱۵َ   ۵ — قم ۸ً   ۶ — قط ۵َ

معادلات ذیل کی تقریبی قیمتیں دریافت کرو

۷ — جب طہ = ۰۱ر   ۸ — جب طہ = ۴۸ر

۹ — $\text{جم}\left(\frac{\pi}{4} + \text{طہ}\right) = ۹۸ر$ ۱۰ — جم طہ = ۹۹۹ر

۱۱ — ایک پیسے کا قطر ایک انچ ہے، یہ معلوم کرو کہ آنکھ سے کتنے فاصلہ پر چاند کے سامنے اس کو رکھا جائے کہ چاند نہ دکھائی دے، چاند کے قطر کے محاذی جو زاویہ دیکھنے والے کی آنکھ پر بنتا ہے وہ ۳۰َ ہے۔

۱۲ — ایک شخص خط مستقیم پر ایک دور کی شے کی سیدھ میں جاتا ہے اور دیکھتا ہے کہ تین نقاط ا، ب، ج پر اسکی چوٹی کے زوایاء ارتفاع بالترتیب عہ، ۲عہ، ۳عہ ہیں، ثابت کرو کہ

اب = ۳ ب ج تقریباً

۱۳ — اگر کوئی زاویہ قائمہ سے کم ہو اور اس میں نیم قطری زاویوں کی تعداد طہ ہو تو ثابت کرو کہ $\text{جم طہ} < 1 - \frac{\text{طہ}^2}{2} + \frac{\text{طہ}^4}{16}$

۱۴ — اولر کا مسئلہ ثابت کرو یعنی ثابت کرو کہ

$$\text{جب طہ} = \text{طہ} \times \text{جم}\frac{\text{طہ}}{2} \times \text{جم}\frac{\text{طہ}}{2^2} \times \text{جم}\frac{\text{طہ}}{2^3} \cdots\cdots \infty\ \text{تک}$$

$$\Big[\text{جب طہ} = 2\,\text{جب}\frac{\text{طہ}}{2}\,\text{جم}\frac{\text{طہ}}{2} = 2^2\,\text{جب}\frac{\text{طہ}}{2^2}\,\text{جم}\frac{\text{طہ}}{2^2}\,\text{جم}\frac{\text{طہ}}{2}$$

$$= 2^3\,\text{جب}\frac{\text{طہ}}{2^3}\,\text{جم}\frac{\text{طہ}}{2^3}\,\text{جم}\frac{\text{طہ}}{2^2}\,\text{جم}\frac{\text{طہ}}{2} = \cdots\cdots$$

$$= 2^n\,\text{جب}\frac{\text{طہ}}{2^n} \times \text{جم}\frac{\text{طہ}}{2}\,\text{جم}\frac{\text{طہ}}{2^2}\,\text{جم}\frac{\text{طہ}}{2^3} \cdots\cdots \text{جم}\frac{\text{طہ}}{2^n}$$

ن کو لا انتہا بڑا فرض کرنے سے بموجب دفعہ ۲۳۴ نتیجہ صحیح

$$2^n\,\text{جب}\frac{\text{طہ}}{2^n} = \text{طہ}$$

اسلئے جب ط = ط جم $\frac{ط}{۲}$ جم $\frac{ط}{۲^۲}$ جم $\frac{ط}{۲^۳}$ .... ∞ تک]

۱۵ — ثابت کرو کہ

$$\left(۱ - سن^۲ \frac{ط}{۲}\right)\left(۱ - سن^۲ \frac{ط}{۲^۲}\right)\left(۱ - سن^۲ \frac{ط}{۲^۳}\right) ...... ∞ تک$$

$$= ط \times مم\ ط$$

۲۳۹ — ایک دائرہ کا رقبہ

بموجب دفعہ ۲۳۱ ایک ن اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع کا رقبہ جو ایک ایسے دائرہ کے اندر بنی ہوئی ہو جس کا نصف قطر ر ہو $= \frac{ن}{۲}$ ر² جب $\frac{۲\pi}{ن}$

اب فرض کرو کہ کثیر الاضلاع ہمیشہ منتظم رہتی ہے اور اسکی تعداد اضلاع لا انتہا بڑہتی ہے، ظاہر ہے کہ کثیر الاضلاع کا مجموعۂ اضلاع دائرہ کے محیط کے قریب قریب آتا جائیگا۔ اس لئے جب کثیر الاضلاع کا مجموعۂ اضلاع لا انتہا بڑہیگا تو دائرہ کا رقبہ کثیر الاضلاع کے رقبہ کے برابر ہوگا

$$اب\ \frac{ن}{۲} ر^۲ جب\ \frac{۲\pi}{ن} = \frac{ن}{۲} ر^۲ \times \frac{۲\pi}{ن} \times \frac{جب\ \frac{۲\pi}{ن}}{\frac{۲\pi}{ن}}$$

$$= \pi ر^۲ \frac{جب\ \frac{۲\pi}{ن}}{\frac{۲\pi}{ن}} = \pi ر^۲ \frac{جب\ ط}{ط}\ جہاں\ ط = \frac{۲\pi}{ن}$$

جب ن لا انتہا بڑا ہوگا تو ط کی قیمت لا انتہا چھوٹی ہوگی اور اُس وقت بموجب دفعہ ۲۲۴ نسبت $\frac{جب\ ط}{ط}$ ایک کے برابر ہوگی

اس لئے دائرہ کا رقبہ = πr^2 = اسکے نصف قطر کے مربع کا π گنا

۲۴۰ــ قطاع دائرہ کا رقبہ

فرض کرو کہ ایک دائرہ کا مرکز و ہے اور قطاع دائرہ کی احاطہ کرنیوالی قوس اب ہے، فرض کرو کہ

$\angle$ ا و ب = عہ نیم قطری زاویوں کے

بحکم اقلیدس م۶ ش ۳۳، دائروں کے قطاع آپس میں وہی نسبت رکھتے ہیں جو ان کی قوسوں کو آپس میں ہے جن کہ وہ قائم ہیں

اسلئے $\frac{\text{قطاع ا و ب کا رقبہ}}{\text{کل دائرہ کا رقبہ}} = \frac{\text{قوس اب}}{\text{محیط دائرہ}}$

$= \frac{r\,\text{عہ}}{2\pi r} = \frac{\text{عہ}}{2\pi}$

$\therefore$ قطاع ا و ب کا رقبہ $= \frac{\text{عہ}}{2\pi} \times$ دائرہ کا رقبہ

$= \frac{\text{عہ}}{2\pi} \times \pi r^2 = \frac{1}{2} r^2\,\text{عہ}$

امثلہ نمبری ۴۱

[فرض کرو کہ π = ۳٫۱۴۱۵۹...... $\frac{1}{\pi}$ = ۳۱۸۳۱، ۰ اور لوگ π = ۴۹۷۱۵، ۰]

۱ــ ایک دائرہ کا محیط ۷۰ فٹ ہے، اس کا رقبہ دریافت کرو۔

۲ــ ایک دائرہ کا قطر ۱۰ فٹ ہے، اس کے ایسے قطاع کا رقبہ

دریافت کرو جس کا زاویہ $22\frac{1}{2}^\circ$ ہو۔

۳۔ ایک دائرہ کے قطاع کا رقبہ ۱۰ مربع فٹ ہے، اگر دائرہ کا نصف قطر ۳ فٹ ہو تو قطاع کا زاویہ دریافت کرو

۴۔ ایک قطاع دائرہ کے احاطہ کرنے والے خطوط کا کل طول ۱۰ فٹ ہے، اگر دائرہ کا نصف قطر ۳ فٹ ہو تو قطاع کا رقبہ دریافت کرو

۵۔ ایک کاغذ کا تختہ ۲ میل لمبا اور ۰۰۳ء انچ موٹا ایک ٹھوس اسطوانہ کی شکل میں لپٹا ہوا ہے، اس کے گول کناروں کے نصف قطر کی تقریبی قیمت دریافت کرو

۶۔ ایک کاغذ کا تختہ ایک میل لمبا ایک ٹھوس اسطوانہ کی شکل میں لپٹا ہوا ہے، اس کے گول کناروں کا قطر ۲ انچ ہے، کاغذ کی موٹائی دریافت کرو

۷۔ دو ہم مرکز دائروں کے نصف قطر ر اور ۲ر ہیں، اندرونی دائرہ کے دو متوازی مماس بیرونی دائرہ سے ایک قوس قطع کرتے ہیں، قوس کا طول دریافت کرو

۸۔ ایک نصف دائرہ کا محیط دو ایسی قوسوں میں تقسیم کیا گیا ہے کہ ایک کا وتر دوسرے کے وتر کا دو چند ہے، ثابت کرو کہ جو قطعات دائرہ ان وتروں کے کھینچنے سے پیدا ہوتے ہیں انکے رقبوں کو آپس میں نسبت ۲۷ اور ۵۵ کی ہے $[\pi = \frac{22}{7}]$

۹۔ تین مساوی دائرے ہیں، اگر ان میں سے ہر ایک باقی دو کو مس کرے اور ہر ایک کا نصف قطر ا ہو تو ثابت کرو

ان تینوں کے درمیان کا گھرا ہوا رقبہ $\frac{۴}{۲۵}$ ا^{۲} ہے۔

۱۰ــــ چھ مساوی دائرے ایک سطح مستوی پر اسطرح ترتیب دئے گئے ہیں کہ ان میں سے ہر ایک دائرہ دو اور دائروں کو مس کرتا ہے، اگر ان کے مرکز ایک اور دائرہ کے محیط پر واقع ہوں تو ثابت کرو کہ انکے درمیان کا گھرا ہوا رقبہ ۲ا^{۲} (۳ $\sqrt{۳}$ − π) ہے جہاں ا ہر ایک مساوی دائرہ کا نصف قطر ہے۔

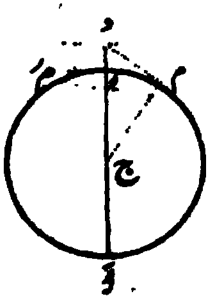
۱۱ــــ ایک مثلث کے راس ا سے ایک خط مستقیم اد کھینچا گیا ہے اور وہ قاعدہ سے ملکر زاویہ طہ بناتا ہے، ثابت کرو کہ مثلثات ا ب د اور ا ج د کے بیرونی دائروں کا مشترک رقبہ

= $\frac{1}{4}$ (بَ^{۲} جہ + جَ^{۲} بہ − بَ جَ جب ا) قم^{۲} طہ

جہاں زاویوں ا اور ب میں نیم قطری زاویوں کی تعداد بالترتیب بہ اور جہ، ہے۔

۱۴۲ــــ افق کا میلان

فرض کرو کہ ایک نقطہ و کی بلندی سطح زمین سے ب ہے، نقطہ و سے زمین پر کے مماس کھینچو جیسے و م اور و مَ، ان مماسوں کے سرے ایک دائرہ کے محیط پر واقع



ہوں گے اس دائرہ کو **افق مرئی** کہتے ہیں اور جو زاویہ ہر ایک مماس (مثلاً و م) سطح افقی ف و ق سے بناتا ہے اس کو افق کا **میلان** کہتے ہیں

فرض کروکہ زمین کا نصف قطر ر ہے اور جو زمین کا قطر نقطہ ا میں سے گذرتا ہے اس کا دوسرا سرا اَ ہے تب بموجب اقلیدم ۳ شں ۳۶

$$\text{و م}^2 = \text{و ا} \times \text{و اَ} = \text{ب} (\text{۲ر} + \text{ب})$$

یعنی $\text{و م} = \sqrt{\text{ب} (\text{۲ر} + \text{ب})}$

اس سے و م کی صحیح قیمت حاصل ہوتی ہے

مگر تمام علی صورتوں میں ب بمقابلہ ر کے بہت چھوٹا ہوتا ہے

[ر = ۴۰۰۰ میل تقریباً اور ب پانچ میل سے کبھی زیادہ نہیں ہوتا اور بالعموم اس سے بہت کم ہوتا ہے]

اسلئے ب^2 بمقابلہ ب ر کے بہت چھوٹا ہے

و م کی قیمت کا ایک اچھا تقرب یہ ہے

$$\text{و م} = \sqrt{\text{۲ب ر}}$$

میلان = ∠ م و ق = ۹۰° − ∠ ج و م = ∠ و ج م

نیز مس و ج م = $\frac{\text{و م}}{\text{ج م}} = \frac{\sqrt{\text{۲ب ر}}}{\text{ر}} = \sqrt{\frac{\text{۲ب}}{\text{ر}}}$

یعنی زاویۂ میلان کا ایک اچھا تقرب یہ ہوا

∠ و ج م = $\sqrt{\frac{\text{۲ب}}{\text{ر}}}$ نیم قطری زاوئے

$$\left(\sqrt{\frac{۲\text{ب}}{\text{ر}}}\times\frac{۱۸۰}{\pi}\right)^{\circ}=\left[\sqrt{\frac{۲\text{ب}}{\text{ر}}}\;\frac{۶۰\times۶۰\times۱۸۰}{\pi}\right]''$$

۲۴۲ — **مثال** — ایک روشنی گھر کی بلندی سطح سمندر سے ۲۶۴ فٹ ہے، اگر زمین کا نصف قطر ۴۰۰۰ میل ہو تو روشنی گھر کی چوٹی سے افق کا میلان اور افق مرئی کا فاصلہ دریافت کرو

یہاں ر = ۴۰۰۰ میل اور ب = ۲۶۴ فٹ = $\frac{۱}{۲۰}$ میل

اسلئے معلوم ہوا کہ ب بمقابلہ ر کے بہت چھوٹا ہے

یعنی وم = $\sqrt{\frac{۱}{۱۰}\times۴۰۰۰}=\sqrt{۴۰۰}$ = ۲۰ میل

تیر زاویہ میلان = $\sqrt{\frac{۲\text{ب}}{\text{ر}}}$ نیم قطری زاویے = $\frac{۱}{۲۰۰}$ نیم قطری زاویے

$$=\left(\frac{۶۰\times۱۸۰}{\pi}\times\frac{۱}{۲۰۰}\right)'$$

$$=\left(\frac{۵۴}{\pi}\right)'=۱۷'\ ۱۱''$$ تقریباً

امثلہ نمبری ۴۲

[اگر اسکے خلاف ذکر نہ ہو تو زمین کا نصف قطر ۴۰۰۰ میل فرض کیا جائے]

۱ — ایک پہاڑ کی بلندی ۴۲۰۰ فٹ ہے، اس کی چوٹی سے افق کا میلان انگریزی درجوں، دقیقوں اور ثانیوں میں دریافت کرو، زمین کا نصف قطر ۲۱×۱۰^{۶} فٹ ہے۔

۲ — ایک روشنی گھر کا چراغ سطح سمندر سے ۱۹۶ فٹ بلند ہے، بتاؤ کہ یہ زیادہ سے زیادہ کتنے فاصلہ سے دکھائی دے سکتا ہے۔

۳ — اگر زمین کا نصف قطر ۴۰۰۰ میل ہو تو ایک غبارہ کی بلندی دریافت کرو جبکہ افق کا میلان ۱° ہو۔ نیز اگر غبارہ کی

بلندی ۲ میل ہو تو افق کا میلان دریافت کرو۔

۴ ــــ ایک روشنی گھر کی بلندی سطح سمندر سے ۱۳۲ فٹ ہے اُس کی روشنی ایک جہاز کے مستول کی چوٹی سے جو سطح سمندر سے ۶۶ فٹ بلند ہے عین اُسوقت دکھائی دینے لگی جبکہ جہاز روشنی گھر سے ایک خاص فاصلہ پر تھا، ثابت کرو کہ یہ فاصلہ تقریباً ۲۴ میل ہے۔

۵ ــــ ایک جہاز کے مستول کی بلندی سطح سمندر سے ۶۶ فٹ ہے، اس کی چوٹی سے ایک اور جہاز کے مستول کی چوٹی عین ۲۰ میل کے فاصلہ سے دکھائی دینے لگی، ثابت کرو کہ مستولوں کی بلندیاں برابر ہیں۔

۶ ــــ ایک جہاز کا مستول سطح سمندر سے ۴۴ فٹ اونچا ہے، ایک روشنی گھر کی روشنی عین اسکی چوٹی سے دکھائی دیتی ہے، اس کے بعد جہاز ۱۵ منٹ کے لئے کسی خاص سمت میں جاتا ہے اور یہی روشنی تختہ جہاز کی بلندی سے جو سطح سمندر سے ۱۱ فٹ ہے دکھائی دینے لگتی ہے، ثابت کرو کہ جہاز کی رفتار تقریباً ۱۶٫۳۳ میل فی گھنٹہ ہے۔

۷ ــــ اگر کسی مشاہدہ کرنیکے مقام کی بلندی ن فٹ ہو تو ثابت کرو کہ وہاں کھڑے ہوکر ایک شخص کی نگاہ دور سے دور تقریباً $\sqrt{\frac{3n}{2}}$ میل دیکھ سکتی ہے۔

۸ ــــ زمین کے ایک ربع محیط میں ۱۰۰ لاکھ میتر شامل ہیں اگر ایفل برج کی چوٹی ۳۰۰ میتر اونچی ہو تو معلوم کرو کہ

زیادہ سے زیادہ کتنے فاصلہ سے وہ نظر آسکتی ہے۔
۹ — ایک سیدھی نہر کے کنارے ایک ایک میل کے فاصلہ پر تین عمودی کھمبے ہیں اور پانی کی سطح سے تینوں کی بلندیاں برابر ہیں، طرفین کے کھمبوں کی چوٹیوں کا خط نظری درمیانی کھمبے کو اسکی چوٹی کے ۸ انچ نیچے قطع کرتا ہے، زمین کا نصف قطر قریب ترین میل تک دریافت کرو۔

باب ہشتدہم

مقلوب و مستدیر جملے

۳۴۲ — اگر جب طہ = ا جہاں ا مقدار معلومہ ہے تو ہم دفعہ ۸۸ سے جانتے ہیں کہ طہ کی ایک معین قیمت نہیں ہو سکتی، اس مساوات سے صرف یہی معلوم ہوتا ہے کہ طہ کی قیمت زاویوں کے ایک غیر متناہی سلسلہ میں سے کسی ایک زاویہ سے تعبیر ہوتی ہے۔

علامت "جب$^{-1}$ ا" سے وہ چھوٹے سے چھوٹا مثبت یا منفی زاویہ تعبیر ہوتا ہے جسکی جیب ا ہو۔

علامت "جب$^{-1}$ ا" کو اس طرح پڑھتے ہیں کہ "جیب منفی ایک ا" اور اس کو بڑی احتیاط سے $\frac{1}{\text{جب ا}}$ سے تمیز کرنا چاہیئے، اگر ضرورت ہو تو $\frac{1}{\text{جب ا}}$ کو (جب ا)$^{-1}$ لکھنا چاہیئے۔

اس لئے بخوبی یاد رہے کہ "جب$^{-1}$ ا" ایک زاویہ ہے اور یہ علامت تعداداً ایک ایسے چھوٹے سے چھوٹے

زاوئے کو تعبیر کرتی ہے جس کی جیب ا ہے، اور جم$^{-1}$ ا سے بھی تعداداً وہ چھوٹے سے چھوٹا زاویہ تعبیر ہوگا جس کی جیب التمام ا ہے اور اسی طرح سے "مس$^{-1}$ ا" و "تم$^{-1}$ ا" و "قم$^{-1}$ ا" و "قط$^{-1}$ ا" و "سہ$^{-1}$ ا" و "سم$^{-1}$ ا" کی تعریف ہو سکتی ہے۔

لہٰذا زاوئے جب$^{-1}$ ا اور مس$^{-1}$ ا (اور اسلئے قم$^{-1}$ ا اور سم$^{-1}$ ا) ہمیشہ $-90°$ اور $+90°$ کے درمیان واقع ہوں گے لیکن جم$^{-1}$ ا (اور اسلئے قط$^{-1}$ ا) ہمیشہ ٠ اور ١٨٠° کے درمیان واقع ہوں گے

٢٤٤ — مقادیر جب$^{-1}$ ا، جم$^{-1}$ ا، مس$^{-1}$ ا،...... کو مقلوب و مستدیر جملے کہتے ہیں

علامت جب$^{-1}$ ا کو اکثر مصنفین نے "قوس جب ا" لکھا ہے اسی طرح سے "جم$^{-1}$ ا" کو "قوس جم ا" لکھ سکتے ہیں اور اسی طرح باقی مقلوب نسبتیں بھی لکھی جا سکتی ہیں۔

٢٤٥ — اگر ا مثبت ہو تو زاویہ جب$^{-1}$ ا صریحاً صفر اور ٩٠° کے درمیان واقع ہوگا۔ اور اگر ا منفی ہو تو یہ $-90°$ اور ٠° کے درمیان واقع ہوگا۔

مثال — جب$^{-1}$ $\frac{1}{2}$ = ٣٠°، جب$^{-1}$ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ = $-60°$

اگر ا مثبت ہو تو دو زاوئے ایسے ہوں گے (ان میں سے ایک ٠° اور ٩٠° کے درمیان واقع ہوگا اور دوسرا $-90°$ اور ٠°

کے درمیان) جن میں سے ہر ایک کی جیب التمام ا ہو گی
[مثلاً ۳۰° اور -۳۰° دونوں کی جیوب التمام $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہیں]
اس صورت میں ہم چھوٹے سے چھوٹا **مثبت** زاویہ لینگے، پس اگر ا مثبت ہو تو زاویہ جم$^{-1}$ ا بھی ۰° اور ۹۰° کے درمیان واقع ہوگا

اسی طرح سے اگر ا منفی ہو تو جم$^{-1}$ ا زوایا ۹۰° اور ۱۸۰° کے درمیان واقع ہوگا۔

مثال جم$^{-1}$ $\frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ$، جم$^{-1}$ $(-\frac{1}{2}) = 120^\circ$

اگر ا مثبت ہو تو مس$^{-1}$ ا ہمیشہ ۰° اور ۹۰° کے درمیان واقع ہوگا اور اگر ا منفی ہو تو یہ -۹۰° اور ۰° کے درمیان واقع ہوگا

مثال مس$^{-1}$ $\sqrt{3} = 60^\circ$، مس$^{-1}$ $(-1) = -45^\circ$

۲۴۶ — مثال۔ ثابت کرو کہ جب$^{-1}$ $\frac{3}{5}$ - جم$^{-1}$ $\frac{12}{13}$ = جب$^{-1}$ $\frac{16}{65}$

فرض کرو کہ جب$^{-1}$ $\frac{3}{5}$ = عہ یعنی جب عہ = $\frac{3}{5}$



اور اس لئے جم عہ = $\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

فرض کرو کہ جم$^{-1}$ $\frac{12}{13}$ = بہ یعنی جم بہ = $\frac{12}{13}$



اور اس لئے جب بہ = $\sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \frac{5}{13}$

فرض کرو کہ جب$^{-1}$ $\frac{16}{65}$ = جہ یعنی جب جہ = $\frac{16}{65}$

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ عہ - بہ = جہ

یعنی ثابت کرنا ہے کہ جب (عہ - بہ) = جب جہ

اب جب (عہ - بہ) = جب عہ جم بہ - جم عہ جب بہ

$= \frac{۳}{۵} \times \frac{۱۲}{۱۳} - \frac{۴}{۵} \times \frac{۵}{۱۳} = \frac{۳۶ - ۲۰}{۶۵} = \frac{۱۶}{۶۵} = \text{جب ج}$

اسلئے ربط ثابت ہوا

مثال ۲ — ثابت کروکہ $۲\,\text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۳} + \text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۷} = \frac{\pi}{۴}$

فرض کروکہ $\text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۳} = \text{ع}$ یعنی $\text{مس ع} = \frac{۱}{۳}$

اور فرض کروکہ $\text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۷} = \text{ب}$ یعنی $\text{مس ب} = \frac{۱}{۷}$

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $۲\text{ع} + \text{ب} = \frac{\pi}{۴}$

اب $\text{مس }۲\text{ع} = \frac{۲\,\text{مس ع}}{۱ - \text{مس}^۲\text{ع}} = \frac{\frac{۲}{۳}}{۱ - \frac{۱}{۹}} = \frac{۶}{۸} = \frac{۳}{۴}$

نیز $\text{مس}(۲\text{ع} + \text{ب}) = \frac{\text{مس }۲\text{ع} + \text{مس ب}}{۱ - \text{مس }۲\text{ع}\,\text{مس ب}}$

$= \frac{\frac{۳}{۴} + \frac{۱}{۷}}{۱ - \frac{۳}{۴} \times \frac{۱}{۷}} = \frac{۲۱ + ۴}{۲۸ - ۳} = \frac{۲۵}{۲۵} = ۱ = \text{مس}\frac{\pi}{۴}$

$\therefore ۲\text{ع} + \text{ب} = \frac{\pi}{۴}$

مثال ۳ — ثابت کروکہ $۴\,\text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۵} - \text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۲۳۹} = \frac{\pi}{۴}$

فرض کروکہ $\text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۵} = \text{ع}$ یعنی $\text{مس ع} = \frac{۱}{۵}$

تب $\text{مس }۲\text{ع} = \frac{۲\,\text{مس ع}}{۱ - \text{مس}^۲\text{ع}} = \frac{\frac{۲}{۵}}{۱ - \frac{۱}{۲۵}} = \frac{۵}{۱۲}$

اور $\text{مس }۴\text{ع} = \frac{\frac{۱۰}{۱۲}}{۱ - \frac{۲۵}{۱۴۴}} = \frac{۱۲۰}{۱۱۹}$

یعنی مس ۴ع تقریباً ایک کے برابر ہے اور اس لئے ۴ع تقریباً $\frac{\pi}{۴}$ ہے

فرض کروکہ $۴\text{ع} = \frac{\pi}{۴} + \text{مس}^{-۱}\text{لا}$

$\therefore \frac{۱۲۰}{۱۱۹} = \text{مس}\left(\frac{\pi}{۴} + \text{مس}^{-۱}\text{لا}\right) = \frac{۱ + \text{لا}}{۱ - \text{لا}}$ (دفعہ ۱۰۶)

$\therefore$ لا $= \frac{۱}{۲۳۹}$

اس لئے $۴\,\text{مس}^{-1}\frac{۱}{۵} - \text{مس}^{-1}\frac{۱}{۲۳۹} = \frac{\pi}{۴}$

مثال ۴ — ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^{-1}\text{ا} + \text{مس}^{-1}\text{ب} = \text{مس}^{-1}\frac{\text{ا}+\text{ب}}{۱-\text{اب}}$$

فرض کرو کہ $\text{مس}^{-1}\text{ا} = \text{عہ}$ یعنی $\text{مس عہ} = \text{ا}$

فرض کرو کہ $\text{مس}^{-1}\text{ب} = \text{بہ}$ یعنی $\text{مس بہ} = \text{ب}$

نیز فرض کرو کہ $\text{مس}^{-1}\left(\frac{\text{ا}+\text{ب}}{۱-\text{اب}}\right) = \text{جہ}$ یعنی $\text{مس جہ} = \frac{\text{ا}+\text{ب}}{۱-\text{اب}}$

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $\text{عہ} + \text{بہ} = \text{جہ}$

اب $\text{مس}(\text{عہ}+\text{بہ}) = \frac{\text{مس عہ}+\text{مس بہ}}{۱-\text{مس عہ مس بہ}} = \frac{\text{ا}+\text{ب}}{۱-\text{اب}} = \text{مس جہ}$

یعنی ربط ثابت ہوا

تعلق مندرجہ بالا میں صرف ضابطہ $\text{مس}(\text{لا}+\text{ما}) = \frac{\text{مس لا}+\text{مس ما}}{۱-\text{مس لا مس ما}}$ کو مقلوب طریق کتابت کے موافق بیان کیا گیا ہے۔

کیونکہ فرض کرو کہ $\text{مس لا} = \text{ا}$ یعنی $\text{لا} = \text{مس}^{-1}\text{ا}$

اور $\text{مس ما} = \text{ب}$ یعنی $\text{ما} = \text{مس}^{-1}\text{ب}$

تب $\text{مس}(\text{لا}+\text{ما}) = \frac{\text{ا}+\text{ب}}{۱-\text{اب}}$

$\therefore\ \text{لا}+\text{ما} = \text{مس}^{-1}\frac{\text{ا}+\text{ب}}{۱-\text{اب}}$

یعنی $\text{مس}^{-1}\text{ا} + \text{مس}^{-1}\text{ب} = \text{مس}^{-1}\frac{\text{ا}+\text{ب}}{۱-\text{اب}}$

مندرجہ بالا میں ہم نے فرض کر لیا ہے کہ $\text{اب} < ۱$ یعنی $\frac{\text{ا}+\text{ب}}{۱-\text{اب}}$ مثبت ہے

اور اسلئے $\text{مس}^{-1}\frac{\text{ا}+\text{ب}}{۱-\text{اب}}$ زاویہ ۰ اور °۹۰ کے درمیان واقع ہے

لیکن اگر $\text{اب} > ۱$ تو $\frac{\text{ا}+\text{ب}}{۱-\text{اب}}$ اور اس لئے بموجب ہا…

تعریف سے $\text{مس}^{-1}\dfrac{\text{ا}+\text{ب}}{1-\text{اب}}$ ایک منفی زاویہ ہے، اسلئے یہاں ج منفی زاویہ ہے اور چونکہ $\text{مس}\,(\pi+\text{ج}) = \text{مس ج}$ اسلئے ضابطہ مطلوبہ یہ ہونا چاہیئے

$$\text{مس}^{-1}\text{ا} + \text{مس}^{-1}\text{ب} = \pi + \text{مس}^{-1}\frac{\text{ا}+\text{ب}}{1-\text{اب}}$$

مثال ۵ — ثابت کرو کہ $\text{جم}^{-1}\frac{63}{65} + 2\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{5} = \text{جب}^{-1}\frac{3}{5}$

چونکہ $65^2 - 63^2 = 16^2$



اسلئے $\text{جم}^{-1}\frac{63}{65} = \text{مس}^{-1}\frac{16}{63}$

نیز بموجب مثال ۱، $\text{جب}^{-1}\frac{3}{5} = \text{مس}^{-1}\frac{3}{4}$

اسلئے ہمیں ثابت کرنا ہے کہ

$$\text{مس}^{-1}\frac{16}{63} + 2\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{5} = \text{مس}^{-1}\frac{3}{4}$$

اب $$\text{مس}\left[2\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{5}\right] = \frac{2\,\text{مس}\left[\text{مس}^{-1}\frac{1}{5}\right]}{1-\text{مس}^2\left[\text{مس}^{-1}\frac{1}{5}\right]}$$

$$= \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{5}{12}$$

یعنی $2\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{5} = \text{مس}^{-1}\frac{5}{12}$

پس $$\text{مس}\left[\text{مس}^{-1}\frac{16}{63} + 2\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{5}\right] = \text{مس}\left[\text{مس}^{-1}\frac{16}{63} + \text{مس}^{-1}\frac{5}{12}\right]$$

$$= \frac{\frac{5}{12}+\frac{16}{63}}{1-\frac{5}{12}\times\frac{16}{63}} = \frac{315+192}{756-80} = \frac{507}{676} = \frac{3}{4}$$

یعنی $\text{مس}^{-1}\frac{16}{63} + 2\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{5} = \text{مس}^{-1}\frac{3}{4}$

مثال ۶ — مساوات ذیل کو حل کرو

$$\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}+۱}{\text{لا}-۱}+\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}-۱}{\text{لا}}=\text{مس}^{-1}(-۷)$$

طرفین مساوات کے مماس لینے سے

$$\frac{\text{مس}\left[\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}+۱}{\text{لا}-۱}\right]+\text{مس}\left[\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}-۱}{\text{لا}}\right]}{۱-\text{مس}\left[\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}+۱}{\text{لا}-۱}\right]\text{مس}\left[\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}-۱}{\text{لا}}\right]}$$

$$=\text{مس}\left\{\text{مس}^{-1}(-۷)\right\}=-۷$$

یعنی
$$\frac{\frac{\text{لا}+۱}{\text{لا}-۱}+\frac{\text{لا}-۱}{\text{لا}}}{۱-\frac{\text{لا}+۱}{\text{لا}-۱}\times\frac{\text{لا}-۱}{\text{لا}}}=-۷$$

یعنی
$$\frac{۲\text{لا}^۲-\text{لا}+۱}{۱-\text{لا}}=-۷ \quad \text{یعنی لا}=۲$$

اگر اس قیمت کو مساوات میں مندرج کریں تو اسکے دائیں طرف کا رکن مثبت ہوتا ہے، اس سے معلوم ہوا کہ درحقیقت لا کی کوئی ایسی قیمت نہیں جو شرائط مساوات کو پورا کرے

قیمت لا = ۲ مساوات ذیل کو پورا کرتی ہے

$$\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}+۱}{\text{لا}-۱}+\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}-۱}{\text{لا}}=\pi+\text{مس}^{-1}(-۷)$$

امثلہ نمبری ۴۳

[طالب علم کو امثلہ ذیل (مثلاً ۱-۴، ۸، ۹، ۱۲، ۱۳) کے نتائج کی تصدیق عمل ترسیمی سے کرنی چاہئے]

ثابت کرو کہ

۱- $\text{جب}^{-1}\frac{۳}{۵}+\text{جب}^{-1}\frac{۸}{۱۷}=\text{جب}^{-1}\frac{۷۷}{۸۵}$

۲— $\text{جب}^{-۱}\frac{۵}{۱۳} + \text{جب}^{-۱}\frac{۷}{۲۵} = \text{جم}^{-۱}\left(\frac{۲۵۳}{۳۲۵}\right)$

۳— $\text{جم}^{-۱}\frac{۴}{۵} + \text{مس}^{-۱}\frac{۳}{۵} = \text{مس}^{-۱}\frac{۲۷}{۱۱}$

۴— $\text{جم}^{-۱}\frac{۴}{۵} + \text{جم}^{-۱}\frac{۱۲}{۱۳} = \text{جم}^{-۱}\frac{۳۳}{۶۵}$

۵— $\text{جم}^{-۱}\text{لا} = ۲\,\text{جب}^{-۱}\sqrt{\frac{۱-\text{لا}}{۲}} = ۲\,\text{جم}^{-۱}\sqrt{\frac{۱+\text{لا}}{۲}}$

۶— $۲\,\text{جم}^{-۱}\frac{۳}{\sqrt{۱۳}} + \text{مم}^{-۱}\frac{۱۶}{۶۳} + \frac{۱}{۲}\text{جم}^{-۱}\frac{۷}{۲۵} = \pi$

۷— $\text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۲} + \text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۳} = \text{جب}^{-۱}\frac{۱}{\sqrt{۵}} + \text{مم}^{-۱}۳ = ۴۵^\circ$

۸— $\text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۷} + \text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۱۳} = \text{مس}^{-۱}\frac{۲}{۹}$

۹— $\text{مس}^{-۱}\frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۲}\text{مس}^{-۱}\frac{۱۲}{۵}$

۱۰— $\text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۴} + \text{مس}^{-۱}\frac{۲}{۹} = \frac{۱}{۲}\text{جم}^{-۱}\frac{۳}{۵}$

۱۱— $۲\,\text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۵} + \text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۷} + ۲\,\text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۸} = \frac{\pi}{۴}$

۱۲— $\text{مس}^{-۱}\frac{۳}{۴} + \text{مس}^{-۱}\frac{۳}{۵} - \text{مس}^{-۱}\frac{۸}{۱۹} = \frac{\pi}{۴}$

۱۳— $\text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۳} + \text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۵} + \text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۷} + \text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۸} = \frac{\pi}{۴}$

۱۴— $۳\,\text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۴} + \text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۲۰} = \frac{\pi}{۴} - \text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۱۹۸۵}$

۱۵— $۴\,\text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۵} - \text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۷۰} + \text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۹۹} = \frac{\pi}{۴}$

۱۶— $\text{مس}^{-۱}\frac{۱۲۰}{۱۱۹} = ۲\,\text{جب}^{-۱}\frac{۵}{۱۳}$

۱۷— $\text{مس}^{-۱}\frac{\text{م}}{\text{ن}} - \text{مس}^{-۱}\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}} = \frac{\pi}{۴}$

۱۸— $\text{مس}^{-۱}\text{ط} + \text{مس}^{-۱}\frac{۲\text{ط}}{۱-\text{ط}^۲} = \text{مس}^{-۱}\frac{۳\text{ط}-\text{ط}^۳}{۱-۳\text{ط}^۲}$ جہاں ط مثبت ہے اگر $\text{ط} < \frac{۱}{\sqrt{۳}}$ یا $> \sqrt{۳}$، اور $= \pi + \text{مس}^{-۱}\frac{۳\text{ط}-\text{ط}^۳}{۱-۳\text{ط}^۲}$ اگر $\text{ط} > \frac{۱}{\sqrt{۳}}$ اور $< \sqrt{۳}$

۱۹— $\text{مس}^{-۱}\sqrt{\frac{\text{ا}(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})}{\text{ب}\,\text{ج}}} + \text{مس}^{-۱}\sqrt{\frac{\text{ب}(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})}{\text{ج}\,\text{ا}}}$

$$+\text{مس}^{-1}\sqrt{\frac{\text{ج}(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})}{\text{اب}}}=\pi$$

۲۰ — $\text{مم}^{-1}\frac{\text{اب}+1}{\text{ا}-\text{ب}}+\text{مم}^{-1}\frac{\text{ب ج}+1}{\text{ب}-\text{ج}}+\text{مم}^{-1}\frac{\text{ج ا}+1}{\text{ج}-\text{ا}}=0$

۲۱ — $\text{مس}^{-1}\text{ن}+\text{مم}^{-1}(\text{ن}+1)=\text{مس}^{-1}(\text{ن}^2+\text{ن}+1)$

۲۲ — $\text{جم}\left(2\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{7}\right)=\text{جب}\left(4\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{3}\right)$

۲۳ — $2\,\text{مس}^{-1}\left[\text{مس}(45^\circ-\text{عہ})\,\text{مس}\frac{\text{ب}}{2}\right]=\text{جم}^{-1}\left[\frac{\text{جب}\,2\text{عہ}+\text{جم ب}}{1+\text{جب}\,2\text{عہ}\,\text{جم ب}}\right]$

۲۴ — $\text{مس}^{-1}\text{لا}=2\,\text{مس}^{-1}\left[\text{قم}\,\text{مس}^{-1}\text{لا}-\text{مس}\,\text{مم}^{-1}\text{لا}\right]$

۲۵ — $2\,\text{مس}^{-1}\left[\text{مس}\frac{\text{عہ}}{2}\,\text{مس}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\text{ب}}{2}\right)\right]=\text{مس}^{-1}\frac{\text{جب عہ جم ب}}{\text{جب ب}+\text{جم عہ}}$

۲۶ — ثابت کرو کہ

$$\text{جم}^{-1}\sqrt{\frac{\text{ا}-\text{لا}}{\text{ا}-\text{ب}}}=\text{جب}^{-1}\sqrt{\frac{\text{لا}-\text{ب}}{\text{ا}-\text{ب}}}=\text{مم}^{-1}\sqrt{\frac{\text{ا}-\text{لا}}{\text{لا}-\text{ب}}}=\frac{1}{2}\,\text{جب}^{-1}\frac{2\sqrt{(\text{ا}-\text{لا})(\text{لا}-\text{ب})}}{\text{ا}-\text{ب}}$$

۲۷ — اگر $\text{جم}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}}+\text{جم}^{-1}\frac{\text{ما}}{\text{ب}}=\text{عہ}$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}-\frac{2\,\text{لا ما}}{\text{اب}}\,\text{جم عہ}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}=\text{جب}^2\text{عہ}$$

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

۲۸ — $\text{مس}^{-1}\frac{\sqrt{1+\text{لا}^2}-\sqrt{1-\text{لا}^2}}{\sqrt{1+\text{لا}^2}+\sqrt{1-\text{لا}^2}}=\text{ب}$

۲۹ — $\text{مس}^{-1}2\text{لا}+\text{مس}^{-1}3\text{لا}=\frac{\pi}{4}$

۳۰ — $\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}-1}{\text{لا}-2}+\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}+1}{\text{لا}+2}=\frac{\pi}{4}$

۳۱ — مس$^{-1}$(لا + ۱) + مم$^{-1}$(لا − ۱) = جب$^{-1}$ ۴/۵ + جم$^{-1}$ ۲/۵

۳۲ — مس$^{-1}$(لا + ۱) + مس$^{-1}$(لا − ۱) = مس$^{-1}$ ۸/۳۱

۳۳ — ۲ مس$^{-1}$(جم لا) = مس$^{-1}$(۲ قم لا)

۳۴ — مس$^{-1}$ لا + ۲ مم$^{-1}$ لا = ۲/۳ π

۳۵ — مس جم$^{-1}$ لا = جب مم$^{-1}$ ۱/۲

۳۶ — مم$^{-1}$ لا − مم$^{-1}$(لا + ۲) = ۱۵°

۳۷ — جم$^{-1}$ (۱ − لا²)/(۱ + لا²) + مس$^{-1}$ ۲لا/(۱ − لا²) = ۲π/۳

۳۸ — مم$^{-1}$ لا + مم$^{-1}$(ن² − لا + ۱) = مم$^{-1}$(ن − ۱)

۳۹ — جب$^{-1}$ لا + جب$^{-1}$ ۲لا = π/۳

۴۰ — جب$^{-1}$ ۵/لا + جب$^{-1}$ ۱۲/لا = π/۲

۴۱ — مس$^{-1}$ ا/لا + مس$^{-1}$ ب/لا + مس$^{-1}$ ج/لا + مس$^{-1}$ د/لا = π/۲

۴۲ — قط$^{-1}$ لا/ا − قط$^{-1}$ لا/ب = قط$^{-1}$ ب − قط$^{-1}$ ا

۴۳ — قم$^{-1}$ لا = قم$^{-1}$ ا + قم$^{-1}$ ب

۴۴ — ۲ مس$^{-1}$ لا = جم$^{-1}$ (۱ − ا²)/(۱ + ا²) − جم$^{-1}$ (۱ − ب²)/(۱ + ب²)

مفصلہ ذیل کی ترسیات کھینچو

۴۵ — جب$^{-1}$ لا [انتباہ اگر ما = جب$^{-1}$ لا تو لا = جب ما اور اس ترسیم کا و ما سے وہی تعلق ہے جو ترسیم دفعہ ۶۸ کا و لا سے ہے]

۴۶ — جم$^{-1}$ لا

۴۷ — مس$^{-1}$ لا

۴۸ — ہم$^{-1}$ لا

۴۹ — قم$^{-1}$ لا

۵۰ — قط$^{-1}$ لا

۵۱ — مس لا اور ۲ لا کی ترسیمات کھینچیے اور ان کے نقاط تقاطع دریافت کرنے سے ثابت کرو کہ مساوات مس$^{-1}$ ۲ لا = لا کے حل کی چھوٹی سے چھوٹی مثبت قیمت تقریباً ۶۷° کے قوسی ناپ کے برابر ہے۔

باب نوزدہم

چند آسان مثلثی سلسلوں کا بیان

۲۴۷ــــ اگر زاویوں کی کوئی تعداد سلسلہ حسابیہ میں ہو تو ان کی جیبوں کا حاصل جمع دریافت کرو

فرض کرو کہ زاوئے عہ، عہ + بہ، عہ + ۲بہ، ..... {عہ + (ن − ۱) بہ} ہیں

نیز فرض کرو کہ

ص = جب عہ + جب (عہ + بہ) + جب (عہ + ۲بہ) + ... + جب {عہ + (ن − ۱) بہ}

بموجب دفعہ ۱۰۳

۲ جب عہ جب بہ/۲ = جم (عہ − بہ/۲) − جم (عہ + بہ/۲)

۲ جب (عہ + بہ) جب بہ/۲ = جم (عہ + بہ/۲) − جم (عہ + ۳بہ/۲)

۲ جب (عہ + ۲بہ) جب بہ/۲ = جم (عہ + ۳بہ/۲) − جم (عہ + ۵بہ/۲)

....

۲ جب {عہ + (ن − ۲) بہ} جب بہ/۲ = جم {عہ + (ن − ۵/۲) بہ} − جم {عہ + (ن − ۳/۲) بہ}

۲ جب {عہ + (ن − ۱) بہ} جب بہ/۲ = جم {عہ + (ن − ۳/۲) بہ} − جم {عہ + (ن − ۱/۲) بہ}

ان ن سطرونکو اکٹھا جمع کرنے سے حاصل ہوگا

$$2\,\text{جب}\,\frac{\text{ب}}{2}\times\text{ص}=\text{جم}\left(\text{عہ}-\frac{\text{ب}}{2}\right)-\text{جم}\left\{\text{عہ}+\left(\text{ن}-\frac{1}{2}\right)\text{ب}\right\}$$

دائیں طرف کی باقی رقمیں ایک دوسرے کو ساقط کردیتی ہیں

اس لئے بموجب دفعہ ۱۰۰

$$2\,\text{جب}\,\frac{\text{ب}}{2}\times\text{ص}=2\,\text{جب}\left\{\text{عہ}+\left(\frac{\text{ن}-1}{2}\right)\text{ب}\right\}\text{جب}\,\frac{\text{ن}\,\text{ب}}{2}$$

یعنی

$$\text{ص}=\frac{\text{جب}\left\{\text{عہ}+\left(\frac{\text{ن}-1}{2}\right)\text{ب}\right\}\text{جب}\,\frac{\text{ن}\,\text{ب}}{2}}{\text{جب}\,\frac{\text{ب}}{2}}$$

مثال — فرض کرو کہ ب = ۲ عہ تب

$$\text{جب عہ}+\text{جب}\,3\,\text{عہ}+\text{جب}\,5\,\text{عہ}+\ldots\ldots+\text{جب}\,(2\text{ن}-1)\,\text{عہ}$$

$$=\frac{\text{جب}\{\text{عہ}+(\text{ن}-1)\,\text{عہ}\}\,\text{جب ن عہ}}{\text{جب عہ}}=\frac{\text{جب}^2\,\text{ن عہ}}{\text{جب عہ}}$$

۲۴۸ — اگر زاویوں کی کوئی تعداد سلسلہ حسابیہ میں ہو تو اُن کی جیوب التمام کا حاصل جمع دریافت کرو

فرض کرو کہ زاوئے عہ، عہ + ب، عہ + ۲ب، ..... عہ + (ن−۱) ب ہیں

نیز فرض کرو کہ

$$\text{ص}=\text{جم عہ}+\text{جم}(\text{عہ}+\text{ب})+\text{جم}(\text{عہ}+2\text{ب})+\ldots\ldots+\text{جم}\{\text{عہ}+(\text{ن}-1)\,\text{ب}\}$$

بموجب دفعہ ۱۰۳

$$2\,\text{جم عہ جب}\,\frac{\text{ب}}{2}=\text{جب}\left(\text{عہ}+\frac{\text{ب}}{2}\right)-\text{جب}\left(\text{عہ}-\frac{\text{ب}}{2}\right)$$

$$2\,\text{جم}(\text{عہ}+\text{ب})\,\text{جب}\,\frac{\text{ب}}{2}=\text{جب}\left(\text{عہ}+\frac{3\text{ب}}{2}\right)-\text{جب}\left(\text{عہ}+\frac{\text{ب}}{2}\right)$$

$$2\,\text{جم}(\text{عہ}+2\text{ب})\,\text{جب}\,\frac{\text{ب}}{2}=\text{جب}\left(\text{عہ}+\frac{5\text{ب}}{2}\right)-\text{جب}\left(\text{عہ}+\frac{3\text{ب}}{2}\right)$$

. . . .

۲جم{عہ+(ن-۲)بہ} جب $\frac{بہ}{۲}$ = جب{عہ+(ن-$\frac{۳}{۲}$)بہ} - جب{عہ+(ن-$\frac{۵}{۲}$)بہ}

اور ۲جم{عہ+(ن-۱)بہ} جب $\frac{بہ}{۲}$ = جب{عہ+(ن-$\frac{۱}{۲}$)بہ} - جب{عہ+(ن-$\frac{۳}{۲}$)بہ}

ان ن سطروں کو اکھٹا جمع کرنے سے حاصل ہوگا

۲ص × جب $\frac{بہ}{۲}$ = جب{عہ+(ن-$\frac{۱}{۲}$)بہ} - جب(عہ-$\frac{بہ}{۲}$)

بائیں طرف کی باقی رقمیں ایک دوسرے کو ساقط کردیتی ہیں

اسلئے بموجب دفعہ ۱۰۰

۲ص × جب $\frac{بہ}{۲}$ = ۲جم{عہ+$\frac{ن-۱}{۲}$بہ} جب $\frac{ن بہ}{۲}$

$$\text{یعنی ص} = \frac{\text{جم}\{\text{عہ}+\frac{ن-۱}{۲}\text{بہ}\}\ \text{جب}\ \frac{\text{ن بہ}}{۲}}{\text{جب}\ \frac{\text{بہ}}{۲}}$$

۲۴۹ ــــ دفعات ۲۴۷ اور ۲۴۸ میں ص کی قیمت دریافت کرنے کے دونوں جملے معدوم ہوتے ہیں اگر جب $\frac{ن بہ}{۲}$ صفر ہو، یعنی اگر زاویہ $\frac{ن بہ}{۲}$، π کے کسی ضعف کے برابر ہو۔

یعنی جب زاویہ $\frac{ن بہ}{۲}$ = ع π جہاں ع کوئی صحیح عدد ہے

یعنی جب زاویہ بہ = ع × $\frac{۲\pi}{ن}$

اس لئے ثابت ہوا کہ اگر ن زاوئے سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو انکی جیوب (یا جیوب التمام) کا مجموعہ معدوم ہوتا ہے اگر زاویوں کا فرق مشترک $\frac{۲\pi}{ن}$ کا کوئی ضعف ہو

– – – – –

اسئلہ جم عہ + جم (عہ + ۲π/ن) + جم (عہ + ۴π/ن) + ... ن رقموں تک = ۰

اور جب عہ + جب (عہ + ۴π/ن) + جب (عہ + ۸π/ن) + ... ن رقموں تک = ۰

۲۵۰ — سلسلہ جب عہ − جب (عہ + بہ) + جب (عہ + ۲بہ) − ... کو ن رقموں تک جمع کرو۔

بموجب دفعہ ۷۹

جب (عہ + بہ + π) = − جب (عہ + بہ)

جب (عہ + ۲بہ + ۲π) = جب (عہ + ۲بہ)

جب (عہ + ۳بہ + ۳π) = − جب (عہ + ۳بہ)

....

اسلئے سلسلہ = جب عہ + جب (عہ + بہ + π) + جب {عہ + ۲ (بہ + π)}

+ جب {عہ + ۳ (بہ + π)} + ...

= [جب {عہ + (ن−۱)/۲ (بہ + π)} جب ن(بہ + π)/۲] ÷ [جب (بہ + π)/۲] بموجب دفعہ ۲۴۷

= [جب {عہ + (ن−۱)/۲ (بہ + π)} جب ن(بہ + π)/۲] ÷ [جم بہ/۲]

مثال ۲ — سلسلہ جم³ عہ + جم³ ۲عہ + جم³ ۳عہ + ... کو ن رقموں تک جمع کرو۔

بموجب دفعہ ۱۱۳

جم ۳عہ = ۴ جم³ عہ − ۳ جم عہ

یعنی ۴ جم³ عہ = ۳ جم عہ + جم ۳عہ

اسی طرح سے ۴ جم^۳ ۲ عہ = ۳ جم ۲ عہ + جم ۶ عہ

۴ جم^۳ ۳ عہ = ۳ جم ۳ عہ + جم ۹ عہ

....

اس لئے اگر سلسلہ کا حاصل جمع ص ہو تو

۴ ص = (۳ جم عہ + جم ۳ عہ) + (۳ جم ۲ عہ + جم ۶ عہ) + (۳ جم ۳ عہ + جم ۹ عہ) + ...

= ۳ (جم عہ + جم ۲ عہ + جم ۳ عہ + ...) + (جم ۳ عہ + جم ۶ عہ + جم ۹ عہ + ...)

= ۳ (جم {عہ + (ن − ۱)/۲ × عہ} جب (ن عہ/۲)) / (جب عہ/۲) + (جم {۳ عہ + (ن − ۱)/۲ × ۳ عہ} جب (ن × ۳ عہ/۲)) / (جب ۳ عہ/۲)

= ۳ (جم (ن + ۱)/۲ عہ جب ن عہ/۲) / (جب عہ/۲) + (جم ۳(ن + ۱)/۲ عہ جب ۳ ن عہ/۲) / (جب ۳ عہ/۲)

اسی طرح سے اگر زاوئے سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو انکی جیبوں کے مکعبوں کا مجموعہ معلوم ہو سکتا ہے

نتیجہ صریح ــ چونکہ

۲ جب^۲ عہ = ۱ − جم ۲ عہ اور ۲ جم^۲ عہ = ۱ + جم ۲ عہ

اس لئے جیوب التمام کے مربعوں کا حاصل جمع دریافت ہو سکتا ہے

نیز چونکہ ۸ جب^۴ عہ = ۲ [۱ − جم ۲ عہ]^۲

= ۲ − ۴ جم ۲ عہ + ۲ جم^۲ ۲ عہ = ۳ − ۴ جم ۲ عہ + جم ۴ عہ

پس جیبوں کی چوتھی قوتوں کا مجموعہ حاصل ہو سکتا ہے اسی طرح سے جیوب التمام کی قوتوں کا مجموعہ بھی حاصل ہو سکتا ہے ۔

مثال ۳ ــ سلسلہ جم عہ جب بہ + جم ۲ عہ جب ۲ بہ + جم ۵ عہ جب ۳ بہ + ... کو ن رقموں تک جمع کرو ۔

فرض کرو کہ سلسلہ کا حاصل جمع ص ہے تب

۲ ص = {جب(عہ + بہ) − جب(عہ − بہ)} + {جب(۳ عہ + ۲ بہ) − جب(۳ عہ − ۲ بہ)}
+ {جب(۵ عہ + ۳ بہ) − جب(۵ عہ − ۳ بہ)} + ...

= {جب(عہ + بہ) + جب(۳ عہ + ۲ بہ) + جب(۵ عہ + ۳ بہ) + ...}
− {جب(عہ − بہ) + جب(۳ عہ − ۲ بہ) + جب(۵ عہ − ۳ بہ) + ...}

$$= \frac{\text{جب}\left\{(\text{عہ}+\text{بہ}) + \frac{\text{ن}-1}{2}(2\,\text{عہ}+\text{بہ})\right\}\ \text{جب ن}\ \frac{2\,\text{عہ}+\text{بہ}}{2}}{\text{جب}\ \frac{2\,\text{عہ}+\text{بہ}}{2}}$$

$$- \frac{\text{جب}\left\{(\text{عہ}-\text{بہ}) + \frac{\text{ن}-1}{2}(2\,\text{عہ}-\text{بہ})\right\}\ \text{جب ن}\ \frac{2\,\text{عہ}-\text{بہ}}{2}}{\text{جب}\ \frac{2\,\text{عہ}-\text{بہ}}{2}}$$ بموجب دفعہ ۲۸۷

$$= \frac{\text{جب}\left\{\text{ن عہ} + \frac{\text{ن}+1}{2}\,\text{بہ}\right\}\ \text{جب}\ \frac{\text{ن}(2\,\text{عہ}+\text{بہ})}{2}}{\text{جب}\ \frac{2\,\text{عہ}+\text{بہ}}{2}}$$

$$- \frac{\text{جب}\left\{\text{ن عہ} - \frac{\text{ن}+1}{2}\,\text{بہ}\right\}\ \text{جب}\ \frac{\text{ن}(2\,\text{عہ}-\text{بہ})}{2}}{\text{جب}\ \frac{2\,\text{عہ}-\text{بہ}}{2}}$$

مثال ۴ — ایک ن اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع $\text{ا}_1\text{ا}_2$ ...... $\text{ا}_\text{ن}$ ایک دائرہ کے اندر بنی ہوئی ہے، دائرہ کا مرکز و ہے اگر قوس $\text{ا}_1\text{ا}_2$ پر کوئی ایسا نقطہ ع لیا جائے کہ ع و ا_1 = طہ تو جو خطوط نقطہ ع کو کثیر الاضلاع کے رؤس الزوایا کے ساتھ وصل کرتے ہیں ان کے طولوں کا مجموعہ دریافت کرو

چونکہ زاویوں ا_1 و ا_2، ا_2 و ا_3، ...... $\text{ا}_\text{ن}$ و ا_1 میں سے ہر ایک $\frac{2\pi}{\text{ن}}$ کے برابر ہے، اسلئے زاویے ع و ا_1، ع و ا_2، ...... بالترتیب طہ، طہ + $\frac{2\pi}{\text{ن}}$، طہ + $\frac{4\pi}{\text{ن}}$، ...... ہیں

اس لئے اگر ر دائرہ کا نصف قطر ہو تو

ع ا۱ = ۲ ر جب (ع و ا۱)/۲ = ۲ ر جب ط/۲

ع ا۲ = ۲ ر جب (ع و ا۲)/۲ = ۲ ر جب (ط/۲ + π/ن)

ع ا۳ = ۲ ر جب (ع و ا۳)/۲ = ۲ ر جب (ط/۲ + ۲π/ن)

....

اسلئے مجموعۂ مطلوبہ = ۲ ر [جب ط/۲ + جب (ط/۲ + π/ن) + جب (ط/۲ + ۲π/ن) + ... ن رقموں تک]

= ۲ ر (جب [ط/۲ + (ن−۱)/۲ · π/ن] جب ن/۲ × π/ن) / (جب π/۲ن) (دفعہ ۲۸۷)

= ۲ ر قم π/۲ن × جب [π/۲ + ط/۲ − π/۲ن]

= ۲ ر قم π/۲ن جم (ط/۲ − π/۲ن)

امثلہ نمبری ۴۴

ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو

۱— جم ط + جم ۳ ط + جم ۵ ط + ... ن رقموں تک

۲— جم ا/۲ + جم ۲ ا + جم ۷ا/۲ + ... ن رقموں تک

ثابت کرو کہ

۳— (جب عہ + جب ۲ عہ + جب ۳ عہ + ... + جب ن عہ) / (جم عہ + جم ۲ عہ + ... + جم ن عہ) = مس (ن+۱)/۲ عہ

۴— (جب عہ + جب ۳ عہ + جب ۵ عہ + ... + جب (۲ن − ۱) عہ) / (جم عہ + جم ۳ عہ + جم ۵ عہ + ... + جم (۲ن − ۱) عہ) = مس ن عہ

۵ — $\dfrac{\text{جب عہ} - \text{جب}(\text{عہ}+\text{بہ}) + \text{جب}(\text{عہ}+2\,\text{بہ}) + \cdots\cdots \text{ن رقموں تک}}{\text{جم عہ} - \text{جم}(\text{عہ}+\text{بہ}) + \text{جم}(\text{عہ}+2\,\text{بہ}) + \cdots\cdots \text{ن رقموں تک}}$

$= \text{مس}\left\{\text{عہ} + \frac{\text{ن}-1}{2}(\pi + \text{بہ})\right\}$

ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو۔

۶ — $\text{جم}\,\frac{\pi}{2\text{ن}+1} + \text{جم}\,\frac{3\pi}{2\text{ن}+1} + \text{جم}\,\frac{5\pi}{2\text{ن}+1} + \cdots\cdots$ ن رقموں تک

۷ — $\text{جم عہ} - \text{جم}(\text{عہ}+\text{بہ}) + \text{جم}(\text{عہ}+2\,\text{بہ}) - \cdots\cdots$ ۲ن رقموں تک

۸ — $\text{جب ط} + \text{جب}\,\frac{\text{ن}-4}{\text{ن}-2}\,\text{ط} + \text{جب}\,\frac{\text{ن}-6}{\text{ن}-2}\,\text{ط} + \cdots\cdots$ ن رقموں تک

۹ — $\text{جم لا} + \text{جب 3 لا} + \text{جم 5 لا} + \text{جب 7 لا} + \cdots\cdots + \text{جب}(4\text{ن}-1)\,\text{لا}$

۱۰ — $\text{جب عہ جب 2 عہ} + \text{جب 2 عہ جب 3 عہ} + \text{جب 3 عہ جب 4 عہ} + \cdots\cdots$ ن رقموں تک

۱۱ — $\text{جم عہ جب 2 عہ} + \text{جب 2 عہ جم 3 عہ} + \text{جم 3 عہ جب 4 عہ}$
$+ \text{جب 4 عہ جم 5 عہ} + \cdots\cdots$ ۲ن رقموں تک

۱۲ — $\text{جب عہ جب 3 عہ} + \text{جب 2 عہ جب 4 عہ} + \text{جب 3 عہ جب 5 عہ} + \cdots\cdots$ ن رقموں تک

۱۳ — $\text{جم عہ جم بہ} + \text{جم 3 عہ جم 2 بہ} + \text{جم 5 عہ جم 3 بہ} + \cdots\cdots$ ن رقموں تک

۱۴ — $\text{جب}^2\,\text{عہ} + \text{جب}^2\,2\,\text{عہ} + \text{جب}^2\,3\,\text{عہ} + \cdots\cdots$ ن رقموں تک

۱۵ — $\text{جب}^2\,\text{ط} + \text{جب}^2(\text{ط}+\text{عہ}) + \text{جب}^2(\text{ط}+2\,\text{عہ}) + \cdots\cdots$ ن رقموں تک

۱۶ — $\text{جب}^3\,\text{عہ} + \text{جب}^3\,2\,\text{عہ} + \text{جب}^3\,3\,\text{عہ} + \cdots\cdots$ ن رقموں تک

۱۷ — $\text{جب}^4\,\text{عہ} + \text{جب}^4\,2\,\text{عہ} + \text{جب}^4\,3\,\text{عہ} + \cdots\cdots$ ن رقموں تک

۱۸ — $\text{جم}^4\,\text{عہ} + \text{جم}^4\,2\,\text{عہ} + \text{جم}^4\,3\,\text{عہ} + \cdots\cdots$ ن رقموں تک

۱۹ — $\text{جم ط جم 2 ط} + \text{جم 2 ط جم 3 ط} + \text{جم 3 ط جم 4 ط} + \cdots\cdots$ ن رقموں تک

۲۰ — $\text{جب عہ جب}(\text{عہ}+\text{بہ}) - \text{جب}(\text{عہ}+\text{بہ})\,\text{جب}(\text{عہ}+2\,\text{بہ}) + \cdots\cdots$ ۲ن رقموں تک

۲۱ — سلسلہ $\text{جب عہ} + \text{جب 2 عہ} + \text{جب 3 عہ} + \cdots\cdots$ ن رقموں تک

کے مجموعہ سے سلسلہ ۱ + ۲ + ۳ + ... + ن کا مجموعہ عہ کو نہایت قلیل بنانے سے حاصل کرو۔

۲۲— سلسلہ ۱ + ۳ + ۵ + ... کے ن رقموں کے مجموعہ کو مثال دفعہ ۲۴۷ کے نتیجہ سے حاصل کرو۔

۲۳— اگر عہ = ۲π/۱۷ تو ثابت کرو کہ

۲ (جم عہ + جم ۲ عہ + جم ۴ عہ + جم ۸ عہ) اور

۲ (جم ۳ عہ + جم ۵ عہ + جم ۶ عہ + جم ۷ عہ)

مساوات لا² + لا − ۴ = ۰ کی قیمتیں ہیں۔

۲۴— ایک ن اضلاع کی منتظم کثیرالاضلاع ا ب ج د.... ایک دائرہ کے اندر بنی ہوئی ہے، دائرہ کا مرکز و اور نصف قطر ر ہے، اگر کوئی نقطہ ع قوس ا ب پر ایسا لیا جائے کہ ع و ا = طہ تو ثابت کرو کہ

ع ا × ع ب + ع ا × ع ج + ع ا × ع د + ... + ع ب × ع ج + ...

= ر² [۲ جم² (طہ/۲ − π/۲ن) قم² π/۲ن − ن]

۲۵— ن اضلاع کی دو منتظم کثیر الاضلاع اشکال ہیں، ان میں سے ایک، دئے ہوئے دائرہ کے اندر اور دوسری باہر بنی ہوئی ہے، اگر ایک کثیر الاضلاع کے راس نزاویہ کو دوسری کثیر الاضلاع کے ہر ایک راس نزاویہ کے ساتھ خطوط کے ذریعہ وصل کر دیا جائے تو ثابت کرو کہ ان خطوط کے مربعوں کے مجموعہ کو اشکال کثیر الاضلاع کے رقبوں کے مجموعہ سے

نسبت ۲ : جب $\frac{۲\pi}{ن}$ ہوگی۔

۲۶ — ایک منتظم کثیر الاضلاع ایک دائرہ کے اندر بنی ہوئی ہے، اس کے زاویوں کے راس $ا_۱$، $ا_۲$، …… $ا_{۲ن+۱}$ ہیں اگر محیط دائرہ پر کوئی نقطہ و نقاط $ا_۱$ اور $ا_{۲ن+۱}$ کے درمیان ہو تو ثابت کرو کہ

$$و ا_۱ + و ا_۳ + \ldots\ldots + و ا_{۲ن+۱} = و ا_۲ + و ا_۴ + \ldots\ldots + و ا_{۲ن}$$

۲۷ — ایک ن اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع ایک دائرہ کے گرد بنی ہوئی ہے، دائرہ کا نصف قطر ر ہے اگر محیط دائرہ کے کسی نقطہ سے کثیر الاضلاع کے ضلعوں پر عمود نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{۲}{ن} \sum \left(\frac{ع}{ر}\right)^۲ = ۳ \quad \text{اور} \quad \frac{۲}{ن} \sum \left(\frac{ع}{ر}\right)^۳ = ۵$$

جہاں ع کوئی عمود ہے اور علامت $\sum$ = حاصل جمع اُن تمام رقموں کا جن کا عام نمونہ وہ رقم ہے جس کے پہلے یہ علامت لکھی ہوئی ہے۔

باب بستم

اسقاط

۲۵۱ — اگر ایک مقدار مجہول کی دو مساواتیں معلوم ہوں تو ضرور ہے کہ ان مساواتوں کی مستقل مقداروں میں کوئی ربط ہو تاکہ مقدار مجہول کی ایک ہی قیمت دونوں کی شرائط کو پورا کرے، مثلاً فرض کرو کہ ایک مقدار مجہول لا ذیل کی دو مساواتوں کی شرائط کو پورا کرتی ہے۔

$$\text{ا لا} + \text{ب} = 0 \quad \text{اور} \quad \text{ج لا}^2 + \text{د لا} + \text{ع} = 0$$

پہلی مساوات سے $\text{لا} = -\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$

اور لا کی اس قیمت سے دوسری مساوات کی شرائط بھی پوری ہونگی اگر

$$\text{ج}\left(-\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\right)^2 + \text{د}\left(-\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\right) + \text{ع} = 0$$

یعنی اگر $\text{ب}^2\text{ج} - \text{ا ب د} + \text{ا}^2\text{ع} = 0$

یہ مساوات دو مندرجہ بالا معادلات میں سے مقدار مجہول لا کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتی ہے اس لئے اس کو حاصل اسقاط کہتے ہیں۔

۲۵۲ — نیز فرض کرو کہ ایک زاویہ طہ شرائط معادلات جب^۲ طہ = ب اور جم^۲ طہ = ج کو پورا کرتا ہے

جب طہ = ب$^{\frac{۱}{۲}}$ اور جم طہ = ج$^{\frac{۱}{۲}}$

اب طہ کی تمام قیمتوں کے لئے

جب^۲ طہ + جم^۲ طہ = ۱، یعنی اس صورت میں

ب$^{\frac{۲}{۲}}$ + ج$^{\frac{۲}{۲}}$ = ۱

اور یہ مطلوبہ حاصل اسقاط ہے۔

۲۵۳ — جب ایک مقدار مجہول کی دو مساواتیں معلوم ہوں تو اصولاً ہم ان معادلات سے اُس مقدار کو ہمیشہ ساقط کر سکتے ہیں مگر عملی طور پر نہایت سادہ سوالات کے حل کرنے میں بھی ذہانت اور اور حکمت عملی کی ضرورت ہوتی ہے۔

اسی طرح سے اگر دو مقادیر مجہول کی تین مساواتیں دی ہوئی ہوں تو کم از کم نظری بحث میں ہم ان مقادیر مجہولہ کو ان معادلات سے ہمیشہ ساقط کر سکتے ہیں۔

۲۵۴ — اس جگہ ہم اسقاط کی چند مثالیں دینگے

مثال ۱ — معادلات ا جم طہ + ب جب طہ = ج

اور $\text{د جم طہ} + \text{ع جب طہ} = \text{ف}$

سے طہ کو ساقط کرو —

ضرب چلیپائی یا کسی اور طرح سے معادلات کو جم طہ اور جب طہ کے لئے حل کرو

$$\frac{\text{جم طہ}}{\text{ب ف} - \text{ج ع}} = \frac{\text{جب طہ}}{\text{ج د} - \text{ا ف}} = \frac{1}{\text{ب د} - \text{ا ع}}$$

$$\therefore 1 = \text{جم}^2\,\text{طہ} + \text{جب}^2\,\text{طہ} = \frac{(\text{ب ف} - \text{ج ع})^2 + (\text{ج د} - \text{ا ف})^2}{(\text{ب د} - \text{ا ع})^2}$$

یعنی $(\text{ب ف} - \text{ج ع})^2 + (\text{ج د} - \text{ا ف})^2 = (\text{ب د} - \text{ا ع})^2$

مثال ۲ — معادلات ذیل سے طہ کو ساقط کرو

$$\frac{\text{ا لا}}{\text{جم طہ}} - \frac{\text{ب ما}}{\text{جب طہ}} = \text{ا}^2 - \text{ب}^2 \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

اور

$$\frac{\text{ا لا جب طہ}}{\text{جم}^2\,\text{طہ}} + \frac{\text{ب ما جم طہ}}{\text{جب}^2\,\text{طہ}} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

مساوات (۲) سے $\text{ا لا جب}^3\,\text{طہ} = -\text{ب ما جم}^3\,\text{طہ}$

$$\therefore \frac{\text{جب طہ}}{-(\text{ب ما})^{\frac{1}{3}}} = \frac{\text{جم طہ}}{(\text{ا لا})^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{\text{جب}^2\,\text{طہ} + \text{جم}^2\,\text{طہ}}}{\sqrt{(\text{ا لا})^{\frac{2}{3}} + (\text{ب ما})^{\frac{2}{3}}}}$$

(دیکھو ٹوڈ ہنٹر اور لونی کا الجبرا مبتدیوں کیلئے دفعہ ۳۷۱)

$$= \frac{1}{\sqrt{(\text{ا لا})^{\frac{2}{3}} + (\text{ب ما})^{\frac{2}{3}}}}$$

اس لئے $\dfrac{1}{\text{جب ط}} = \dfrac{\sqrt{(\text{ب ما})^{\frac{2}{3}} + (\text{ا لا})^{\frac{2}{3}}}}{(\text{ب ما})^{\frac{1}{3}}}$

اور $\dfrac{1}{\text{جم ط}} = \dfrac{\sqrt{(\text{ب ما})^{\frac{2}{3}} + (\text{ا لا})^{\frac{2}{3}}}}{(\text{ا لا})^{\frac{1}{3}}}$

یعنی مساوات (۱) میں $\dfrac{1}{\text{جم ط}}$ اور $\dfrac{1}{\text{جب ط}}$ کی قیمتیں مندرج کرنے سے

$$\text{ا}^2 - \text{ب}^2 = \sqrt{(\text{ب ما})^{\frac{2}{3}} + (\text{ا لا})^{\frac{2}{3}}}\left[\text{ا لا} \times \frac{1}{(\text{ا لا})^{\frac{1}{3}}} - \text{ب ما}\left\{-\frac{1}{(\text{ب ما})^{\frac{1}{3}}}\right\}\right]$$

$$= \sqrt{(\text{ا لا})^{\frac{2}{3}} + (\text{ب ما})^{\frac{2}{3}}}\left\{(\text{ا لا})^{\frac{2}{3}} + (\text{ب ما})^{\frac{2}{3}}\right\}$$

$$= \left\{(\text{ا لا})^{\frac{2}{3}} + (\text{ب ما})^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}$$

یعنی $(\text{ا لا})^{\frac{2}{3}} + (\text{ب ما})^{\frac{2}{3}} = (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)^{\frac{2}{3}}$ .... (۳)

جو طالب ہندسہ تحلیلہ سے واقف ہے وہ فوراً پہچان لیگا کہ مساوات (۳) قطع ناقص کے عادوں کے متعلق ایک مشہور مسئلہ کا حل ہے۔

مثال ۳ — زاویہ ط کو معادلات ذیل سے ساقط کرو

$\dfrac{\text{لا}}{\text{ا}}$ جم ط $-$ $\dfrac{\text{ما}}{\text{ب}}$ جب ط $=$ جم ۲ط .... (۱)

اور $\dfrac{\text{لا}}{\text{ا}}$ جب ط $+$ $\dfrac{\text{ما}}{\text{ب}}$ جم ط $=$ ۲ جب ۲ط .... (۲)

مساوات (۱) کو جم ط سے اور (۲) کو جب ط سے ضرب دینے اور جمع کرنے سے حاصل ہوگا

لا/ا = جم ط . جم ۲ ط + جب ط جب ۲ ط

= جم ط . جب ط جب ۲ ط = جم³ ط + ۲ جب² ط جم ط .....(۳)

(۲) کو جم ط سے اور (۱) کو جب ط سے ضرب دو اور تفریق کرو ، تب

ما/ب = ۲ جب ۲ ط جم ط − جم ۲ ط جب ط

= جب ۲ ط جم ط − جب ط = جب ط + ۲ جب ط جم² ط .....(۴)

(۳) اور (۴) کو جمع کرنے سے

لا/ا + ما/ب = (جب ط + جم ط) [۱ + ۲ جب ط جم ط]

= (جب ط + جم ط) [جب² ط + جم² ط + ۲ جب ط جم ط]

= (جب ط + جم ط)³

پس جب ط + جم ط = (لا/ا + ما/ب)^⅓ ....(۵)

(۴) کو (۳) سے تفریق کرنے سے حاصل ہوگا

لا/ا − ما/ب = (جم ط − جب ط) (۱ − ۲ جب ط جم ط)

= (جم ط − جب ط)³

یعنی جم ط − جب ط = (لا/ا − ما/ب)^⅓ ....(۶)

معادلات (۵) اور (۶) کو دوسری قوت پر اٹھانے اور جمع کرنے سے

۲ = (لا/ا + ما/ب)^⅔ + (لا/ا − ما/ب)^⅔

امثلہ نمبری ۴۵

زاویہ طہ کو معادلات ذیل سے ساقط کرو

۱ — ا جم طہ + ب جب طہ = ج اور ب جم طہ - ا جب طہ = د

۲ — لا = ا جم (طہ - عہ) اور ما = ب جم (طہ - بہ)

۳ — ا جم ۲ طہ = ب جب طہ اور ج جب ۲ طہ = د جم طہ

۴ — ا جب عہ - ب جم عہ = ۲ ب جب طہ اور ا جب ۲ عہ - ب جم ۲ طہ = ا

۵ — لا جب طہ - ما جم طہ = √(لا^۲ + ما^۲) اور جب^۲ طہ / ا^۲ + جم^۲ طہ / ب^۲ = ۱ / (لا^۲ + ما^۲)

۶ — لا جم طہ / ا + ما جب طہ / ب = ۱

اور لا جب طہ - ما جم طہ = √(ا^۲ جب^۲ طہ + ب^۲ جم^۲ طہ)

۷ — جب طہ - جم طہ = ف

اور قم طہ - جب طہ = ق

۸ — لا = ا جم طہ + ب جم ۲ طہ اور ما = ا جب طہ + ب جب ۲ طہ

۹ — اگر م = قم طہ - جب طہ اور ن = قط طہ - جم طہ

تو ثابت کرو کہ م^(۲/۳) + ن^(۲/۳) = (م ن)^(-۲/۳)

۱۰ — ثابت کرو کہ معادلات

لا جم (طہ + عہ) + ما جب (طہ + عہ) = ا جب ۲ طہ

اور ما جم (طہ + عہ) - لا جب (طہ + عہ) = ۲ ا جم ۲ طہ

کا حاصل اسقاط (لا جم عہ + ما جب عہ)^(۲/۳) + (لا جب عہ - ما جم عہ)^(۲/۳) = (۲ا)^(۲/۳) ہے

طہ اور فہ کو معادلات ذیل سے ساقط کرو۔

۱۱ — جب ط + جب ف = د، جم ط + جم ف = ب، ط − ف = د

۱۲ — مس ط + مس ف = لا، مم ط + مم ف = ما، ط + ف = د

۱۳ — ا جم^2 ط + ب جب^2 ط = ج، ب جم^2 ف + ا جب^2 ف = د

اور ا مس ط = ب مس ف

۱۴ — جم ط + جم ف = ا، مم ط + مم ف = ب

اور قم ط + قم ف = ج

۱۵ — ا جب ط = ب جب ف، ا جم ط + ب جم ف = ج

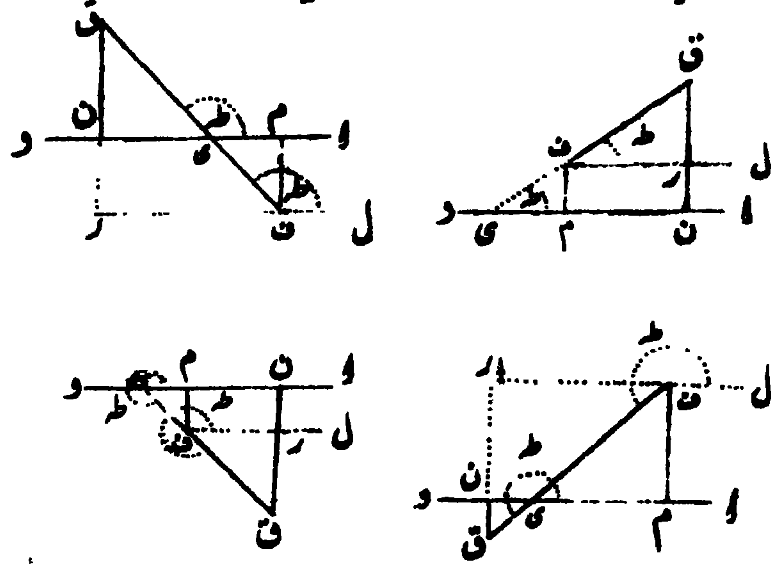
اور لا = ما مس (ط + ف)

۱۶ — $\frac{\text{لا}}{\text{د}}$ جم ط + $\frac{\text{ما}}{\text{ب}}$ جب ط = ۱، $\frac{\text{لا}}{\text{د}}$ جم ف + $\frac{\text{ما}}{\text{ب}}$ جب ف = ۱

اور د^2 جب $\frac{\text{ط}}{۲}$ جب $\frac{\text{ف}}{۲}$ + ب^2 جم $\frac{\text{ط}}{۲}$ جم $\frac{\text{ف}}{۲}$ = ج^2

باب بست ویکم
تظلیل

۲۵۵ — فرض کرو کہ ف ق ایک مستقیم خط ہے اور اس کے سروں ف اور ق سے ایک ثابت مستقیم خط و ا پر عمود نکالے گئے ہیں۔



خط و ا پر م ن کو ف ق کا ظِل یا تظلیل کہتے ہیں۔

اگر م ن کی سمت وہی ہو جو و ا کی ہے تو اس کو مثبت کہتے ہیں اور اگر مخالف ہو تو منفی۔

۲۵۶ ۔ اگر ایک مستقیم خط ف ق اور ثابت مستقیم خط و ا کا درمیانی زاویہ طہ ہو تو ثابت کرو کہ ف ق کا ظل و ا پر ف ق جم طہ کے برابر ہے۔

ف ق کی سمت خواہ کچھ ہی ہو نقطہ ف میں سے ایک مستقیم خط ف ل ، و ا کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ خط (جو بشرط ضرورت خارج کیا جا سکتا ہے) ق ن یا ق ن ممدودہ کو نقطہ ر پر ملتا ہے۔

تب ہر ایک شکل میں زاویہ ل ف ق یا زاویہ ا ی ق دونوں طہ کے برابر ہیں۔

نیز م ن = ف ر = ف ق جم ل ف ق = ف ق جم طہ بموجب تعریفات دفعہ ۵۶

اسی طرح سے ف ق کا ظل ایک ایسے خط پر جو و ا پر عمود ہو

= ر ق = ف ق جب ل ف ق

= ف ق جب طہ

اس لئے معلوم ہوا کہ خط ف ق کا ظل ایک ایسے خط پر جو ف ق سے زاویہ طہ بناتا ہو ف ق جم طہ ہے اور اس کا ظل ایک ایسے خط پر

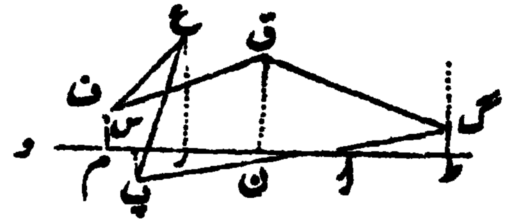
جو مذکورۂ بالا خط پر عمود ہو ف ق جب ط ہے۔

۲۵۷ — دفعہ ۵۶ میں جیب التمام کی تعریف ہم اس طرح کر سکتے تھے۔ اگر و ع کا ظل خط ابتدائی پر بنایا جائے تو جو نسبت اس ظل کو و ع سے ہو اسکو زاویہ ط کی جیب التمام کہتے ہیں جہاں ط، و ع اور ابتدائی خط کا درمیانی زاویہ ہے، اسی طرح سے اگر و ع کا ظل ایک ایسے خط پر بنایا جائے جو ابتدائی خط پر عمود ہو توجو نسبت اس ظل کو و ع سے ہو اس کو زاویہ ط کی جیب کہتے ہیں۔

جیب اور جیب التمام کی تعریفات پر اس نقطہ خیال سے دیکھنا بعض اوقات مفید ہوتا ہے

۲۵۸ — اگر ایک ثابت خط و ا پر ف ق کا ظل بنایا جائے تو ثابت کرو کہ یہ ظل ہر ایک ایسے شکستہ (یا غیر مستقیم) خط کے ظلوں کے مجموعہ کے برابر ہوگا جو ف سے شروع ہو اور ق پر ختم ہو

فرض کرو کہ ف ع ب گ ق ایک شکستہ خط ہے جو ف اور ق کو ملاتا ہے خط و ا پر عمود ف م، ق ن، ع ر، ب س اور گ ط نکالو۔



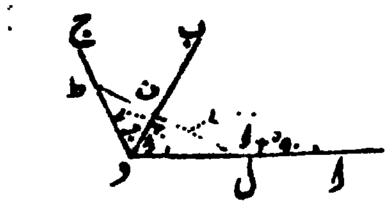
ف ع کا ظل م ر ہے اور مثبت ہے
ع پ کا ظل ر س ہے اور منفی ہے
ف گ کا ظل س ط ہے اور مثبت ہے
گ ق کا ظل ط ن ہے اور منفی ہے
شکستہ خط ف ع پ گ ق کے ظلّوں کا مجموعہ
= م ر + ر س + س ط + ط ن
= م ر − س ر + س ط − ن ط
= م س + س ن = م ن

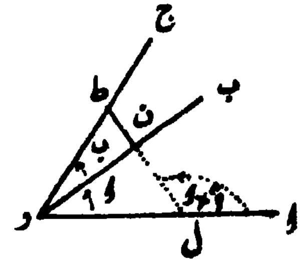
اسی قسم کا ثبوت تمام صورتوں پر حاوی ہوگا خواہ ف اور ق کہیں واقع ہوں اور شکستہ خط خواہ کتنے مختلف مستقیم خطوں کو ملانے سے بنا ہو۔

نتیجہ صریح۔ اگر کوئی شکستہ خط نقاط ف اور ق کو ملائے تو اس کے ظلوں کا مجموعہ اُن دونقطوں کو ملانے والے کسی اور شکستہ خط کے ظلوں کے مجموعہ کے برابر ہوگا کیونکہ ہر ایک صورت میں مجموعہ مذکورہ مستقیم خط ف ق کے ظل کے برابر ہوگا۔

۲۵۹ — زاویوں کے مسائل جمع تفریق کے ثبوت (بطریق تظلیلی)

فرض کروکہ ا و ب زاویہ ا سے اور ب و ج زاویہ ب سے تعبیر ہوتا ہے۔ زاویہ ا + ب کے احاطہ کرنے والے خط و ج پر کوئی نقطہ ط مقرر کرو اور و ب پر عمود ط ن نکالو اور اسکو اتنا خارج کروکہ و ا کو نقطہ ل پر ملے۔





تب ∠ ا ل ط = ∠ ل ن و + ∠ ا و ب = ۹۰ + ا

(۱) ثابت کرنا مطلوب ہے جم (ا + ب) = جم ا جم ب - جب ا جب ب

و ط × جم (ا + ب) = د ط جم ا و ط

= و ط کا ظل خط و ا پر (دفعہ ۲۵۶)

= و ن کا ظل و ا پر + ن ط کا ظل و ا پر (دفعہ ۲۵۸)

= و ن جم ا و ن + ن ط جم ا ل ط (دفعہ ۲۵۶)

= و ط جم ب جم ا + و ط جب ب جم (۹۰ + ا)

= و ط (جم ا جم ب - جب ا جب ب) (دفعہ ۷۶)

د ط پر تقسیم کرنے سے نتیجہ (۱) حاصل ہوگا

(۲) ثابت کرنا مطلوب ہے جب (ا+ب) = جب ا جم ب + جم ا جب ب

و ط × جب (ا+ب) = و ط × جب ا و ط

= و ط کا ظل ایک ایسے خط پر جو و ا پر عمود ہو (دفعہ ۲۵۶)

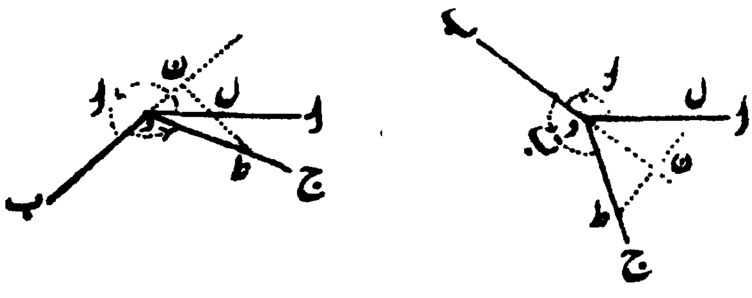
= و ن اور ن ط کے ظلوں کا مجموعہ ایک ایسے خط پر جو و ا پر عمود ہو (دفعہ ۲۵۸)

= و ن جب ا + ن ط جب ا ل ط (دفعہ ۲۵۶)

= و ط جم ب جب ا + و ط جب ب جب (۹۰° + ا) (دفعہ ۲۵۶)

= و ط [جب ا جم ب + جم ا جب ب] (دفعہ ۷۶)

جس سے نتیجہ (۲) حاصل ہوتا ہے

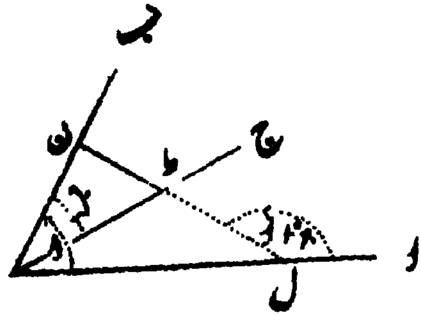


اِن شکلوں سے ظاہر ہے کہ اوپر کا ثبوت ہر حالت میں صحیح ہے خواہ احاطہ کرنیوالے خطوط و ب اور و ج کسی جگہ واقع ہوں۔

۲۶۰ — زاویوں کے مسئلہ تفریق کی صورت میں فرض کرو کہ ا و ب زاویہ ا ہے اور ب و ج

زاویہ ب ہے جو منفی سمت میں مرتسم کیا گیا ہے
یعنی ا و ج زاویہ ا-ب کے برابر ہے، نیز و ج
خط و ب سے ایک ایسا زاویہ بناتا ہے جس کے
پہلے اگر مناسب علامت لکھی جائے تو وہ -ب کے
برابر ہوتا ہے۔

زاویہ مجوزہ کے احاطہ کرنے والے خط
و ج پر کوئی نقطہ ط لو اور و ب پر عمود ط ن
نکالو اور اس کو اسقدر خارج کرو کہ وہ و ا کو نقطہ
ل پر ملے۔



ثابت کرنا مطلوب ہے کہ جم (ا-ب) = جم ا جم ب + جب ا جب ب

و ط جم (ا - ب) = و ط جم ا و ج

= و ط کا ظل و ا پر (دفعہ ۲۵۶)

= و ن کا ظل و ا پر + ن ط کا ظل و ا پر (دفعہ ۲۵۸)

= و ن جم ا + ن ط جم (۹۰° + ا) (دفعہ ۲۵۶)

= وط جم(-ب) جم ا + وط جب(-ب) جم(۹۰+ا) (دفعہ ۲۵۶)

= وط جم ب جم ا + وط(-جب ب)(-جب ا) (دفعات ۲۴۶ و ۲۴۷)

= وط [جم ا جم ب + جب ا جب ب]

اس لئے جم (ا - ب) = جم ا جم ب + جب ا جب ب

(۲) ثابت کرنا مطلوب ہے جب(ا-ب) = جب ا جم ب - جم ا جب ب

وط جب (ا - ب) = وط × جب ا و ج

= وط کا ظل ایک ایسے خط پر جو وا پر عمود ہو (دفعہ ۲۵۹)

= ون اور ن ط کے ظلوں کا مجموعہ ایک ایسے خط پر جو وا پر عمود ہو (دفعہ ۲۵۸)

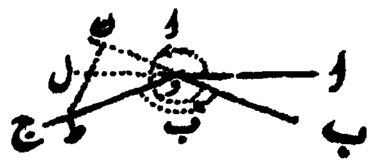
= ون جب ا + ن ط جب (۹۰+ا) (دفعہ ۲۵۶)

= وط جم (-ب) جب ا + وط جب(-ب) جب(۹۰+ا) (دفعہ ۲۵۶)

= وط جم ب جب ا - وط جب ب جم ا (دفعات ۲۴۷، اور ۲۴۸)

∴ جب (ا - ب) = جب ا جم ب - جم ا جب ب

اور یہ ثبوت ہر حالت میں درست ہیں خواہ احاطہ



کرنیوالے خطوط وب اور وج کسی جگہ پر واقع ہوں۔

متفرق مثالیں

۱— اگر ایک زاویہ ع دو ایسے حصوں میں تقسیم کیا جائے جن کے مماسوں کی نسبت ل ہو تو ثابت کرو کہ حصوں کا تفاوت لا مساوات جب لا = $\frac{\text{ل}-1}{\text{ل}+1}$ جب ع سے حاصل ہوگا۔

۲— اگر مس (π جم ط) = مم (π جب ط) تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم}\left(\text{ط} - \frac{\pi}{4}\right) = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

۳— کسی مثلث ا ب ج میں ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{اَ}-\text{بَ}}{\text{جَ}} = \frac{\text{مس}\frac{\text{ا}}{2} - \text{مس}\frac{\text{ب}}{2}}{\text{مس}\frac{\text{ا}}{2} + \text{مس}\frac{\text{ب}}{2}}$$

اور $$\frac{\text{اَ}-\text{بَ}}{\text{جَ}} = \frac{1 + \text{مس}\frac{\text{ا}}{2}\,\text{مس}\frac{\text{ب}}{2}}{1 - \text{مس}\frac{\text{ا}}{2}\,\text{مس}\frac{\text{ب}}{2}}$$

اس میں ا، ب، ج مثلث کے زاویے ہیں اور اَ، بَ، جَ مثلث کے اضلاع ہیں۔

۴— ایک ہوائی جہاز ۱۸۰ میل فی گھنٹہ کی مستقل رفتار سے زمین سے ایک مستقل بلندی پر مشرق کی طرف جا رہا تھا۔ کسی خاص وقت ایک شخص نے اُسکو ٹھیک اپنے شمال کی طرف دیکھا، اُس وقت اس کا زاویہ ارتفاع ۹° ۳۰′ تھا، اسکے ایک منٹ بعد اس نے جہاز کو ایسی سمت میں دیکھا جو شمال سے

مشرق کی طرف کو ۶۲° کا زاویہ بناتی تھی - جہاز کی بلندی دریافت کرو، نیز جہاز کا زاویہ ارتفاع اس وقت دریافت کرو جب مشاہدہ کرنے والے نے اس کو دوسرے مقام میں دیکھا -

۵- اگر ایک مثلث کے اضلاع ۵۱، ۳۵ اور ۲۶ فٹ ہوں تو ایک ایسے مثلث کے اضلاع دریافت کرو جس کا قاعدہ ۴۱ فٹ ہو اور جس کا رقبہ اور مجموعہ اضلاع وہی ہو جو پہلے مثلث کا ہے -

۶- ثابت کرو کہ

$$\text{جب مم}^{-1}\text{ جم مس}^{-1}\text{ لا} = \sqrt{\frac{\text{لا}^2 + 1}{\text{لا}^2 + 2}}$$

۷- زاویہ ط کو معاولات

$$\text{جب (ط + ع) = ا ، جم (ط + ب) = ب}$$

سے ساقط کرو

۸- ثابت کرو کہ خواہ زاویہ ط کوئی قیمت اختیار کرے جملہ

$$\text{ا جب}^2\text{ ط + ب جب ط جم ط + ج جم}^2\text{ ط}$$

ہمیشہ $\frac{\text{ا + ج}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\text{ب}^2 + (\text{ا} - \text{ج})^2}$ اور $\frac{\text{ا + ج}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\text{ب}^2 + (\text{ا} - \text{ج})^2}$ کے درمیان واقع ہوگا -

۹- اگر جب لا = ک جب (ا - لا)

تو ثابت کروکہ $\text{مس}\left(\text{لا} - \frac{\text{ا}}{۲}\right) = \frac{\text{ک} - ۱}{\text{ک} + ۱}\,\text{مس}\,\frac{\text{ا}}{۲}$

اور جدولوں کی مدد سے مساوات کو حل کرو جبکہ ک = ۳

اور ا = ۵۰°

۱۰ — $\text{مس ط} + \text{مس}\left(\text{ط} + \frac{\pi}{۳}\right) + \text{مس}\left(\text{ط} + \frac{۲\pi}{۳}\right)$ کو

مس ۳ ط کی رقوم میں بیان کرو

اسطرح سے یا کسی اور طرح سے مساوات ذیل کو حل کرو

$$\text{مس ط} + \text{مس}\left(\text{ط} + \frac{\pi}{۳}\right) + \text{مس}\left(\text{ط} + \frac{۲\pi}{۳}\right) = ۳$$

۱۱ — اگر کسی مثلث ا ب ج میں $\text{مس}\,\frac{\text{ا}}{۲}$، $\text{مس}\,\frac{\text{ب}}{۲}$ اور $\text{مس}\,\frac{\text{ج}}{۲}$
سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ جم ا، جم ب، جم ج
بھی سلسلہ حسابیہ میں ہوں گے

۱۲ — ایک شخص نے سمندر کے کنارے کھڑے ہوکر دو لنگروں کو ایک ہی سیدھ میں دیکھا، انکو ملانیوالا خط کنارے سے زاویہ عہ بناتا تھا، جب وہ سمندر کے کنارے فاصلہ ا چلا تو اس نے دیکھا کہ لنگروں کے محاذی اسکی آنکھ پر زاویہ عہ بنتا ہے، فاصلہ ب آگے جانے پر اس نے دیکھا کہ دوبارہ اسکی آنکھ پر زاویہ عہ بنتا ہے، ثابت کروکہ لنگروں کا درمیانی فاصلہ

$$\left(\text{ا} + \frac{\text{ب}}{۲}\right)\text{قط عہ} - \frac{۲\,\text{ا}(\text{ا}+\text{ب})}{\text{ا}^۲ + \text{ب}}\,\text{جم عہ}$$ ہے۔

اس سوال میں فرض کروکہ کنارہ سیدھا ہے اور سطح سمندر سے آنکھ کی اونچائی صفر ہے

۱۳۔ ایک مثلث ا ب ج کے زاویوں کے منصف اس کے بیرونی دائرہ کو نقاط د، ع، ف پر بالترتیب قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ مثلث د ع ف کے رقبہ کو نسبت ا ب ج کے رقبہ کے ساتھ س : ۲ ر ہے۔

۱۴۔ ایک منتظم مخمس کے متبادل زاویوں کو ملانے سے ایک اور منتظم مخمس پیدا ہوتی ہے، ان کے رقبوں کی باہمی نسبت دریافت کرو۔

۱۵۔ اگر ف = $\text{مس}^{-1}\dfrac{\text{لا}\sqrt{3}}{2\text{ک} - \text{لا}}$ اور ط = $\text{مس}^{-1}\dfrac{2\text{لا} - \text{ک}}{\text{ک}\sqrt{3}}$ تو ثابت کرو کہ ف ـ ط کی ایک قیمت ۳۰° ہے۔

۱۶۔ اگر $\text{م}^2 + \text{م}'^2 + 2\,\text{م}\,\text{م}'\,\text{جم}\,\text{ط} = 1$

$\text{ن}^2 + \text{ن}'^2 + 2\,\text{ن}\,\text{ن}'\,\text{جم}\,\text{ط} = 1$

اور $\text{م}\,\text{ن} + \text{م}'\text{ن}' + (\text{م}\,\text{ن}' + \text{م}'\text{ن})\,\text{جم}\,\text{ط} = 0$

تو ثابت کرو کہ $\text{م}^2 + \text{ن}^2 = \text{قم}^2\,\text{ط}$

۱۷۔ اگر لا کی قیمت حقیقی ہو تو ثابت کرو کہ

کسر $\dfrac{\text{لا}^2 - 2\text{لا}\,\text{جم}\,\text{ہ} + 1}{\text{لا}^2 - 2\text{لا}\,\text{جم}\,\text{بہ} + 1}$ بلحاظ مقدار کے $\dfrac{\text{جب}^2\frac{\text{ہ}}{2}}{\text{جب}^2\frac{\text{بہ}}{2}}$ اور $\dfrac{\text{جم}^2\frac{\text{ہ}}{2}}{\text{جم}^2\frac{\text{بہ}}{2}}$

کے درمیان واقع ہوگی ۔

۱۸۔ اگر ایک ن اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع کا مجموعۂ اضلاع ایک دائرہ کے محیط کے برابر ہو تو ثابت کرو کہ دائرہ کے رقبہ کو کثیر الاضلاع کے رقبہ کے ساتھ نسبت مس $\frac{\pi}{ن}$: $\frac{\pi}{ن}$ کی ہے ۔

۱۹۔ اگر $\frac{\text{جب}(۲ عہ - طہ)}{\text{جب طہ}} = ۱ + لا$ جہاں لا نہایت ہی قلیل ہے تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{جم طہ}}{\text{جم عہ}} = ۱ + \frac{۱}{۲}$ لا مس^۲ عہ تقریباً

۲۰۔ اگر ۲ صہ = عہ + بہ + جہ + لہ تو ثابت کرو کہ

جم (صہ − عہ) جم (صہ − بہ) جم (صہ − جہ) جم (صہ − لہ)

+ جب (صہ − عہ) جب (صہ − بہ) جب (صہ − جہ) جب (صہ − لہ)

= جم عہ جم بہ جم جہ جم لہ + جب عہ جب بہ جب جہ جب لہ

۲۱۔ معادلات ذیل کو مکمل طور پر حل کرو ۔

(۱) مس عہ مس (طہ − عہ) + مس بہ مس (طہ − بہ)

= مس $\frac{\text{بہ} - \text{عہ}}{۲}$ (مس عہ − مس بہ)

اور (۲) جب ۳ طہ = ۴ جب طہ جب ۲ طہ جب ۴ طہ

۲۲۔ ایک انکڑا (کرنیک) و ا طول میں ۲ فٹ، نقطہ و کے گرد گھوم سکتا ہے، ب کا رابط (سلاخ) ا ب ہے اور نقطہ ب ہمیشہ ایک ایسے خط مستقیم پر حرکت کرتا ہے جو نقطہ و میں سے گذرتا ہے، اگر ا ب کا طول ۵ فٹ ہو اور نقطہ ب اپنے انتہائی مقام سے کل مسافت کا $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۱}{۲}$ اور $\frac{۳}{۴}$ واں حصہ طے کر چکا ہو تو ہر ایک صورت

میں جو زاوئے اکڑا و ا خط و ب سے بنائے انکی قیمتیں دریافت کرو۔

۲۳۔ ایک ۲۰۰ فٹ بلند پہاڑ کی چوٹی سے دو جہاز سطح سمندر پر نظر پڑے، ایک کا زاویہ انخفاض ۹° ۱' تھا اور اسکی سمت، مشرق سے شمال کیطرف کو ۳۰° کا زاویہ بناتی تھی، دوسرے کا زاویہ انخفاض ۷° ۳۰' تھا اور اسکی سمت، مشرق سے جنوب کیطرف کو ۲۵° کا زاویہ بناتی تھی، جہازوں کا درمیانی فاصلہ دریافت کرو، نیز یہ بھی معلوم کرو کہ اگر کسی ایک جہاز پر کھڑے ہوکر دوسرے جہاز کی طرف دیکھا جائے تو اسکی جہت کیا ہوگی

۲۴۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز میں سے اور مثلث کے کسی دو جانبی دائروں کے مرکزوں میں سے جو دائرہ گزرتا ہے اس کا نصف قطر مثلث کے بیرونی دائرہ کے قطر کے برابر ہوتا ہے۔

۲۵۔ اگر $\text{مس}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\text{ما}}{2}\right)=\text{مس}^{3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\text{لا}}{2}\right)$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب ما} = \text{جب لا}\ \frac{3+\text{جب}^{2}\text{لا}}{1+3\,\text{جب}^{2}\text{لا}}$$

۲۶۔ ثابت کرو کہ

$\sum$ جب ب جب ج جم² ع جب (ب − ج) + دو متشابہ جملے

= − جب (بہ − جہ) جب (جہ − عہ) جب (عہ − بہ)

۲۷ — پرکار کی ہر ایک شاخ ۷ انچ لمبی ہے اور دونوں شاخوں کے نقطہ مشترک سے ۴ انچ کے فاصلے پر پنسل کی شاخ میں ایک جوڑ ہے، اگر پرکار کے ذریعہ ایک ۴ انچ نصف قطر کا دائرہ کھینچا جائے اور دائرہ کھینچتے وقت پنسلی شاخ کو جوڑ پر اسطرح ٹیڑھا کردیا جائے کہ پنسل کاغذ پر عمود وار ہو تو ثابت کرو کہ دونوں شاخوں کے زوایا میلان سمت راس کے ساتھ تقریباً ۱۹° ۵′ اور ۲۵° ۲۰′ ہونگے۔

۲۸ — ایک مثلث متساوی الاضلاع کھیت میں ایک برج ہے، مثلث کا ضلع ۸۰ فٹ ہے، برج کے محاذی کھیت کے تینوں کونوں پر جو زاوئے بنتے ہیں ان کے مماس بالترتیب $\sqrt{3}+1$ ، $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{2}$ ہیں، برج کی بلندی دریافت کرو۔

۲۹ — دو دائروں کے نصف قطر بالترتیب $ر_1$ اور $ر_2$ ہیں اور وہ ایک دوسرے کو زاویہ عہ پر قطع کرتے ہیں ثابت کرو کہ دائروں کا مشترک رقبہ

$$(ر_1^2 - ر_2^2)\ \text{مس}^{-1}\frac{ر_2\ \text{جب عہ}}{ر_1 + ر_2\ \text{جم عہ}} + ر_2^2\ \text{عہ} - ر_1 ر_2\ \text{جب عہ}$$ ہے

۳۰ — جملات ذیل کی قیمتیں دریافت کرو۔

$$\text{مس}^{-1}\frac{\sqrt{1+\text{لا}^2}-1}{\text{لا}}$$ اور

مس (½ جب^۱ ۲ل/(۱+ل^۲) + ½ جم^۱ (۱−م^۲)/(۱+م^۲))

۳۱ — عہ اور بہ کو معادلات ذیل سے ساقط کرو

جب عہ + جب بہ = ل

جم عہ + جم بہ = م

اور مس عہ/۲ مس بہ/۲ = ن

۳۲ — عمل ترسیمی سے دریافت کروکہ مساوات

ج^۲ مس لا = ا کی کتنی قیمتیں ۰ اور ۲π کے درمیان واقع ہوتی ہیں ؟

---

۳۳ — ثابت کروکہ

جم ۲ عہ = ۲ جب^۲ بہ + ۴ جم (عہ + بہ) جب عہ جب بہ + جم ۲ (عہ + بہ)

۳۴ — ثابت کروکہ جب π/۱۴ جب ۳π/۱۴ جب ۵π/۱۴ = ⅛

۳۵ — معادلات ذیل کو حل کرو۔

√۳ جب ۲ ا = جب ۲ ب

√۳ جب^۲ ا + جب^۲ ب = ½ (√۳ − ۱)

۳۶ — اگر کسی مثلث کے زاویوں کے مماس سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کروکہ ضلعوں کے مربعوں کی باہمی نسبتیں لا^۲ (لا^۲ + ۹) : (۳ + لا^۲)^۲ : ۹ (۱ + لا^۲) ہیں

جہاں لا بڑے سے بڑا یا چھوٹے سے چھوٹا مماس ہے۔

۳۷ — ایک خط مستقیم پر تین نقاط ا، ب، ج ایک ہی سطح افقی میں ہیں، اب = ۱۰۰ گز اور ب ج = ۱۵۰ گز، ایک غبارہ کے ارتفاعی زاوئے نقاط ا، ب، ج سے ایک ہی وقت میں عہ، بہ، جہ دیکھے گئے ہیں، ثابت کرو کہ غبارہ کی بلندی (ب) گزوں میں مساوات ذیل سے حاصل ہوتی ہے

ب²(۳ مم² عہ + ۲ مم² جہ − ۵ مم² بہ) = ۷۵۰۰۰

۳۸ — اگر کسی مثلث کے نقاط راس سے عمود ف، ق، ر ایک ایسے خط مستقیم پر کھینچے جائیں جو مثلث کے اضلاع ممدودہ کو د، ع، پ پر ملے تو ثابت کرو کہ

ا²(ف−ق)(ف−ر) + ب²(ق−ر)(ق−ف) + ج²(ر−ف)(ر−ق) = ۴ ∆² جہاں ∆ مثلث کا رقبہ ہے

نیز ثابت کرو کہ ع پ = ۲ ف ∆ ÷ (ف−ق)(ف−ر)

۳۹ — ایک ن اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع کے ضلع کا طول ۲ل ہے اور کثیر الاضلاع کا رقبہ ا ہے، اگر اسکے اندر بنے ہوئے اور گرد بنے ہوئے دائروں کے رقبے بالترتیب ا₁ اور ا₂ ہوں تو ثابت کرو کہ

ا₂ − ا₁ = π ل² اور ن ل² ا₁ = π ا²

۴۰ — ایک مثلث کے اضلاع ۳۱، ۵۶، ۶۴ ہیں، ثابت کروکہ اس کے ایک زاویہ اور زاویہ قائمہ کا فرق ایک دقیقہ سے کم ہے۔

---

۴۱ — ثابت کروکہ

$$\frac{\text{۱ + جب ا}}{\text{جم ا}} + \frac{\text{جم ب}}{\text{۱ − جب ب}} = \frac{\text{۲ جب ا − ۲ جب ب}}{\text{جب (ا − ب) + جم ا − جم ب}}$$

۴۲ — ثابت کروکہ

$$(\text{۱ + قط ۲ طہ})(\text{۱ + قط ۴ طہ})(\text{۱ + قط ۸ طہ}) \ldots\ldots (\text{۱ + قط } ۲^{ن} \text{ طہ})$$

$$= \text{مس } ۲^{ن} \text{ طہ} \times \text{مم طہ}$$

۴۳ — اگر ایک مثلث کے اضلاع سلسلہ حسابیہ میں ہوں اور اس کے سب سے بڑے اور سب سے چھوٹے زاویہ کا فرق عہ ہو تو ثابت کروکہ اضلاع کی باہمی نسبتیں

۱ − لا : ۱ : ۱ + لا ہیں جہاں $\text{لا} = \sqrt{\frac{\text{۱ − جم عہ}}{\text{۷ − جم عہ}}}$

۴۴ — ایک گول جھیل ا ب ج د کے کنارے پر ایک برج ہے، برج کا پائیں د ہے اور نقاط ا، ب، ج سے اس کی چوٹی کے ارتفاعی زاویے عہ، یہ، جہ مشاہدہ کئے گئے ہیں، اگر زاویوں ب ا ج اور ا ج ب میں سے ہر ایک طہ کے برابر ہو تو ثابت کروکہ

۲ جم طہ مم بہ = مم عہ + مم جہ

۴۵— ایک مثلث ا ب ج کے زاویوں کے داخلی منصّف اضلاع کو نقاط د، ع، ف پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ مثلث د ع ف کا رقبہ

$$\frac{\text{۲ } \Delta \text{ اَ بَ جَ}}{(\text{بَ} + \text{جَ})(\text{جَ} + \text{اَ})(\text{اَ} + \text{بَ})} \text{ ہے}$$

۴۶— اگر $\text{جم}^{-1}\text{ لا} + \text{جم}^{-1}\text{ ما} + \text{جم}^{-1}\text{ ی} = \pi$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} + \text{ی}^{2} + \text{۲ لا ما ی} = 1$$

۴۷— زاویہ طہ کو معادلات ذیل سے ساقط کرو

لہ جم ۲ طہ = جم (طہ + عہ)

اور لہ جب ۲ طہ = ۲ جب (طہ + عہ)

۴۸— ایک دائرہ کا قطر ۶ انچ ہے، اسکی ایک قوس اور قوس کے وتر کا مجموعہ ۸ انچ ہے، قوس کے محاذی دائرہ کے مرکز پر جو زاویہ بنے اس کے دریافت کرنے کے لئے ایک مساوات مرتب کرو اور مساوات کو ترسیمی عمل سے حل کرو۔

۴۹— مختصر کرو

$$\left\{\frac{\text{جم (عہ + بہ)}}{\text{جم (عہ − بہ)}} - \frac{\text{جم (عہ + جہ)}}{\text{جم (عہ − جہ)}}\right\}^{2} + \left[\frac{\text{جب (عہ + بہ)}}{\text{جم (عہ − بہ)}} - \frac{\text{جب (عہ + جہ)}}{\text{جم (عہ − جہ)}}\right]^{2}$$

۵۰ — ثابت کرو کہ

جب۲ ۱۲° + جب۲ ۲۱° + جب۲ ۳۹° + جب۲ ۴۸° = ۱ + جب۲ ۹° + جب۲ ۱۸°

۵۱ — ایک مثلث کے اضلاع اَ، بَ، جَ ہیں اس مثلث کے اندر ایک متشابہ مثلث بنایا گیا ہے جس کے اضلاع م اَ، م بَ، م جَ ہیں، اگر اضلاع اَ اور م اَ کا درمیانی زاویہ طہ ہو تو ثابت کرو کہ ۲ م جم طہ = ۱

۵۲ — ایک پہاڑ کی چوٹی کا دو مقامات ا اور ب سے جو ایک ہی سطح اُفقی میں واقع ہیں مشاہدہ کیا گیا ہے، مقام ا پہاڑی کے ٹھیک جنوب میں ہے اور ا سے مقام ب کی سمت، شمال مشرق ہے، اگر مقامات ا اور ب سے چوٹی کے ارتفاعی زاوئے ۹° ۳۰َ اور ۷° ۳۰َ ہوں تو پہاڑی سے مقام ب کی قطبی جہت دریافت کرو۔

۵۳ — ایک مثلث ا ب ج کے بیرونی دائرہ کا مرکز و ہے، دائرہ کے نقاط ب اور ج پر کے مماسِ نقطہ اَ پر ملتے ہیں، اگر زاویہ و ا اَ، طہ کے برابر ہو تو ثابت کرو کہ

۲ مس طہ = مم ب ~ مم ج

۵۴ — ہندسی عمل سے جم ($\frac{1}{3}$ جب$^{-1}$ ا) کی قیمتوں کی تعداد دریافت کرو، نیز ثابت کرو کہ ان کا حاصل ضرب $-\frac{1}{16}$(۱ − ا^2) ہے

۵۵ — ثابت کرو کہ جملہ $\frac{\text{مس}(لا + عہ)}{\text{مس}(لا - عہ)}$ کی قیمت

مسں۲ (π/۴ - عہ) اور مسں۲ (π/۴ + عہ) کے درمیان نہیں

واقع ہو سکتی۔

۵۶۔ ثابت کرو کہ

جم۲ طہ + جم۲ (طہ + π/ن) + جم۲ (طہ + ۲π/ن) + ... ن رقموں تک

= ۳ن/۸

۵۷۔ اگر {جب (عہ - بہ) + جم (عہ + ۲بہ) جب بہ}۲ = ۴ جم عہ جب بہ جب (عہ + بہ)

تو ثابت کرو کہ مس عہ = مس بہ { ۱/((۲ جم بہ - ۱)۲/۱) - ۱ } اس میں

عہ اور بہ میں سے ہر ایک زاویہ قائمہ سے کم ہے۔

۵۸۔ لا کی وہ سب قیمتیں دریافت کرو جو مساوات

ذیل کو پورا کریں

مس (لا + بہ) مس (لا + جہ) + مس (لا + جہ) مس (لا + عہ) + مس (لا + عہ) مس (لا + بہ) = ۱

۵۹۔ مثلث ا ب ج میں زاویہ ا سے ضلع ب ج پر جو عمود

نکالا جائے اس کا پائیں د ہے، اگر ب ج = ۱۱۷ فٹ،

∠ ب = ۳۰° ۱۴′ اور ∠ ج = ۶۱° ۲۷′ تو ا د کا

طول دریافت کرو

۶۰۔ ایک بنیادی خط پر تین نقاط ا، ب، ج سے ایک

پہاڑ کی چوٹی کے زوایا ارتفاع بالترتیب ع، ب، جہ مشاہدہ کئے گئے ہیں، ثابت کرو کہ پہاڑ کی بلندی

(-اب×بج×ج ا)^½ (ب ج مم² ع + ج ا مم² ب + اب مم² جہ)^-½ ہے، اس جملہ میں خطوں کے رخوں کی علامات کو ملحوظ رکھا گیا ہے۔

٦١ — اگر مثلث اب ج کے زاویہ ج کا منصّف ضلع اب کو د پر اور بیرونی دائرہ کو ع پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ

ج ع : د ع = (اَ + بَ)² : جَ²

جہاں اَ، بَ، جَ مثلث کے ضلعوں کے طول ہیں

٦٢ — طہ کو معادلات ذیل سے ساقط کرو

ا مس طہ + ب مم ٢ طہ = ج

اور ا مم طہ - ب مس ٢ طہ = ج

٦٣ — عمل ترسیمی سے صحیح طور پر نصف درجہ تک مساوات مم لا = جم ٢ لا کی تقریبی قیمت دریافت کرو

٦٤ — ایک شخص ایک ٹینس کورٹ کے قائم الزاویہ کونوں کو بنانے میں تین رسیاں استعمال کرتا ہے، ان کے طول بالترتیب ٣ گز، ٤ گز، ٤ گز ٢ فٹ ١٠ انچ ہیں۔ کورٹ کے زاویوں کی پیمائش میں جو غلطیاں اسطرح واقع ہوتی ہیں ان کی مقداریں دریافت کرو۔

۶۵— اگر $ن^{2}$ جب^{2}(عہ + بہ) = جب^{2} عہ + جب^{2} بہ − ۲ جب عہ جب بہ جم (عہ − بہ)

تو ثابت کرو کہ مس عہ = $\frac{۱ \pm ن}{۱ \mp ن}$ مس بہ

۶۶— اگر جملہ $\frac{\text{ا جم (طہ + عہ) + ب جب (طہ + بہ)}}{\text{اَ جب (طہ + عہ) + بَ جم (طہ + بہ)}}$ کی قیمت طہ کی تمام قیمتوں کے لئے ہمیشہ مستقل رہے تو ثابت کرو کہ

ااَ − ب بَ = (اَب − ابَ) جب (عہ − بہ)

۶۷— ثابت کرو کہ طہ کی وہ قیمتیں جو شرائط مساوات

جب ۲طہ جم^{2}(عہ − بہ) − جب ۲عہ جم^{2}(بہ + طہ) − جب ۲بہ جب^{2}(عہ + طہ) = ۰

کو پورا کرتی ہیں جملات (۲ن + ۱) $\frac{\pi}{2}$ − بہ اور ن π + عہ میں شامل ہیں جہاں ن کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

۶۸— مثلث اب ج کے وسطانیات ایک دوسرے سے زاویے عہ، بہ، جہ بناتے ہیں ثابت کرو کہ

مم عہ + مم بہ + مم جہ + مم ا + مم ب + مم ج = ۰

۶۹— ایک دریا کے کنارے دو مقامات کا باہمی فاصلہ ۲ا ہے، مقابل کے کنارے پر ایک برج ہے اور ہر دو مقامات سے برج کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع عہ ہے، ان مقامات کے عین وسط میں ایک مقام ہے اگر اس پر کھڑے ہو کر دیکھا جائے تو چوٹی کا زاویہ ارتفاع بہ دکھائی دیتا ہے، برج کی بلندی اور دریا کا عرض ا، عہ، بہ کی رقوم میں دریافت کرو۔

اگر ا = ۱۰۰ گز، عہ = ۴۲ ۱/۲° اور بہ = ۳۰° تو ثابت کرو کہ برج کی بلندی ۱۵۰√۲ ہے۔

۷۰۔ اگر ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے نقاط تماس اضلاع ب ج، ج ا، اب کے ساتھ بالترتیب د، ع، ف ہوں اور اگر اد، ب ع، ج ف کے مربعے سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو مثلث کے اضلاع سلسلہ موسیقیہ میں ہونگے۔

۷۱۔ ایک مثلث متساوی الاضلاع اور ایک منتظم مسبع دونوں ایک دائرہ کے اندر بنائے گئے ہیں، ثابت کرو کہ اگر مثلث کے نصف ضلع کے طول سے مسبع کے ایک ضلع کے طول کو نفی کردیں تو ماحصل دائرہ کے نصف قطر کے ۱/۵۰ ویں حصہ سے کم ہوگا۔

۷۲۔ ثابت کرو کہ مقدار جم طہ {جب طہ + √(جب² طہ + جب² عہ)} کی قیمت √(۱ + جب² عہ) اور − √(۱ + جب² عہ) کے درمیان واقع ہوگی

۷۳۔ ۸ جب عہ جب بہ جب جہ جب لہ کو آٹھ جیوب التمام کے سلسلے میں بیان کرو

۷۴۔ اگر جب² فہ = جم ۲عہ جم ۲بہ / جم² (عہ + بہ) تو ثابت کرو

کہ مس² فہ/۲ = مس(π/۴ ± عہ) / مس(π/۴ ± بہ)

۷۵ — ایک مثلث کا قاعدہ اَ، مقابل کا زاویہ ا اور باقی دو اضلاع کا حاصل ضرب ک^۲ دیا ہوا ہے، مثلث کو حل کرو اور ثابت کرو کہ ان اجزاء سے کوئی مثلث نہیں بن سکتا اگر اَ $<$ ۲ک جب $\frac{ا}{۲}$

۷۶ — پہاڑ کی ایک جانب میں دو نقاط ف اور ق ہیں، سطح اُفقی کے ایک نقطہ و سے ان نقاط کے ارتفاعی زاویے ۳۸° اور ۲۵° مشاہدہ کئے گئے ہیں، پہاڑ کے پائیں ا کا فاصلہ و سے ۵۰۰ گز ہے اور طول اق = ۳۲۰ گز، تمام شکل سطح عمودی میں واقع ہے، ثابت کرو کہ فاصلہ ف ق تقریباً ۳۲۹ گز ہے، پہاڑ کی سلامی (ڈھلان) دریافت کرو۔

۷۷ — مثلث ا ب ج کے جانبی دائروں کے مرکز $ے_ا$، $ے_ب$، $ے_ج$ ہیں اور مثلثات ب $ے_ا$ ج، ج $ے_ب$ ا اور ا $ے_ج$ ب کے اندرونی دائروں کے نصف قطر $ص_ا$، $ص_ب$، $ص_ج$ ہیں ثابت کرو کہ

$ص_ا : ص_ب : ص_ج = جب \frac{ا}{۲} : جب \frac{ب}{۲} : جب \frac{ج}{۲}$

۷۸ — دو دائروں کے نصف قطروں کا مجموعہ ا ہے، دائرے ایک سطح اُفقی میں اس طرح رکھے گئے ہیں کہ ان کے مرکزوں کا باہمی فاصلہ ۲ ا ہے، اگر رسی کے ایک حلقہ کو کس کر دائروں کے گرد اس طرح لپیٹ دیا جائے کہ وہ دائروں کے درمیان آٹھ کی شکل میں

آدمی گذرے تو ثابت کرو کہ رسی کا طول $(\frac{4\pi}{3}+2\sqrt{3})$ ا ہے۔

۷۹ — ثابت کرو کہ

$$2\,\text{مس}^{-1}\frac{\sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2}-\text{لا}+\text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^2-\text{ب}^2}}+\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}\sqrt{\text{ا}^2-\text{ب}^2}}{\text{ب}\sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2}+\text{ا}^2}$$

$$+\,\text{مس}^{-1}\frac{\sqrt{\text{ا}^2-\text{ب}^2}}{\text{ب}}=\text{ن}\,\pi$$

۸۰ — معلوم ہے کہ لا کی تقریبی قیمت ۲٫۴۵ شرائط مساوات ۳ جب لا = ۲ لا + ۳ کو پورا کرتی ہے، اس سے نزدیک تر تقرب دریافت کرو [فرض کرو کہ ۲٫۴۵ نیم قطری زاویے $= 140^\circ\ 22'\ 30''$]

---

۸۱ — ثابت کرو کہ

جب ا = جب $(36^\circ+\text{ا})$ − جب $(36^\circ-\text{ا})$ − جب $(72^\circ+\text{ا})$ + جب $(72^\circ-\text{ا})$

۸۲ — معادلات ذیل کا مکمل حل دریافت کرو

مس ۲ ط + مس ۳ فہ = ۲

اور مس ط + مس فہ = ۴

۸۳ — اگر کسی مثلث اب ج میں

جب^3 ط = جب (ا − ط) جب (ب − ط) جب (ج − ط)

تو ثابت کروکہ مم ظ = مم ا + مم ب + مم ج

۸۴— ایک جہاز ۱۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے ایک بندرگاہ ا کی طرف جارہا تھا، مقام ب سے جو ا کے ٹھیک مغرب کی طرف دس میل کے فاصلہ پر تھا جہاز کی جہت مشاہدہ کی گئی اور وہ مشرق سے شمال کی جانب میں ۲۴° کا زاویہ بناتی تھی، $\frac{۳}{۴}$ گھنٹہ کے بعد جہاز بندرگاہ میں پہنچ گیا، اول مشاہدہ کے وقت جہاز کا فاصلہ مقام ب سے دریافت کرو۔

۸۵— ثابت کروکہ مثلث اب ج کے جانبی دائروں کے مرکزوں کو ملانے سے جو مثلث بنتا ہے اس کے اندرونی دائرہ کا نصف قطر $\frac{\text{۴ر جم}\frac{ا}{۲}\text{جم}\frac{ب}{۲}\text{جم}\frac{ج}{۲}}{\text{جم}\frac{ا}{۲}+\text{جم}\frac{ب}{۲}+\text{جم}\frac{ج}{۲}}$ ہے۔

۸۶— ایک ن اضلاع کی کثیر الاضلاع ایک دائرہ کے اندر بنی ہوئی ہے اور اس کے اضلاع کے محاذی مرکز پر زاوئے ۲ عہ، ۴ عہ، ۶ عہ، .... ۲ ن عہ بنتے ہیں، ثابت کروکہ اسکے رقبے کو نسبت ایک ایسی ن اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع کے رقبہ کے ساتھ جو اسی دائرہ کے اندر بنی ہوئی ہو جب ن عہ : ن جب عہ ہے

۸۷— مساوات

$$\text{مم}^{-1}\frac{\text{ما}}{\sqrt{۱-\text{لا}^۲-\text{ما}^۲}} = ۲\,\text{مس}^{-1}\sqrt{\frac{۳-۴\text{لا}^۲}{۴\text{لا}^۲}} - \text{مس}^{-1}\sqrt{\frac{۳-۴\text{لا}^۲}{\text{لا}^۲}}$$

کو لا اور ما کی منطق صحیح مساوات کی شکل میں بیان کرو۔

۸۸۔ اگر لا۱ ، لا۲ ، لا۳ ، لا۴ مساوات

لا^۴ − لا^۳ جب ۲ به + لا^۲ جم ۲ به − لا جم به − جب به = ۰

کی قیمتیں ہوں تو ثابت کرو کہ

مس^{-۱} لا۱ + مس^{-۱} لا۲ + مس^{-۱} لا۳ + مس^{-۱} لا۴ = ن π + $\frac{\pi}{2}$ − به

جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے۔

۸۹۔ اگر (جب (ط − به) جم عه) / (جب (فه − عه) جم به) + (جم (عه + ط) جب به) / (جم (فه − به) جب عه) = ۰

اور (مس ط مس عه) / (مس فه مس به) + جم (عه − به) / جم (عه + به) = ۰

تو ثابت کرو کہ مس ط = $\frac{1}{2}$ (مس به + مم عه) اور مس فه = $\frac{1}{2}$ (مس عه − مم به)

۹۰۔ اگر جم ۳ لا = − $\frac{3}{8}$ $\sqrt{6}$ تو ثابت کرو کہ

جم لا کی تین قیمتیں $\frac{1}{2}$ $\sqrt{6}$ جب $\frac{\pi}{10}$ ، $\frac{1}{2}$ $\sqrt{6}$ جب $\frac{\pi}{4}$

اور − $\frac{1}{2}$ $\sqrt{6}$ جب $\frac{3\pi}{10}$ ہیں۔

۹۱۔ ایک مثلث کا قاعدہ ا اور اضلاع کی نسبت ب (< ۱) دی ہوئی ہے ثابت کرو کہ مثلث کا ارتفاع ف مقدار اب / (۱ − ب^۲) سے زیادہ نہیں ہو سکتا اور اگر ف کی یہ قیمت ہو تو مثلث کے زاویۂ راس کی قیمت $\frac{\pi}{2}$ − ۲ مس^{-۱} ب ہوگی۔

۹۲۔ ایک ریلوے لائن کی گولائی کی شکل ربع دائرہ کی ہے

اور اس کے دونوں سروں پر اور باقی محیط کے برابر برابر فاصلوں پر تار برقی کے کھمبے لگے ہوئے ہیں اور اسکی تعداد ن ہے، احاطہ کرنیوالے نصف قطر ممدودہ پر ایک شخص کھڑا ہوکر نزدیک کے سرے سے ف ویں اور ق ویں کھمبوں کو ایک خط مستقیم میں دیکھتا ہے ثابت کروکہ گولائی کا نصف قطر $\frac{1}{2}$ جم(ف + ق) فہ قم ف فہ قم ق فہ ہے جہاں فہ = $\frac{\pi}{۴(ن-۱)}$ ، اس میں ا نزدیک کے سرے سے اس شخص کے فاصلہ کو تعبیر کرتا ہے۔

۹۳ — ثابت کروکہ مثلث کے تین جانبی دائروں کے نصف قطر مساوات ذیل کی قیمتوں کے برابر ہیں

لا^3 − لا^2 (۴ر + ر) + لا ن^2 − ر ن^2 = ۰.

اس میں ن نصف مجموعۂ اضلاع کو تعبیر کرتا ہے۔

۹۴ — لا اور ما کو معادلات ذیل سے ساقط کرو

جم لا + جم ما = ا

جم ۲لا + جم ۲ما = ب

اور جم ۳لا + جم ۳ما = ج

حاصل اسقاط کو منطق شکل میں بیان کرو۔

۹۵ — سلسلہ ذیل کو ن رقموں تک جمع کرو

جب طہ جب ۲طہ جب ۳طہ + جب ۲طہ جب ۳طہ جب ۴طہ + جب ۳طہ جب ۴طہ جب ۵طہ + ...

۹۶ — ایک دائرہ کا نصف قطر ۵ انچ ہے اور اس کے

ایک قطعہ کا رقبہ ۲۵ مربع انچ ہے، قطعہ کی قوس کے محاذی دائرہ کے مرکز پر جو زاویہ بنتا ہے اس کو عمل ترسیمی سے دریافت کرو۔

---

۹۷ — ثابت کرو کہ ۴ جب ۲۷° = $(5 + \sqrt{5})^{\frac{1}{2}} - (3 - \sqrt{5})^{\frac{1}{2}}$

۹۸ — اگر جم (ب − ج) + جم (ج − ع) + جم (ع − ب) + ۱ = ۰
تو ثابت کرو کہ ب − ج، ج − ع یا ع − ب، π کے کسی ضعف کے برابر ہے۔

۹۹ — کسی مثلث کے زاویوں کی جیوب کا حاصل ضرب ف ہے اور جیوب التمام کا حاصل ضرب ق ہے، ثابت کرو کہ زاویوں کے مماس مساوات ذیل کی قیمتیں ہیں

ق لا³ − ف لا² + (۱ + ق) لا − ف = ۰

اگر ف = $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{3})$ اور ق = $\frac{1}{4}(\sqrt{3} - 1)$ تو ثابت کرو کہ مثلث کے زاویے ۴۵°، ۶۰° اور ۷۵° ہیں۔

۱۰۰ — ایک خاص مقام سے جہاز کی مختلف جہات کا مشاہدہ کیا گیا، کسی خاص وقت جہاز، سمت شمال سے مغرب کی طرف کو زاویہ ع بناتا تھا، اس کے دس منٹ بعد وہ ٹھیک شمال کی جانب میں تھا اور اس کے دس منٹ بعد جہاز کی سمت، جانب شمال

سے مشرق کی طرف کو زاویہ $\text{عہ}_۱$ بناتی تھی، اگر فرض کر لیا جائے کہ اس اثنا میں جہاز کی رفتار اور سمت حرکت میں کچھ فرق نہیں آتا تو ثابت کرو کہ اس کی سمت حرکت جانب شمال سے مشرق کی طرف کو زاویہ طہ بناتی ہے جہاں $\text{مس طہ} = \frac{\text{۲ جب عہ}_۱ \text{ جب عہ}_۲}{\text{جب}(\text{عہ}_۱ - \text{عہ}_۲)}$

۱۰۱۔ سطح ہموار پر ایک پہاڑی ہے اور اُس کی بیرونی شکل قطعہ کرہ کی سی ہے، سطح ہموار پر پہاڑی کا ڈھلان عہ ہے اور پائیں پہاڑ سے ا فٹ کے فاصلے پر ایک مقام ہے جس سے پہاڑ کے سب سے اونچے نقطے کا (جو دکھائی دیتا ہے) زاویہ ارتفاع بہ مشاہدہ کیا گیا ہے ثابت کرو کہ پہاڑ کی بلندی میدان کوہ سے $\frac{\text{ا جب بہ جب}^۲ \frac{\text{عہ}}{۲}}{\text{جب}^۲ \frac{\text{عہ} - \text{بہ}}{۲}}$ ہے۔

۱۰۲۔ اگر مثلث اب ج میں نقاط الزوایا ا، ب، ج سے مقابل کے اضلاع پر عمود نکالے جائیں اور ان کے پائین بالترتیب د، ع ف ہوں اور مثلثات د ع ف، ا ع ف، ب ف د اور ج د ع کے اندرونی دائروں کے نصف قطر صہ، $\text{صہ}_۱$، $\text{صہ}_۲$، $\text{صہ}_۳$ ہوں تو ثابت کرو کہ $\text{ر}^۲ \text{ صہ} = ۲\text{ س صہ}_۱ \text{ صہ}_۲ \text{ صہ}_۳$

۱۰۳۔ ایک گول کھیت کا مرکز و ہے اور اس کے محیط پر کوئی نقطہ ا ہے، ایک رسی کے ذریعہ ایک گھوڑا

نقطہ ا سے مربوط ہے اور کمیت کے $\frac{1}{\text{ن}}$ حصہ پر گھاس چر سکتا ہے، اگر محیط کا بعید ترین نقطہ جس تک گھوڑا پہنچ سکتا ہے ب ہو اور ∠ ا و ب = طہ تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب طہ} + (\pi - \text{طہ})\ \text{جم طہ} = \left(1 - \frac{1}{\text{ن}}\right)\pi$$

۱۰۴ — مساوات ذیل کو حل کرو

$$\text{طہ} = \text{مس}^{-1}(\text{۳ مس ۲ طہ}) - \frac{1}{2}\,\text{جب}^{-1}\frac{\text{۳ جب ۲ طہ}}{\text{۵ + ۴ جم ۲ طہ}}$$

۱۰۵ — اگر $\text{جم}^2\,\text{طہ} = \frac{\text{م}^2 - 1}{2}$ اور $\text{مس}^3\,\frac{\text{طہ}}{2} = \text{مس عہ}$

تو ثابت کرو کہ $\text{جم}^{\frac{2}{3}}\,\text{عہ} + \text{جب}^{\frac{2}{3}}\,\text{عہ} = \left(\frac{2}{\text{م}}\right)^{\frac{2}{3}}$

۱۰۶ — ایک شخص سطح اُفقی پر کسی خاص سمت میں فاصلہ ا چلتا ہے، اور اس کے بعد ایک اور سمت میں جو سمت سابقہ سے زاویہ عہ بناتی ہے فاصلہ ا جاتا ہے، ثابت کرو کہ ایک ہی رخ میں ن دفعہ ایسا کرنیکے بعد وہ اپنے نقطہ ابتدائی سے $\frac{\text{ا جب}\frac{\text{ن عہ}}{2}}{\text{جب}\frac{\text{عہ}}{2}}$ فاصلہ پر ہوگا۔ نیز ثابت کرو کہ جس خط سے یہ فاصلہ تعبیر ہوتا ہے وہ اس کی اصلی یا ابتدائی سمت سے زاویہ $(\text{ن} - 1)\frac{\text{عہ}}{2}$ بناتا ہے

۱۰۷ — ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{مس(عہ − لہ)}}{\text{مس(عہ − بہ)}} + \frac{\text{مس(لہ − جہ)}}{\text{مس(عہ − جہ)}} + \frac{\text{مس(بہ − جہ)}}{\text{مس(عہ − لہ)}} + \frac{-\text{مس(بہ − جہ) مس(جہ − لہ) مس(لہ − بہ)}}{\text{مس(عہ − بہ) مس(عہ − جہ) مس(عہ − لہ)}} =$$

۱۰۸— ایک شہاب ثاقب دو مقامات ا اور ب کے عین اوپر سے ایک خط مستقیم میں گزرتا ہے، مقامات سطح افقی میں ایک دوسرے سے ۱۰۰۰ فٹ کے فاصلہ پر واقع ہیں، جب وہ ا کے اوپر ہو تو نقطہ ب سے اس کا ارتفاع ۵۰° ہوتا ہے اور جب ب کے اوپر ہو تو نقطہ ا، سے اس کا ارتفاع ۴۰° ہوتا ہے، نقطہ ا سے اُس مقام کا فاصلہ قریب ترین فٹ تک دریافت کرو جہاں وہ سطح افقی پر جا کے گریگا۔

۱۰۹— ایک پہاڑ کے رُخ کا میلان سطح افقی کے ساتھ طہ ہے، پہاڑ کے پائیں پر دو نقاط ہیں جن سے دو سیدھے راستے دو عمودی سطحوں میں اوپر جاتے ہیں اور ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں، اگر دو شخص ان راستوں سے اوپر چڑھنا شروع کریں اور پائیں پہاڑ سے ا اور ب فٹ کے فاصلوں پر ایک دوسرے کو ملیں تو ثابت کرو کہ اُس وقت انکی عمودی بلندی (ف) سطح افقی سے، مساوات درجہ دوم

(۲ − جب^2 طہ) ف^4 − (ا^2 + ب^2) ف^2 + ا^{2}ب^2 جب^2 طہ = ۰

کی چھوٹی قیمت کے برابر ہے۔

۱۱۰— اگر مساوات مس (طہ + $\frac{\pi}{4}$) = ۳ مس ۳طہ کی قیمتیں عہ، بہ، حہ، لہ ہوں جن میں سے کسی دو کے مماس برابر نہوں تو ثابت کرو کہ

مس عہ + مس بہ + مس جہ + مس لہ = ۰

۱۱۱— اگر مساوات جب (طہ + عہ) = ک جب ۲ طہ کی قیمتیں طہ۱، طہ۲، طہ۳ ہوں جن میں سے کسی دو کا تفاوت ۲π یا ۲π کے کسی ضعف کے برابر نہ ہو تو ثابت کرو

طہ۱ + طہ۲ + طہ۳ + طہ۴ = (۲ن + ۱) π

۱۱۲— مسائل دفعہ ۲۴۹ کو تحلیلی عمل سے ثابت کرو

۱۱۳— متماثلات ذیل کو ثابت کرو

(۱) جب عہ + جب بہ + جب جہ − جب (عہ + بہ + جہ)

= ۴ جب $\frac{\text{بہ + جہ}}{۲}$ جب $\frac{\text{جہ + عہ}}{۲}$ جب $\frac{\text{عہ + بہ}}{۲}$

(۲) جم² عہ جب ۲ (بہ − جہ) + جم² بہ جب ۲ (جہ − عہ) + جم² جہ جب ۲ (عہ − بہ)

+ ۲ جب (بہ − جہ) جب (جہ − عہ) جب (عہ − بہ) = ۰

۱۱۴— ثابت کرو کہ مساوات قط طہ + قم طہ = ج کی دو قیمتیں ۰ اور ۲π کے درمیان واقع ہیں اگر ج² < ۸ اور چار قیمتیں اگر ج² > ۸

۱۱۵— اگر مثلث ا ب ج کے زاویوں کے خارجی منصّفوں کے تقاطع سے مثلث ا۱ ب۱ ج۱ بنے اور مثلث ا۱ ب۱ ج۱ کے خارجی منصّفوں کے تقاطع سے مثلث ا۲ ب۲ ج۲ بنے اور علیٰ ہٰذا القیاس تو ثابت کرو کہ اس طرح سے جو ن واں مثلث حاصل ہوگا اس کے زاویہ اںن کی قیمت $\frac{\pi}{۳}$ + $\left(\frac{-۱}{۲}\right)^{\text{ن}}$ (ا − $\frac{\pi}{۳}$) کے برابر ہوگی، نیز ثابت

کر کہ شیشوں کا میلان مساوی الاضلاع ہونے پر ف ہے

۱۱۶۔ کسی مقام ا سے ایک پہاڑ کی چوٹی ف ٹھیک شمال کی طرف واقع ہے اور اس کا زاویہ ارتفاع مقام ا سے عہ ہے، نقطہ ا سے د فٹ بلند ایک پہاڑی کی چوٹی ب ہے اور اس چوٹی سے ف کا زاویہ ارتفاع بہ ہے، اگر ب پر کھڑے ہوکر دیکھیں تو ا کی سمت جانب جنوب کے مغرب کے طرف کو زاویہ لہ بناتی ہے اور ف کی سمت مقام ا کے شمال کی طرف کو زاویہ جہ بناتی ہے، ثابت کرو کہ مقام ا سے چوٹی ف کی

بلندی $\frac{\text{د مس عہ جب جہ}}{\text{مس عہ جب جہ - مس بہ جب لہ}}$ ہے

۱۱۷۔ ایک شخص نے ایک پہاڑ کے پائیں پر کھڑے ہوکر ایک شئے کو جو آدھ میل کے فاصلہ پر تھی اسی سطح افقی میں مشاہدہ کیا جس میں کہ وہ خود تھا، اسکے بعد ۲۰۰ گز پہاڑ کے اوپر چڑھا اور اس نے دیکھا کہ اس شئے کا زاویہ انخفاض ۲° ۳۰َ ہے اور اس کی سمت اس کے نقطہ ابتدائی کی سمت کے ساتھ زاویہ ۷۵° کا بناتی ہے، جس راستے سے وہ پہاڑ پر چڑھتا ہے اس کا میلان افق کے ساتھ قریب ترین منٹ تک دریافت کرو

۱۱۸۔ اگر کسی مثلث کے اس جانبی دائرہ کے محاذی

جو ضلع ۲ر کو مس کرتا ہے اندرونی دائرہ کے مرکز پر زاویہ ۲ فہ اور باقی دو جانبی دائروں کے مرکزوں پہ زاویے ۲ فیہ اور ۲ فہٖ بنیں تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب فہ جب فیہ جب فہٖ} = \frac{ر^2}{16 س^2}$$

۱۱۹۔ ایک ن اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع کا ایک ضلع ایک ثابت مستقیم خط پر رکھا گیا ہے اور اس ضلع کے ایک سرے کے گرد شکل کو اتنا پھرایا گیا ہے کہ ساتھ کا ضلع خط مستقیم پہ منطبق ہوجاتا ہے اگر اسطرح کرنے سے شکل کو ایک پورا چکر دیا جائے تو ثابت کرو کہ کثیر الاضلاع کا کوئی راس زاویہ $\frac{4\pi}{ن}$ ر کا $\frac{\pi}{ن}$ م فاصلہ طے کرتا ہے جہاں ر اُس دائرہ کا نصف قطر ہے جو کثیر الاضلاع کے گرد بنایا جائے نیز ثابت کرو کہ دائروں کے جو قطاع کوئی راس زاویہ مرتسم کرتا ہے ان کے رقبوں کا مجموعہ ۲ π $ر^2$ ہے

۱۲۰۔ معادلات ذیل سے طہ اور فہ کو ساقط کرو

$$\frac{لا}{ا}\ \text{جم طہ} + \frac{ما}{ب}\ \text{جب طہ} = 1$$

$$\frac{لا}{ا}\ \text{جم فہ} + \frac{ما}{ب}\ \text{جب فہ} = 1$$

اور
$$\frac{\text{جم طہ جم فہ}}{ا^2} + \frac{\text{جب طہ جب فہ}}{ب^2} = 0$$

۱۲۱ — دفعہ ۲۳۳ میں جب مفروضہ کو ہم نے بطور علم متعارفہ کے مان لیا ہے اس کو بطریق ذیل ثابت کرو۔ ع اور عَ کے درمیان بہت سے نقطے ق₁، ق₂، ق₃ ...... لو اور ع ق₁، ق₁ ق₂، ق₂ ق₃ ...... کو اتنا خارج کرو کہ وہ م عَ کو نقاط ر₁، ر₂، ر₃ ...... پر ملیں اور اس کے بعد اس مسئلہ کو استعمال کرو کہ مثلث کے دو اضلاع کا مجموعہ تیسرے ضلع سے بڑا ہوتا ہے۔

اگر دو محدب شکستہ خطوط ا ع₁ ع₂ ...... عₙ ب

اور ا ق₁ ق₂ ...... قₙ ب ا

ایک ہی نقاط ا اور ب پر آکر ختم ہوں اور پہلا خط دوسرے کے بالکل باہر ہو تو ثابت کرو کہ پہلا خط دوسرے سے بڑا ہے

۱۲۲ — ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب}(\text{طہ}-\text{جہ}-\text{عہ})\,\text{جب}(\text{طہ}-\text{عہ}-\text{بہ})}{\text{جب}(\text{بہ}-\text{عہ})\,\text{جب}(\text{جہ}-\text{عہ})}+\frac{\text{جب}(\text{طہ}-\text{عہ}-\text{بہ})\,\text{جب}(\text{طہ}-\text{بہ}-\text{جہ})}{\text{جب}(\text{جہ}-\text{بہ})\,\text{جب}(\text{عہ}-\text{بہ})}+\frac{\text{جب}(\text{طہ}-\text{بہ}-\text{جہ})\,\text{جب}(\text{طہ}-\text{جہ}-\text{عہ})}{\text{جب}(\text{عہ}-\text{جہ})\,\text{جب}(\text{بہ}-\text{جہ})}=1$$

۱۲۳ — اگر $(\text{جب}^2\,\text{عہ}-\text{جب}^2\,\text{بہ})\,\text{مم}\,\text{جہ}+(\text{جب}^2\,\text{بہ}-\text{جب}^2\,\text{جہ})\,\text{مم}\,\text{عہ}+(\text{جب}^2\,\text{جہ}-\text{جب}^2\,\text{عہ})\,\text{مم}\,\text{بہ}=0$ تو ثابت کرو کہ یا تو دو زاویوں کا فرق π کے کسی ضعف کے برابر ہے یا تینوں زاویوں کا مجموعہ اس ضعف کے برابر ہے۔

۱۲۴ — سطح افقی پر ایک پہاڑی ہے، اس کا قاعدہ گول ہے اور اس کی بیرونی شکل قطعہ کرہ کی سی ہے، سطح افقی پر کے دو مقامات سے جن کے فاصلے قاعدہ سے ا اور ب فٹ ہیں پہاڑ کے اُس نقطہ کے ارتفاعی زاویے طہ اور فہ مشاہدہ کئے گئے ہیں جو سب سے اونچا دکھائی دیتا ہے، ثابت کرو کہ پہاڑی کی بلندی

$$۲\left[\frac{\left(\text{ب مم}\frac{\text{فہ}}{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}-\left(\text{ا مم}\frac{\text{طہ}}{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}}{\text{مم}\frac{\text{فہ}}{۲}-\text{مم}\frac{\text{طہ}}{۲}}\right]^{۲} \text{ ہے۔}$$

۱۲۵ — ایک برج کی چوٹی پر ایک نصف کروی گنبد ہے اور گنبد کے سر پر صلیب ہے، کسی نقطہ پر صلیب کا زاویہ ارتفاع عہ ہے اور گنبد کا بہ، گنبد کی سیدھ میں فاصلہ ا جانے پر صلیب گنبد کے عین اوپر دکھائی دیتا ہے اور اُس وقت گنبد کا زاویہ ارتفاع جہ ہے، ثابت کرو کہ سطح زمین سے گنبد کے مرکز کی بلندی

$$\frac{\text{ا جب جہ}}{\text{جب}(\text{جہ}-\text{عہ})}\times\frac{\text{جم عہ جب بہ}-\text{جب عہ جم جہ}}{\text{جم بہ}-\text{جم جہ}} \text{ ہے}$$

۱۲۶ — اگر $\text{جب}^{۲}\text{ا}+\text{جب}^{۲}\text{ب}+\text{جب}^{۲}\text{ج}=۱$ تو ثابت کرو کہ مثلث اب ج کا بیرونی دائرہ اس کے نونقطی دائرہ کو قائم الزاویہ پر قطع کرتا ہے۔

۱۲۷ — ایک دائرہ کا نصف قطر س ہے اور اسکے

محیط پر ایک ایسا نقطہ د ہے جس کو مرکز مانکر ایک اور دائرہ کھینچا گیا ہے اس دائرہ کا نصف قطر ۳ر/۲ ہے ۔ ان دائروں کے درمیان جو ہلال کی شکل بنتی ہے اس کے اندر ایک اور دائرہ رکھدیا گیا ہے جس کا نصف قطر ر/۸ ہے ثابت کرو کہ اگر چھوٹا دائرہ اصلی دائرہ (نصف قطر ر) کے محیط پر حرکت کرے تو اس کا مرکز ایک انتہائی مقام سے دوسرے انتہائی مقام تک حرکت کرنے میں ایک ایسی قوس مرتسم کرے گا جس کا طول ۵/۱۲ π ر ہوگا۔

۱۲۸ — معادلات ذیل سے لا اور ما کو ساقط کرو

جب لا + جب ما = ا

جم لا + جم ما = ب

اور مس لا + مس ما = ج

۱۲۹ — اگر ۲ جم ن طہ کو صن سے تعبیر کریں تو ثابت کرو کہ

$ص_{ن+۱} = ص_۱ ص_ن - ص_{ن-۱}$

اسلئے ثابت کرو کہ

$۲ جم ۷ طہ = ص_۱^۷ - ۷ ص_۱^۵ + ۱۴ ص_۱^۳ - ۷ ص_۱$

۱۳۰ — عمل ترتیبی سے ثابت کرو کہ ۴٫۷ ، مساوات جم لا = لا (جہاں لا کی پیمائش نیم قطری زاویوں میں کیگئی ہے) کا تقریبی حل ہے نیز ثابت کرو کہ مساوات کی صرف یہی حقیقی قیمت ہے ۔

۱۳۱ — ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب}\,(\text{لا}-\text{بہ})\,\text{جب}\,(\text{لا}-\text{جہ})}{\text{جب}\,(\text{عہ}-\text{بہ})\,\text{جب}\,(\text{عہ}-\text{جہ})}\ \text{جب}\ 2\ (\text{لا}-\text{عہ}) + \text{دو متشابہ جملے} = 0$$

۱۳۲ — اگر ا ب ج کوئی مثلث ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب}^3\text{ا جم}(\text{ب}-\text{ج}) + \text{جب}^3\text{ب جم}(\text{ج}-\text{ا}) + \text{جب}^3\text{ج جم}(\text{ا}-\text{ب})$$
$$= 3\ \text{جب ا جب ب جب ج}$$

۱۳۳ — ایک شخص نے دو اشیا کو ٹھیک سمت مغرب میں دیکھا، اس کے بعد وہ فاصلہ ج شمال کی طرف چلا اور اُس نے اشیا کے محاذی زاویہ عہ دیکھا، شمال کی جانب میں اور فاصلہ ج جانے پر اُس نے اشیا کے محاذی زاویہ بہ مشاہدہ کیا، ثابت کرو کہ اشیا کا درمیانی فاصلہ $\frac{3\,\text{ج}}{2\,\text{تم بہ}-\text{تم عہ}}$ ہے۔

۱۳۴ — ایک پہاڑی کا پہلو مسطح ہے اور افق سے زاویہ عہ بناتا ہے، اُس پہ سطح عمودی میں ایک سڑک جاتی ہے جو اُس سطح عمودی سے جو خط میلان اعظم میں سے گذرتی ہے زاویہ بہ بناتی ہے، ثابت کرو کہ سڑک کا میلان افق سے $\text{مس}^{-1}(\text{مس عہ جم بہ})$ ہے۔

۱۳۵ — ثابت کرو کہ مثلث ا ب ج کے اندرونی اور بیرونی دائروں کے مرکزوں کو ملانے والا خط، ضلع ب ج سے زاویہ $\text{مس}^{-1}\left(\frac{\text{جم ب}+\text{جم ج}-1}{\text{جب ب}-\text{جب ج}}\right)$ بناتا ہے۔

۱۳۶ــ معادلات ذیل سے طہ کو ساقط کرو

لا جب طہ ــ ما جم طہ = ــ جب ۴ طہ

اور لا جم طہ + ما جب طہ = $\frac{۵}{۲}$ ــ $\frac{۳}{۲}$ جم ۴ طہ

۱۳۷ــ ایک منتظم کثیر الاضلاع دائرہ کے اندر بنائی گئی ہے اگر کسی نقطہ کو (جو ضروری نہیں کہ شکل کے سطح میں واقع ہو) کثیر الاضلاع کے کونوں سے ملایا جائے اور اِن خطوط کے مربعوں کا اوسط حسابی نکالا جائے تو ثابت کرو کہ یہ اوسط اُن دو خطوط کے مربعوں کے اوسط حسابی کے مساوی ہوگا جو نقطہ مذکورہ اور محیط دائرہ کے قریب ترین اور بعید ترین نقاط کو ملائیں۔

۱۳۸ــ تین نقطے ا، ب، ج ایک خط مستقیم پر واقع ہیں اور ا ب کو ب ج سے وہی نسبت ہے جو م کو ن سے ہے، نقاط ا، ب، ج میں سے متوازی اور مستقیم خط ا لا، ب ما، ج ے کھینچے گئے ہیں، نقطہ ط خط ا لا پر حرکت کرتا ہے اور نقطہ ر خط ج ے پر، اگر کسی وقت پر جوت سے تعبیر ہوتا ہے ا ط = ا$_۱$ + ا$_۲$ جب (ن ت + عہ)

اور فاصلہ ج ر = ج$_۱$ + ج$_۲$ جب (ن ت + جہ)

اور اگر مستقیم خط ط ر، ب ما کو نقطہ ق پر قطع کرے تو فاصلہ ب ق کے لئے ایک متشابہ جملہ دریافت کرو۔

۱۳۹ــ ثابت کرو کہ

جب (بہ ــ جہ) جب ۳ عہ + جب (جہ ــ عہ) جب ۳ بہ + جب (عہ ــ بہ) جب ۳ جہ

= ۴ جب (بہ − جہ) جب (جہ − عہ) جب (عہ − بہ) جب (عہ + بہ + جہ)

۱۴۰ — ثابت کرو کہ

جب (بہ − جہ) جم ۳ عہ + جب (جہ − عہ) جم ۳ بہ + جب (عہ − بہ) جم ۳ جہ
= ۴ جب (بہ − جہ) جب (جہ − عہ) جب (عہ − بہ) جم (عہ + بہ + جہ)

۱۴۱ — اگر جب (لا + ۳ عہ) جب (بہ − جہ) + جب (لا + ۳ بہ) جب (جہ − عہ)
+ جب (لا + ۳ جہ) جب (عہ − بہ) = ۴ جب (بہ − جہ) جب (جہ − عہ) جب (عہ − بہ)
تو ثابت کرو کہ لا + عہ + بہ + جہ = (۲ ن + $\frac{1}{2}$) π

۱۴۲ — اگر ا + ب + ج = ۲ π تو ثابت کرو کہ

جب³ ا + جب³ ب + جب³ ج = ۳ جب ا/۲ جب ب/۲ جب ج/۲
− جب ۳ا/۲ جب ۳ب/۲ جب ۳ج/۲

۱۴۳ — ایک جھنڈا سمت راس سے کوئی زاویہ بناتا ہے اور اس کے پائیں کو مرکز مانکر ایک افقی دائرہ کھینچا گیا ہے، ایک شخص محیط دائرہ کے گرد چلکر مشاہدہ کرتا ہے کہ جھنڈے کے محاذی اس کی آنکھ پر بڑے سے بڑا زاویہ عہ اور چھوٹے سے چھوٹا زاویہ بہ بنتا ہے اور جب وہ ان مقامات کے عین وسط میں محیط دائرہ پر ہو تو یہ زاویہ طہ ہوتا ہے، اگر آنکھ کی اونچائی کو نظرانداز کردیا جائے تو ثابت کرو کہ

مس طہ = √(جب² (عہ − بہ) + ۴ جب² عہ جب² بہ) / جب (عہ + بہ)

۱۴۴ — دو خطوط ایک سطح مائل پر کھینچے گئے ہیں اور

ان کا درمیانی زاویہ جہ ہے، اگر ان کے میلان اُفق سے بالترتیب عہ اور بہ ہوں تو ثابت کرو کہ سطح مائل اُفق سے زاویہ

جب$^{-1}$ { قم جہ √ جب^2 عہ + جب^2 بہ − ۲ جب عہ جب بہ جم جہ } بناتی ہے

نیز ثابت کرو کہ سطح مائل کے خط میلان اعظم اور ایک خط مذکور کے درمیان زاویہ

$$\text{مس}^{-1}\left(\frac{\text{جب بہ} - \text{جب عہ جم جہ}}{\text{جب عہ جب جہ}}\right)$$ بنتا ہے۔

۱۴۵ — اگر ایک مثلث ا ب ج کے مرکز عمودی کو ایک خط بیرونی دائرہ کے مرکز سے ملائے تو ثابت کرو کہ یہ خط ضلع ب ج سے زاویہ

$$\text{مس}^{-1}\left(\frac{3 - \text{مس ب مس ج}}{\text{مس ب} - \text{مس ج}}\right)$$ بناتا ہے۔

۱۴۶ — زاویہ طہ کو معادلات ذیل سے ساقط کرو

$$\frac{\text{جم}(\text{عہ} - 3\,\text{طہ})}{\text{جم}^3\,\text{طہ}} = \frac{\text{جب}(\text{عہ} - 3\,\text{طہ})}{\text{جب}^3\,\text{طہ}} = \text{م}$$

۱۴۷ — ایک ن اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع ا$_1$ ا$_2$ ا$_3$ .... ا$_ن$ ایک دائرہ کے گرد بنی ہوئی ہے، دائرہ کا مرکز و اور نصف قطر ا ہے، ط کوئی نقطہ ہے جس کا فاصلہ و سے ج کے برابر ہے، اگر نقطہ ط سے کثیر الاضلاع

کے اضلاع پر عمود نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ ان کے
مربعوں کا مجموعہ ن $\left(ا^{۲} + \frac{ج^{۲}}{۴}\right)$ ہے۔

۱۴۸— ایک دائرہ کی کسی قوس اب کے محاذی دائرہ
کے مرکز پر زاویہ ۲ ط بنتا ہے اور نقاط ا اور ب پر
کے مماس نقطہ م پر ملتے ہیں، عمل ترتیبی سے ط کی
قیمت قریب ترین درجہ تک اُنہی صورت میں دریافت کرو

(۱) جبکہ دائرہ کا رقبہ اُس رقبہ کے مساوی ہو جو
م ا، م ب اور قوس اب کے اندر گھرا ہوا ہے

(۲) جب م ا اور م ب کے طولوں کا مجموعہ قوس
اب اور وتر اب کے مجموعہ کے برابر ہو۔

۱۴۹— ثابت کرو کہ مثلث کے زاویے ارتباطات
ذیل کو پورا کرتے ہیں

(۱) جب^{۳}ا + جب^{۳}ب + جب^{۳}ج
$= ۳$ جم $\frac{ا}{۲}$ جم $\frac{ب}{۲}$ جم $\frac{ج}{۲}$ + جم $\frac{۳ا}{۲}$ جم $\frac{۳ب}{۲}$ جم $\frac{۳ج}{۲}$

(۲) جب^{۲}ا + جب^{۲}ب + جب^{۲}ج
$= \frac{۳}{۲}$ + ۲ جم ا جم ب جم ج + $\frac{۱}{۲}$ جم ۲ا جم ۲ب جم ۲ج

۱۵۰— نقطہ و سے ایک شخص ایک پہاڑی پر سیدھے
راستہ سے چڑھتا ہوا دکھائی دیا اور جب وہ دو مقامات
ف اور ق پر سے گذرا تو اُس کے ظاہری قد کے
ارتفاعی زاویے مشاہدہ کرنے سے معلوم ہوا کہ $\frac{وف}{وق}$ = ل اور
زاویہ ف و ق = جہ، مقامات ف اور ق کے ارتفاع نقطہ

د سے عہ اور بہ دکھائی دے، اگر افق سے راستہ کا میلان
فہ ہو تو ثابت کرو کہ فہ مساوات ذیل کی شرائط کو پورا
کرتا ہے

جب² فہ = (ل جب عہ - جب بہ)² / (ل² - ۲ل جم جہ + ۱)

۱۵۱۔ معادلات ذیل سے طہ کو ساقط کرو

لا + ا = ا (۲ جم طہ - جم ۲ طہ)

اور ما = ا (۲ جب طہ - جب ۲ طہ)

۱۵۲۔ سطح مستوی میں ایک منتظم کثیر الاضلاع ہے اور سطح کے کسی نقطہ سے کثیر الاضلاع کے ضلعوں پر عمود نکالے گئے ہیں، ثابت کرو کہ اِن عمودوں کے مربعوں کا مجموعہ اُن خطوط کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہے جو عمودوں کے پایوں کو کثیر الاضلاع کے مرکز کے ساتھ ملاتے ہیں۔

۱۵۳۔ ایک مستطیلی کھیت کے اضلاع ا اور ۲ ا ہیں اور اس کے مرکز پر ایک کھونٹی ہے جس کے ساتھ ایک رسی کے ذریعہ ایک گھوڑا بندھا ہے، اگر گھوڑا ٹھیک آدھے کھیت میں بلا تکلف چر سکے تو ثابت کرو کہ رسی کا طول تقریباً ۰٫۵۸۳ × ا ہے۔

۱۵۴۔ ثابت کرو کہ مساوات جب (طہ + لہ) = ا جب ۲ طہ + ب کی چار قیمتیں ہیں جن کا مجموعہ دو قائموں کے طاق ضعف

کے برابر ہے -

۱۵۵ — اگر طہ کوئی مثبت حادّہ زاویہ ہو تو ثابت کروکہ زاویہ طہ کے بڑھنے سے نسبت طہ / جب طہ ہمیشہ بڑھتی ہے اور طہ / مس طہ ہمیشہ گھٹتی ہے -

۱۵۶ — اگر جب لا = م جب ما جہاں م ایک سے بڑا ہے تو ثابت کروکہ جب زاویہ طہ صفر سے قائمہ تک بڑھتا ہے تو نسبت مس لا / مس ما متواتر بڑھتی ہے اور اس کی قیمتیں م اور ∞ کے برابر ہوتی ہیں جبکہ لا بالترتیب صفر اور ایک قائمہ کے برابر ہو -

۱۵۷ — ثابت کروکہ

جب^۳(به − جه) جب^۳(عه − له) + جب^۳(جه − عه) جب^۳(به − له) + جب^۳(عه − به) جب^۳(جه − له)

= ۳ جب(عه − به) جب(به − جه) جب(جه − عه) جب(عه − له) جب(به − له) جب(جه − له)

۱۵۸ — ثابت کروکہ Σ جم (۳ عه − به − جه − له)

= ۴ جم (عه + به − جه − له) جم (عه + جه − به − له) جم (عه + له − به − جه)

جہاں Σ اُن سب رقموں کے حاصل جمع کو تعبیر کرتا ہے جن کا عام نمونہ وہ رقم ہے جس کے ماقبل یہ علامت لکھی گئی ہے -

۱۵۹ — ثابت کروکہ

جب(عه + به + جه) جم عه جب به جب جه + جم(عه + به + جه) جب عه جب به جب جه

− جب(عه + به + جه) جم عه جم به جم جه − جم(عه + به + جه) جب عه جم به جم جه

= جب(عه + به) جم (به + جه) جم (جه + عه) + جم (عه + به) جم (به + جه) جب (جه + عه) =

۱۶۰ — ثابت کروکہ

جب² عہ جب (بہ − جہ) جب (جہ − لہ) جب (لہ − بہ)
− جب² بہ جب (جہ − لہ) جب (لہ − عہ) جب (عہ − جہ)
+ جب² جہ جب (لہ − عہ) جب (عہ − بہ) جب (بہ − لہ)
− جب² لہ جب (عہ − بہ) جب (بہ − جہ) جب (جہ − عہ) = ۰

۱۶۱ — جملہ ف ق − ر س کو مختصر کرو جہاں

ف = لا جم (عہ + بہ) + ما جب (عہ + بہ) − جم (عہ − بہ)
ق = لا جم (جہ + لہ) + ما جب (جہ + لہ) − جم (جہ − لہ)
ر = لا جم (عہ + جہ) + ما جب (عہ + جہ) − جم (عہ − جہ)
س = لا جم (بہ + لہ) + ما جب (بہ + لہ) − جم (بہ − لہ)

۱۶۲ — اگر ا² + ب² − ۲ اب جم عہ = ج² + د² − ۲ ج د جم جہ
ب² + ج² − ۲ ب ج جم بہ = ا² + د² − ۲ ا د جم لہ
اور اب جب عہ + ج د جب جہ = ب ج جب بہ + ا د جب لہ
تو ثابت کرو کہ جم (عہ + جہ) = جم (بہ + لہ)

۱۶۳ — ثابت کرو کہ مساوات

۱	جم طہ	۰	۰
جم طہ	۱	جم عہ	جم بہ
۰	جم عہ	۱	جم جہ
۰	جم بہ	جم جہ	۱

= ۰

کا حل طہ = ن π + (−۱)^ن جب⁻¹ { √(جم² عہ + جم² بہ − ۲ جم عہ جم بہ جم جہ) ÷ جب جہ } ہے

۱۶۴— ثابت کرو کہ کسی مثلث اب ج میں

جم م ا + جم م ب + جم م ج − ۱ = ± ۴ جب $\frac{\text{م ا}}{۲}$ جب $\frac{\text{م ب}}{۲}$ جب $\frac{\text{م ج}}{۲}$

اگر م کی صورت بالترتیب ۴ن + ۱ ہو یا ۴ن + ۳

۱۶۵— ثابت کرو کہ کسی مثلث اب ج میں

(۱) ا^{3} جم ب جم ج + ب^{3} جم ج جم ا + ج^{3} جم ا جم ب

= ا ب ج (۱ − ۲ جم ا جم ب جم ج)

اور (۲) جب ۲ م ا + جب ۲ م ب + جب ۲ م ج

= (−۱)$^{\text{م}+1}$ × ۴ جب م ا جب م ب جب م ج

۱۶۶— اگر کسی مثلث کے زاویے ا، ب، ج ہوں تو ثابت کرو کہ

مس$^{-1}$(مم ب مم ج) + مس$^{-1}$(مم ج مم ا) + مس$^{-1}$(مم ا مم ب)

= مس$^{-1}$ {۱ + $\frac{\text{۸ جم ا جم ب جم ج}}{\text{جب}^2\text{ ۲ا + جب}^2\text{ ۲ب + جب}^2\text{ ۲ج}}$}

۱۶۷— کسی مثلث کے نقاط الزوایا ا، ب، ج میں سے ایسے مستقیم خط کھینچے گئے ہیں جو اضلاع اب، ب ج، ج ا میں سے ہر ایک سے زاویہ ع بناتے ہیں، ثابت کرو کہ جو مثلث اسطرح بنتا ہے اُس کے اضلاع کی نسبت مثلث اب ج کے اضلاع کے ساتھ

جم ع − جب ع (مم ا + مم ب + مم ج) : ۱ ہے

۱۶۸— سطح اُفقی پر اسطوانہ کی شکل کا ایک برج ہے اور برج کی چوٹی پر ایک مخروط ہے، سطح زمین کے

ایک مقام پر کھڑے ہو کر برج کی چوٹی کے قریب ترین نقطہ کا زاویہ ارتفاع عہ اور مخروط کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع بہ مشاہدہ کیا گیا ہے، برج کی سیدھ میں فاصلہ ا جانے پر یہی زاوئے بالترتیب جہ اور لہ ہو جاتے ہیں ثابت کرو کہ برج اور مخروط کی چوٹیوں کی بلندیاں سطح زمین سے
ا جب عہ جب جہ قم (جہ - عہ) اور ا جب بہ جب لہ قم (لہ - بہ) ہیں
نیز برج کا قطر
۲ ا جب بہ جم لہ قم (لہ - بہ) - ۲ ا جب عہ جم جہ قم (جہ - عہ) ہے

۱۶۹— سطح زمین کے نیچے ایک پتھر کی تہ ہے، اور اسکا میلان اُفق سے دریافت کرنے کے لئے ایک اُفقی مربع کے تین نقاط پر عمودی سوراخ کھودے گئے ہیں۔ ان نقاط پر تہ کی گہرائیاں بالترتیب ا، ب، ج ہیں

ثابت کرو کہ تہ کا میلان اُفق سے $مس^{-1} \frac{\sqrt{(ا-ب)^2+(ب-ج)^2}}{د}$ ہے
جہاں د مربع کے ضلع کو تعبیر کرتا ہے۔

۱۷۰— ایک پہاڑ کے مقابل کی جانبوں میں دو مقام ا اور ب ہیں، ا سے ب تک ایک سرنگ نکالنی منظور ہے، ا اور ب سے ایک دور کے مقام ج کے ارتفاعی زاوئے عہ اور بہ مشاہدہ کئے گئے ہیں اور زاویہ ا ج ب = جہ، نیز ا ج اور ب ج کے طول اَ اور بَ معلوم ہیں، ثابت کرو کہ مقام ب کی بلندی (د) مقام ا سے

= اجب عہ ـ ب جیب بہ اور اب کا طول (ل) = $\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 - ۲\text{اب جم جہ}}$
اور خط اب اُفق سے زاویہ جیب$^{-1}$ $\frac{\text{ش}}{\text{ل}}$ اور خط اج سے
زاویہ جیب$^{-1}$ $\frac{\text{اب جب جہ}}{\text{ل}}$ بناتا ہے۔

۱۷۱ــ ایک پہاڑی کا زاویہ ارتفاع فہ ہے، ایک شخص ایسی سمت میں اس کے اوپر چڑھنا شروع کرتا ہے جو خط میلان اعظم سے زاویہ لہ بناتی ہے، فاصلہ ف اوپر چڑھنے کے بعد وہ دیکھتا ہے کہ ایک ایسی شئے کا زاویہ انخفاض عہ ہے جو اُس کی سمت طریق میں سے گذرنے والی عمودی سطح اور پائیں کوہ میں سے گذرنے والی اُفقی سطح میں واقع ہے، اس کے بعد وہ فاصلہ ن اور اُوپر چڑھکر دیکھتا ہے کہ اسی شئے کا زاویہ انخفاض بہ ہے، ثابت کرو کہ زاویہ ارتفاع فہ مساوات ذیل کو حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

قط^2 لہ قم^2 فہ = ۱ + {مم بہ + (مم عہ ـ مم بہ) $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$}^{2}

۱۷۲ــ ایک پہاڑ کی تین چوٹیاں ہیں، جن میں سے ا سب سے نیچی ہے اور چوٹی ا سے ب کی بلندی (د) معلوم ہے، چوٹی ا سے ب اور ج کے ارتفاعی زاوئے بہ اور جہ مشاہدہ کئے گئے ہیں، اگر اب اور اج میں سے گذرنے والی عمودی سطحوں کا درمیانی زاویہ طہ ہو اور نقطہ ب پر

ب ا اور ب ج میں سے گذرنے والی عمودی سطحوں کا
درمیانی زاویہ فہ دکھائی دے تو ثابت کرو کہ چوٹی ا سے چوٹی
ج کی بلندی د مم بہ مس جہ جب فہ قتم (طہ + فہ) ہے

۱۷۳ — ایک پہاڑ کے مسطح پہلو پر دو سیدھے راستے
ب ج اور ج ا ہیں، ان کے طول بالترتیب اَ اور بَ
ہیں اور دونوں کا چڑھاؤ اوپر کی طرف م میں ۱ ہے
(یعنی م افقی میں ۱ عمودی) اور نقطہ ب سے ایک
چڑھاؤ ن میں ۱ ہے، ثابت کرو کہ پہاڑ کے پہلو کا
میلان افق سے ع ہے جہاں

۴ اَ بَ م² ع = (اَ + بَ)² ن² − (اَ − بَ)² م²

۱۷۴ — ثابت کرو کہ مثلث کے اندرونی اور نو نقطی
دائروں کے مرکزوں کا باہمی فاصلہ ق/۲ − ر ہے،
اس سے فیوربک کا مسئلہ حاصل کرو یعنی
ثابت کرو کہ کسی مثلث کے اندرونی اور نو نقطی دائرے
ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔

۱۷۵ — ا ب ج د ایک ذو اربعۃ الاضلاع ہے، اسمیں
ا ب = ۳، ب ج = ۴، ج د = ۵ اور د ا = ۶ فٹ
اور اس کا رقبہ = ۳ √۳ + ۹ مربع فٹ، ثابت کرو کہ
ان شرائط کو پورا کرنے والی دو اشکال ذو اربعۃ الاضلاع
ہیں جن میں بالترتیب زاویہ ب کی قیمتیں جم⁻¹ [(−۱ − ۲۴ √۳) / ۷۴]

یعنی تقریباً ۶۰° اور ۱۷۵° ۱۵' ہیں

۱۷۶۔ معادلات ذیل سے عہ، بہ، جہ کو ساقط کرو

ا جم عہ + ب جم بہ + ج جم جہ = ۰

ا جب عہ + ب جب بہ + ج جب جہ = ۰

ا قط عہ + ب قط بہ + ج قط جہ = ۰

۱۷۷۔ معادلات ذیل سے طہ کو ساقط کرو

مس (طہ − عہ) + مس (طہ − بہ) = لا

مم (طہ − عہ) + مم (طہ − بہ) = ما

۱۷۸۔ معادلات ذیل سے فہ کو ساقط کرو

لا جم ۳ فہ + ما جب ۳ فہ = ب جم فہ

اور لا جب ۳ فہ + ما جم ۳ فہ = ب جم (فہ + $\frac{\pi}{۶}$)

۱۷۹۔ ایک دائرہ کا نصف قطر ا ہے اور اس کے اندر م اور ن اضلاع کی دو منتظم اشکال کثیر الاضلاع بنائی گئی ہیں۔ ثابت کرو کہ اُن تمام وتروں کے مربعوں کا مجموعہ جو ایک کثیر الاضلاع کے ایک کونے کو دوسری کثیر الاضلاع کے ہر ایک کونے کے ساتھ ملانے سے حاصل ہوتے ہیں ۲ م ن ا² ہے

۱۸۰۔ ایک محیط دائرہ کے گرد ن پتھر برابر برابر فاصلوں پر ترتیب دئے گئے ہیں۔ اُن سب کو دائرہ کے مرکز تک اٹھاکر لیجانے میں جتنی محنت درکار ہو اس کا مقابلہ اُس محنت سے کرو جو ایک پتھر کے گرد اُن سب کا انبار لگانے میں درکار ہو۔

نیز ثابت کرو کہ اگر پتھروں کی تعداد کو لا انتہا بڑھا دیا جائے
تو یہ نسبت π : ۴ ہو جائے گی۔

۱۸۱۔ عمل ترسیمی سے یا کسی اور طرح سے مساوات
لا + ۲ مس لا = $\frac{\pi}{2}$ کی اُن قیمتوں کی تعداد دریافت کرو
جو ۰ اور ۲π کے درمیان واقع ہوں، اور سب
سے بڑی قیمت کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔
جدولوں سے اپنے نتیجہ کی تصدیق کرو۔

۱۸۲۔ لا کی چھوٹی سے چھوٹی مثبت قیمت دریافت کرو
جو شرائط مساوات مس لا - لا = $\frac{1}{2}$ کو پورا کرے

۱۸۳۔ جملہ جب^2 لا کی ترسیم بناؤ اور ثابت کرو کہ
اگر ا ایک چھوٹی مثبت مقدار ہو تو مساوات لا - ا = $\frac{\pi}{2}$ جب^2 لا
کی تین حقیقی قیمتیں ہونگی۔

۱۸۴۔ ثابت کرو کہ مساوات ا لا + ب = مس $\frac{\pi \text{ ج لا}}{2}$ کی
ایسی حقیقی قیمتوں کے تقربات جو مقابلتہً بڑی ہوں

مساوات لا = $\frac{\text{م}}{\text{ج}} - \frac{2}{\pi(\text{ا م} + \text{ب ج})}$ سے حاصل ہوتے ہیں
جہاں م کوئی بڑا طاق صحیح عدد ہے

۱۸۵۔ عمل ترسیمی سے مساوات لا جب π لا = ۱ کی
تعداداً سب سے چھوٹی مثبت اور منفی قیمتوں کی تقریبی
قیمتیں دریافت کرو۔
نیز ثابت کرو کہ اس مساوات کی بڑی قیمتوں کی تقریبی

قیمتیں مساوات لا = ن + $\frac{(-1)^{ن}}{\pi^2 ن}$ سے حاصل ہوتی ہیں، اس میں ن کوئی بڑی مقدار ہے۔

۱۸۶۔ ثابت کرو کہ مساوات مس لا = ۲ لا کی قیمت جو صفر اور $\frac{\pi}{2}$ کے درمیان واقع ہے تقریباً ۱٫۱۶۵۴ ہے۔ معلوم ہے مس ۱٫۱۵۱۹ = ۲٫۲۴۶۰ اور مس ۱٫۱۶۹۴ = ۲٫۳۵۵۹

۱۸۷۔ اگر طہ کوئی حادّہ زاویہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$مس\ طہ\ ہمیشہ\ طہ + \frac{طہ^3}{3} + \frac{طہ^5}{15} + \cdots + \frac{طہ^{2ن+1}}{4^{ن}-1} + \cdots\cdots$$

سے بڑا ہوگا

۱۸۸۔ اگر ا، ب، عہ، بہ مستقل مقداریں ہوں تو ثابت کرو کہ مساوات

جم (۲ طہ − عہ) + ا جم (طہ − بہ) + ب = ۰

کی قیمتوں کے چار مختلف مجموعے ہیں اور اگر ان مختلف مجموعوں کی کسی چار قیمتوں کو $طہ_1$، $طہ_2$، $طہ_3$، $طہ_4$ سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ $طہ_1 + طہ_2 + طہ_3 + طہ_4 - 2عہ$، π کا جفت ضعف ہے۔

۱۸۹۔ اگر شرائط مساوات

جم (طہ + عہ) + جم (طہ + بہ) + جم (طہ + جہ)

= قم (طہ + عہ) + قم (طہ + بہ) + قم (طہ + جہ)

$طہ_1$، $طہ_2$، $طہ_3$ سے پوری ہو سکیں جن میں سے کسی دو کا فرق ۴ قائموں کے ضعف کے برابر نہ ہو تو ثابت کرو

ط۴ + ط۵ + ط۶ + عہ + بہ + جہ ، ۲π کے کسی ضعف کے برابر ہوگا

۱۹۰ــ ثابت کرو کہ بالعموم مساوات

ا جب۳ لا + ب جم۳ لا + ج = ۰

کی چھ مختلف قیمتیں ہیں جن میں سے کسی دو کا تفاوت ۲π کے برابر نہیں ہو سکتا ، نیز ثابت کرو کہ اُن کے مجموعہ کا مماس − ا/ب ہے ۔

۱۹۱ــ ثابت کرو کہ مساوات

مس (طہ − عہ) + قط (طہ − بہ) = مم جہ

کی چار قیمتیں ایسی ہیں (جن میں سے کسی دو کا فرق ۲π کے اضعاف کے برابر نہیں) جو ربط ذیل کو پورا کرتی ہیں

ط۱ + ط۲ + ط۳ + ط۴ = ۲ (ن π + عہ + بہ − جہ)

۱۹۲ــ اگر لا کی تین قیمتیں عہ ، بہ ، جہ مساوات

جب ۲ طہ (ا جب لا + ب جم لا) = جب ۲ لا (ا جب طہ + ب جم طہ)

کو پورا کریں اور ان میں سے کسی دو کا باہمی فرق یا اُن میں سے کسی ایک اور طہ کا فرق ۲π کے کسی ضعف سے تعبیر نہ ہو سکے تو ثابت کرو کہ

مس عہ/۲ مس بہ/۲ مس طہ/۲ + ۱ = ۰

۱۹۳ــ اگر مساوات ا جم ۲ طہ + ب جب ۲ طہ + ج جم طہ + د = ۰

کی چار مختلف قیمتیں ط۱ ، ط۲ ، ط۳ ، ط۴ ہوں تو ثابت کرو کہ ∑ جب (ط۲ + ط۳ − ط۱)/۲ = ۰

اس میں مجو اُن سب رقموں کے حاصل جمع کو تعبیر کرتا ہے جسکا عام نمونہ اوپر مندرج ہے۔

۱۹۴— ارتباط ذیل کو ثابت کرو

$$\text{جم}^{-1}\,\text{لا} = \frac{\sqrt{1-\text{لا}^2}}{\text{لا}_1 \times \text{لا}_2 \times \text{لا}_3 \ldots\ldots \infty\ \text{تک}}$$

جہاں متواتر مقداریں لا_1، لا_2، لا_3....$\text{لا}_\text{ر}$ ربط ذیل سے منسلک ہیں

$$\text{لا}_{\text{ر}+1} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\text{لا}_\text{ر})}$$

۱۹۵— اگر ا اور ب مثبت مقداریں ہوں اور اگر

$$\text{ا}_1 = \frac{\text{ا}+\text{ب}}{2}،\ \text{ب}_1 = \sqrt{\text{ا}_1\text{ب}}،\ \text{ا}_2 = \frac{\text{ا}_1+\text{ب}_1}{2}،$$

$\text{ب}_2 = \sqrt{\text{ا}_2\text{ب}_1}$ اور علی ہذا القیاس

تو ثابت کرو کہ

$$\text{ا}_\infty = \text{ب}_\infty = \frac{\sqrt{\text{ب}^2-\text{ا}^2}}{\text{جم}^{-1}\frac{\text{ا}}{\text{ب}}}$$

اس سے ثابت کرو کہ π کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے

۱۹۶— اگر مساوات

$$\text{ا} + \text{ا}_1\,\text{جب لا} + \text{ا}_2\,\text{جم لا} + \text{ا}_3\,\text{جب}\ 2\ \text{لا} + \text{ا}_4\,\text{جم}\ 2\ \text{لا} = 0$$

لا کی تمام قیمتوں کے لئے صحیح ہو جہاں مستقل مقداروں
ل۱، ل۲، ...... میں لا شامل نہیں ہے، تو ثابت کرو کہ
ان مستقل مقداروں میں سے ہر ایک صفر کے برابر ہوگی

جوابات

امثلہ ۱ (صفحہ ۱۱-۱۲)

۱- $\frac{۲}{۳}$ ۲- $\frac{۳۰۱}{۳۶۰}$ ۳- $\frac{۴۵۵۶۹}{۶۴۸۰۰}$

۴- ۱$\frac{۹}{۲۰}$ ۵- ۲$\frac{۳۶۶۱}{۱۰۸۰۰}$ ۶- ۴$\frac{۳۸۸}{۳۳۷۵}$

۷- ۳۳° ۳۳′ ۳۳٫۳″ ۸- ۹۰°

۹- ۱۵۳° ۸۸′ ۸۸٫۸″ ۱۰- ۳۹° ۷۶′ ۳۸٫۸″

۱۱- ۲۹۱° ۳۴′ ۴۳٫۴″ ۱۲- ۵۲۸° ۳′ ۳۳٫۳″

۱۳- ۱$\frac{۱}{۵}$ زاویہ قائمہ، ۱۰۸°

۱۴- ٫۵۳۵۲۴ زاویہ قائمہ، ۳۰° ۴۹′ ۷٫۷۷۶″

۱۵- ٫۳۹۴۵۳۶ زاویہ قائمہ، ۳۵° ۳۰′ ۲۹٫۶۶۴″

۱۶- ۲٫۵۵۰۸۰۹ زاویے قائمے، ۲۲۹° ۳۴′ ۴۲٫۱۱۹″

۱۷- ۷٫۵۹۰۰۵ زاویے قائمے، ۶۸۳° ۶′ ۱٫۶۲″

۲۸- ۵° ۳۳′ ۲۰″ ، ۶۶° ۴۰′

۲۹- ۴۷ ۷/۱۹° ، ۴۲ ۱۲/۱۹° ۳۱- ۳۳° ۲۰′ ، ۱۰° ۴۸′

امثلہ ۲ (صفحہ ۱۷-۱۸)

۱- ۲۵۱۳۲٫۷۴ میل تقریباً

۲- ۱۹٫۲۸ میل تقریباً فی گھنٹہ

۳- ۱۲٫۸۵ میل تقریباً

۴- ۳٫۱۴۱۵۹ انچ ۵- ۵۸۱۱۹۴۶۴۰ میل تقریباً

۶- ۱۴٫۹۹۴ میل تقریباً

امثلہ ۳ (صفحہ ۲۲-۲۴)

۱- ۹۰° ۲- ۲۴۰° ۳- ۱۸۰۰°

۴- ۵۷° ۱۷′ ۴۴٫۸″ ۵- ۴۵۸° ۲۱′ ۵۸٫۴″

۶- ۱۶۰ف ۷- ۲۳۳ف ۳۳′ ۳۳٫۳″

۸- ۲۰۰۰ف ۹- π/۳ ۱۰- ۲۲۱/۳۶۰ π

۱۱- ۷۰۳/۷۲۰ π ۱۲- ۳۵۵۷/۱۳۵۰۰ π

۱۳- ۷۹/۳۶ π ۱۴- π۳/۱۰

۱۵- ۱۱۰۳/۲۰۰۰ π ۱۶- ۱٫۷۲۹۲۹۱۸ π

۱۷- ۸۱° ، ۹° ۱۸- ۲۴° ، ۶۰° ، ۹۶°

۱۹- ۱۳۲°، ۱۵°، ۱۲ء۶° ۲۰- ۳۰°، ۶۰°، ۹۰°

۲۱- ۱/۲، π/۳، ۲π/۳ - ۱/۲ نیم قطری زاویے

۲۲- (۱) ۳π/۵، ۱۰۸° (۲) ۵π/۷، ۱۲۸ ۴/۷°

(۳) ۳π/۴، ۱۳۵° (۴) ۵π/۶، ۱۵۰° (۵) ۱۵π/۱۷، ۱۵۸ ۱۴/۱۷°

۲۳- ۸ اور ۴ ۲۴- ۱۰ اور ۸

۲۵- ۶ اور ۸ ۲۶- π/۳

۲۷- (۱) ۵π/۲ ق = ۷۵° = ۸۳ ۱/۳ گ

(۲) ۷π/۱۸ ق = ۷۰° = ۷۷ ۷/۹ گ

(۳) ۵π/۸ ق = ۱۱۲ ۱/۲° = ۱۲۵ گ

۲۸- (۱) ۴ بجکر ۷ ۸/۱۱ اور ۳۶ منٹ پر

(۲) ۷ بجکر ۲۸ ۴/۱۱ اور ۴۸ منٹ پر

امثلہ ۴ (صفحات ۲۸ — ۳۱)

[فرض کرو کہ π = ۳ء۱۴۱۵۹..... اور ۱/π = ۰ء۳۱۸۳۱]

۱- ۳ ۴۵۴ء۲۰° تقریباً ۲- ۳/۵ نیم قطری، ۳۴° ۲۲′ ۳۸ء۹″

۳- ۶۸ء۷۵ انچ تقریباً ۴- ۰ء۵۲۳۶ انچ تقریباً

۵- ۲۴ء۵۵۵ انچ تقریباً ۶- ۹° ۲۵′ ۵۷″ تقریباً

۷- ۳۹۵۹٫۸ میل تقریباً ۸- π فٹ = ۳٫۱۴۱۵۹ فٹ

۹- ۴:۵ ۱۰- ۳٫۱۴۱۶

۱۱- $\frac{\pi ۴}{۳۵}$ ، $\frac{\pi ۹}{۳۵}$ ، $\frac{\pi ۱۴}{۳۵}$ ، $\frac{\pi ۱۹}{۳۵}$ ، $\frac{\pi ۲۴}{۳۵}$ نیم قطری

۱۲- ۶۵° ۲۴′ ۳۰٫۴″ ۱۳- ۲۰۶۲٫۶۵ فٹ تقریباً

۱۴- ۱٫۵۳۵۹ فٹ تقریباً ۱۵- ۲۶۲٫۶ فٹ تقریباً

۱۶- ۳۲۱۴٫۲۹ فٹ تقریباً ۱۷- ۳۸۱۹٫۷۲ فٹ تقریباً

۱۸- ۱۹٫۰۹آ ۱۹- ۱۱۰۵٫۸ میل

۲۰- ۲۴۸۸۳۳ میل ۲۱- ۲۱۶۰۰′ ، ۶۸۷۵٫۵ تقریباً

۲۲- ۴۷۸ × ۱۰ میل

امثلہ ۶ (صفحہ ۴۶-۴۷)

۵- $\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$ ، $\frac{۱}{\sqrt{۱۵}}$ وغیرہ ۶- $\frac{۱۲}{۵}$ ، $\frac{۸}{۱۳}$

۷- $\frac{۱۱}{۶۰}$ ، $\frac{۶۰}{۶۱}$ ، $\frac{۶۱}{۶۰}$ ۸- $\frac{۳}{۵}$ ، $\frac{۴}{۳}$

۹- $\frac{۴۰}{۹}$ ، $\frac{۴۱}{۴۰}$ ۱۰- $\frac{۳}{۵}$ ، $\frac{۴}{۵}$ ، $\frac{۱}{۵}$ ، $\frac{۵}{۳}$

۱۱- $\frac{۳}{۴}$ ۱۲- $\frac{۱۵}{۱۷}$ ، $\frac{۱۷}{۸}$

۱۳- $\frac{۱}{۲}\sqrt{۵}$ ، $\frac{۳}{۵}\sqrt{۵}$ ۱۴- ۱ یا $\frac{۳}{۵}$

۱۵- $\frac{۳}{۵}$ یا $\frac{۵}{۱۳}$ ۱۶- $\frac{۵}{۱۳}$

۱۷— $\frac{۱۲}{۱۳}$ ۱۸— $\frac{۱}{۲۴}$ یا ۱

۱۹— $\frac{۱}{۲}$ ۲۰— $\frac{۱}{۲۴}$

۲۱— ۱ + √۲ ۲۲— $\frac{۲ل(ل+۱)}{۲ل^{۲}+۲ل+۱}$ ، $\frac{۲ل+۱}{۲ل^{۲}+۲ل+۱}$

امثلہ ۸ (صفحات ۶۴—۶۸)

۱— ......۳۴٫۶۴ فٹ، ۲۰ فٹ ۲— ۱۶۰ فٹ

۳— ۲۲۵ فٹ ۴— ۱۳۶٫۶ فٹ

۵— .....۱۴۶٫۴ فٹ ۶— .....۳۶۷٫۹ گز، ___۴۵۴٫۳ گز

۷— .....۸۶٫۶ فٹ ۸— .....۱۱۵٫۳۵۹ فٹ

۹— ..... ۸۷٫۸۴۶ فٹ

۱۰— ......۴۳٫۳ فٹ ؛ ایک ستون سے ۷۵ فٹ کے فاصلہ پر

۱۱— .....۹۴٫۶۴۱ فٹ، .....۵۴٫۶۴۱ فٹ

۱۲— ..... - ۱٫۳۶۶ میل ۱۳— °۳۰

۱۵— ۱۳٫۸۵۶۴ میل فی گھنٹہ

۱۶— ... ۲۵٫۹۸ فٹ، ...... ۷۰٫۹۸ فٹ، .....۸۵٫۹۸ فٹ

۱۷— ۳۲√۵ = ...۷۱٫۵۵ فٹ

۱۹— .....۱۰ میل فی گھنٹہ ۲۰.....۸۶٫۶ گز

۲۱— ۶۹۲٫۸..... گز

امثلہ ۹ (صفحات ۹۱ - ۹۳)

۱— $\frac{۲۲۵۰}{۶۲۸۹}$ ہ، $\frac{۲۵۰۰}{۶۲۸۹}$ ہ اور $\frac{۸۱}{۳۳۱}$ ہ نیم قطری زاویے

۲— °۶۸ '۴۵ ''۱۷٫۸

۴— $\frac{۲\,لا\,ما}{لا^۲+ما^۲}$، $\frac{۲\,لا\,ما}{لا^۲-ما^۲}$

۸— $\frac{۱}{مس^۲ا} - مس^۲ا$ ۹— ط = °۶۰

۱۰— $۱\frac{۱}{۲}$ منٹ میں

امثلہ ۱۰ (صفحات ۱۰۶—۱۰۷)

۳— −٫۳۶۶.....، ۲٫۳۰۹۴......

۵— −۱٫۳۶۶....، −۲٫۳۰۹۴

۶— ۲، ۰ ۷— ۱٫۴۱۴۲....، −۲

۸— ۱٫۳۶۶.....، ۲٫۳۰۹۴......

۹— °۴۵ اور °۱۳۵ ۱۰— °۱۲۰ اور °۲۴۰

۱۱— °۱۳۵ اور °۳۱۵ ۱۲— °۱۵۰ اور °۳۳۰

۱۳— °۱۵۰ اور °۲۱۰ ۱۴— °۲۱۰ اور °۳۳۰

۱۵— −جم °۲۵ ۱۶— جب °۶

۱۷— −مس °۴۳ ۱۸— جب °۱۲

۱۹- جب ۱۷°	۲۰- -مم ۳۴°
۲۱- جم ۳۳°	۲۲- جم ۲۸°
۲۳- جم ۲۵°	۲۴- جم ۳۰°
۲۵- مم ۲۶°	۲۶- -قم ۲۳°
۲۷- -قم ۳۶°	۲۸- منفی
۲۹- منفی	۳۰- مثبت
۳۱- صفر	۳۲- مثبت
۳۳- مثبت	۳۴- مثبت
۳۵- منفی	

۳۶- $\frac{1}{\sqrt{3}}$ اور $\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ، $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ اور $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

امثلہ ۱۱ (صفحات ۱۱۷ - ۱۱۹)

۱- $\text{ن}\pi + (-1)^{\text{ن}}\frac{\pi}{6}$	۲- $\text{ن}\pi - (-1)^{\text{ن}}\frac{\pi}{3}$
۳- $\text{ن}\pi + (-1)^{\text{ن}}\frac{\pi}{4}$	۴- $2\text{ن}\pi \pm \frac{2\pi}{3}$
۵- $2\text{ن}\pi \pm \frac{\pi}{6}$	۶- $2\text{ن}\pi \pm \frac{3\pi}{4}$
۷- $\text{ن}\pi + \frac{\pi}{3}$	۸- $\text{ن}\pi + \frac{3\pi}{4}$
۹- $\text{ن}\pi + \frac{\pi}{4}$	۱۰- $2\text{ن}\pi \pm \frac{\pi}{3}$
۱۱- $\text{ن}\pi + (-1)^{\text{ن}}\frac{\pi}{3}$	۱۲- $\text{ن}\pi \pm \frac{\pi}{2}$

۱۳- ن π ± $\frac{\pi}{۳}$

۱۴- ن π ± $\frac{\pi}{۶}$

۱۵- ن π ± $\frac{\pi}{۳}$

۱۶- ن π ± $\frac{\pi}{۴}$

۱۷- ن π ± $\frac{\pi}{۶}$

۱۸- (۲ن+۱) π + $\frac{\pi}{۴}$

۱۹- ۲ن π − $\frac{\pi}{۶}$

۲۰- ۱۵° اور ۷۵°، (ن + $\frac{م}{۲}$) π ± $\frac{\pi}{۴}$ + (−۱)^{م} $\frac{\pi}{۱۲}$

اور (ن − $\frac{م}{۲}$) π ∓ $\frac{\pi}{۴}$ + (−۱)^{م} $\frac{\pi}{۱۲}$ جہاں م اور ن کوئی صحیح عدد ہیں۔

۲۱- ۱۸۷$\frac{۱}{۲}$° اور ۱۴۲$\frac{۱}{۲}$°

(ن + $\frac{م}{۲}$) π + $\frac{\pi}{۸}$ ± $\frac{\pi}{۱۲}$ اور (ن − $\frac{م}{۲}$) π − $\frac{\pi}{۸}$ ± $\frac{\pi}{۱۲}$

۲۲- (۱) ۶۰° اور ۱۲۰° (۲) ۱۲۰° اور ۲۴۰° (۳) ۹۰° اور ۲۱۰°

۲۳- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۱ (۴) ۱ (۵) ۱

امثلہ ۱۲ (صفحہ ۱۲۰-۱۲۲)

۱- ن π + (−۱)^{ن} $\frac{\pi}{۶}$

۲- ۲ن π ± $\frac{۲\pi}{۳}$

۳- ن π + (−۱)^{ن} $\frac{\pi}{۳}$

۴- جم ط = $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$

۵- ن π + (−۱)^{ن} $\frac{\pi}{۱۰}$ یا ن π − (−۱)^{ن} $\frac{۳\pi}{۱۰}$ (دفعہ ۱۳۶)

۶- ط = ۲ن π ± $\frac{\pi}{۳}$ ۷- ط = ن π + $\frac{\pi}{۴}$ یا ن π + $\frac{\pi}{۴}$

۸- ط = ن π + $\frac{۲\pi}{۳}$ یا ن π + $\frac{۵\pi}{۶}$

۹- مس ط = $\frac{۱}{ل}$ یا − $\frac{۱}{ب}$ ۱۰- ط = ن π ± $\frac{\pi}{۴}$

۱۱- ط = ۲ن π یا ۲ن π + $\frac{\pi}{۴}$

۱۲- ن π ± $\frac{\pi}{۶}$ ۱۳- ن π یا ۲ن π ± $\frac{\pi}{۳}$

۱۴- ۲ن π ± $\frac{\pi}{۳}$ یا ۲ن π ± $\frac{\pi}{۶}$

۱۵- جب ط = ۱ یا − $\frac{۱}{۳}$

۱۶- $\frac{ن\pi}{۵}$ + (−۱)^{ن} $\frac{\pi}{۲۰}$ ۱۷- $\frac{ن\pi}{۴}$ یا $\frac{(۲ن+۱)\pi}{۱۰}$

۱۸- ۲ن π یا $\frac{(۲ن+۱)\pi}{۵}$ ۱۹- $\frac{۲ر\pi}{م-ن}$ یا $\frac{۲ر\pi}{م+ن}$

۲۰- (۲ن + $\frac{۱}{۲}$) $\frac{\pi}{۵}$ یا ۲ن π − $\frac{\pi}{۲}$

۲۱- ۲ن π یا $\frac{۲ن\pi}{۹}$

۲۲- (۲ر + $\frac{۱}{۲}$) $\frac{\pi}{م+ن}$ یا (۲ر − $\frac{۱}{۲}$) $\frac{\pi}{م-ن}$

۲۳- (ن + $\frac{۱}{۲}$) $\frac{\pi}{۹}$ ۲۴- (م + $\frac{۱}{۲}$) $\frac{\pi}{ن+۱}$

۲۵- $\frac{ن\pi}{۴}$ ± $\sqrt{۱ + \frac{ن^۲\pi^۲}{۱۶}}$ ۲۶- ن π ± $\frac{\pi}{۴}$

۲۷- $(\text{ن}+\frac{۱}{۲})\frac{\pi}{۳} \pm \frac{\pi}{۳}$　　　۲۸- $(\text{ن}+\frac{۱}{۲})\frac{\pi}{۴}$

۲۹- $\frac{\text{ن}\pi}{۳} \pm \frac{\pi}{۳}$　　　۳۰- $\text{ن}\pi \pm \frac{\pi}{۶}$

۳۱- $\frac{\pi}{\text{م}-\text{ن}}(\text{ر}+\frac{۱}{۲})$

۳۲- $\text{س ط} = \frac{۲\text{ن}+۱ \pm \sqrt{۴\text{ن}^۲+۴\text{ن}-۱۵}}{۴}$ جہاں $\text{ن} > ۱$
یا < -۲

۳۳- $\text{ط} = (\text{م}+\frac{\text{ن}}{۲})\pi \pm \frac{\pi}{۶} + (-۱)^{\text{ن}}\frac{\pi}{۱۲}$

$\text{ع} = (\text{م}-\frac{\text{ن}}{۲})\pi \pm \frac{\pi}{۶} - (-۱)^{\text{ن}}\frac{\pi}{۱۲}$

۳۴- $\frac{۱}{۵}\left[(۶\text{م}-۴\text{ن})\pi \pm \frac{\pi}{۲} \mp \frac{۲\pi}{۳}\right]$ اور

$\frac{۱}{۵}\left[(۶\text{ن}-۴\text{م})\pi \pm \pi \mp \frac{\pi}{۳}\right]$

۳۵- ۴۵° اور ۶۰°　　　۳۶- $\frac{۱}{۳}$ یا $\frac{۵}{۳}$

۳۷- $\pm \frac{۱}{۳}\sqrt{۵}$ ، $\pm \frac{۱}{۲}\sqrt{۵}$

امثلہ ۱۳ (صفحات ۱۲۷-۱۳۱)

۱- $-\frac{۱۳۳}{۲۰۵}$ ، $-\frac{۸۴}{۲۰۵}$　　　۲- $\frac{۱۵۹۶}{۳۴۴۵}$ ، $\frac{۳۴۴۴}{۳۴۴۵}$

۳- $\frac{۲۲۰}{۲۲۱}$ ، $\frac{۱۷۱}{۲۲۱}$ ، $\frac{۲۲۰}{۲۱}$

امثلہ ۱۴ (صفحات ۱۳۶ - ۱۳۹)

۳۰- ۲ جب (ط + ن فہ) جب $\frac{۳ \text{فہ}}{۲}$

۳۱- ۲ جب (ط + ن فہ) جم $\frac{\text{فہ}}{۲}$

امثلہ ۱۵ (صفحات ۱۴۰ - ۱۴۱)

۱- جم۲ط - جم۱۲ط   ۲- جب۱۲ط + جب۲ط

۳- جم۱۴ط + جم۸ط   ۴- جم ۱۲° - جم ۱۲۰°

امثلہ ۱۶ (صفحات ۱۴۵ - ۱۴۶)

۱- ۳، $\frac{۹}{۱۳}$ ۳- ۱

امثلہ ۱۷ (صفحات ۱۵۵ - ۱۵۸)

۱- (۱) $\pm \frac{۲۴}{۲۵}$ (۲) $\pm \frac{۱۲۰}{۱۶۹}$ (۳) $\frac{۲۰۱۶}{۴۲۲۵}$

۲- (۱) $\frac{۱۶۱}{۲۸۹}$ (۲) $-\frac{۷}{۲۵}$ (۳) $\frac{۱۱۹}{۱۶۹}$

۳- ۱

امثلہ ۱۸ (صفحات ۱۷۲ - ۱۷۶)

۱- $\frac{\pm ۲\sqrt{۲} \pm \sqrt{۳}}{۶}$ ، $\frac{\pm ۷\sqrt{۳} \pm ۴\sqrt{۲}}{۱۸}$

۲- $\pm \frac{۱۳}{۱۲}$ ، $\pm \frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$ یا $\pm \frac{\sqrt{۱۳}}{۳}$ ، $\frac{۱۶۹}{۱۴۴}$

۳۔ $\frac{۱۶}{۳۰۵}$ ، $\frac{۴۹}{۳۰۵}$ ۔۔۔ ۴۔ $\frac{۷}{۵\sqrt{۲}}$

۵۔ $\pm\frac{۱}{۳}$ ، $\pm\frac{۳}{۴}$ ۔۔۔ ۶۔ $\pm\frac{۳}{۴}$

۷۔ $\frac{\sqrt{۹}-\sqrt{۲}-\sqrt{۴}}{۲\sqrt{۲}}$ ، $\frac{\sqrt{۹}+\sqrt{۲}+\sqrt{۴}}{۲\sqrt{۲}}$ ، $\sqrt{۲}-۱$ ،

$-(۱+\sqrt{۲})+\sqrt{۴+۲\sqrt{۲}}$

۸۔ $\sqrt{\frac{۴-ا^۲-ب^۲}{ا^۲+ب^۲}}$ ۔۔۔ ۲۳۔ $+$ اور $-$

۲۴۔ $-$ اور $-$ ۔۔۔ ۲۵۔ $-$ اور $-$

۲۹۔ (۱) $۲ن\pi+\frac{\pi}{۴}$ اور $۲ن\pi+\frac{۳\pi}{۴}$

(۲) $۲ن\pi+\frac{۳\pi}{۴}$ اور $۲ن\pi+\frac{۵\pi}{۴}$

(۳) $۲ن\pi-\frac{\pi}{۴}$ اور $۲ن\pi+\frac{\pi}{۴}$

(۴) $۲ن\pi+\frac{\pi}{۴}$ اور $۲ن\pi+\frac{۳\pi}{۴}$

۳۰۔ (۱) $۲ن\pi-\frac{\pi}{۴}$ اور $۲ن\pi+\frac{\pi}{۴}$

(۲) $۲ن\pi+\frac{۳\pi}{۴}$ اور $۲ن\pi+\frac{۵\pi}{۴}$

(۳) $۲ن\pi+\frac{۵\pi}{۴}$ اور $۲ن\pi+\frac{۷\pi}{۴}$

امثلہ ۱۹ (صفحات ۱۸۰-۱۸۱)

۱۲- زاویہ کی جیب ۲ جب ۱۸° کے برابر ہے

۱۳- $\frac{\text{ن}\pi}{8}$ یا $\left(2\text{ن} \pm \frac{1}{3}\right)\frac{\pi}{8}$

امثلہ ۲۱ (صفحات ۱۹۸-۲۰۰)

۱- $\frac{\text{ن}\pi}{4}$ یا $\frac{1}{3}\left(2\text{ن}\pi \pm \frac{\pi}{3}\right)$

۲- $\left(\text{ن} + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{4}$ یا $\left(2\text{ن} \pm \frac{1}{3}\right)\frac{\pi}{3}$

۳- $\left(\text{ن} + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$ یا $2\text{ن}\pi$

۴- $\left(\text{ن} + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{3}$ یا $\text{ن}\pi + (-1)^{\text{ن}}\frac{\pi}{6}$

۵- $\frac{2\text{ن}\pi}{3}$ یا $\left(\text{ن} + \frac{1}{4}\right)\pi$ یا $\left(2\text{ن} - \frac{1}{2}\right)\pi$

۶- $\frac{\text{ن}\pi}{3}$ یا $\left(2\text{ن} \pm \frac{1}{3}\right)\frac{\pi}{4}$

۷- $\left(\text{ن} + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$ یا $2\text{ن}\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

۸- $\frac{\text{ن}\pi}{4}$ یا $\left(\text{ن} \pm \frac{1}{4}\right)\pi$

۹- $2\text{ن}\pi$ یا $\left(\frac{2\text{ن}}{3} + \frac{1}{2}\right)\pi$

۱۰- $\text{ن}\pi + (-1)^{\text{ن}}\frac{\pi}{6}$ یا $\text{ن}\pi + (-1)^{\text{ن}}\frac{\pi}{10}$ یا $\text{ن}\pi - (-1)^{\text{ن}}\frac{3\pi}{10}$

۱۱- $(ن + \frac{1}{2})\frac{\pi}{8}$ یا $(ن + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}$

۱۲- $م\pi$ یا $\frac{1}{1-ن}\left[م\pi - (-1)^{م}\frac{\pi}{6}\right]$

۱۳- $۲م\pi$ یا $\frac{۲م\pi}{ن\pm 1}$ ۱۴- $\frac{۲ر\pi}{م+ن}$ یا $(۲ر+1)\frac{\pi}{م-ن}$

۱۵- $(۲ر+1)\frac{\pi}{م\pm ن}$

۱۶- $م\pi$ یا $\frac{م\pi}{1-ن}$ یا $(م+\frac{1}{2})\frac{\pi}{ن}$

۱۷- $۲ن\pi - \frac{\pi}{2}$ ، $\frac{1}{5}(۲ن\pi - \frac{\pi}{2})$

۱۸- $ن\pi + (-1)^{ن}\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}$ ۱۹- $۲ن\pi + \frac{\pi}{4}$

۲۰- $ن\pi + \frac{\pi}{6} + (-1)^{ن}\frac{\pi}{4}$ ۲۱- $۲ن\pi + \frac{\pi}{4} \pm \alpha$

۲۲- $۲۱^\circ\ ۴۸' + ن \times ۱۸۰^\circ + (-1)^{ن}\left[۴۸^\circ\ ۱۲'\right]$

۲۳- $۲ن \times ۱۸۰^\circ + ۷۸^\circ\ ۵۸'$ ، $۲ن \times ۱۸۰^\circ + ۲۷^\circ\ ۱۸'$

۲۴- $ن \times ۱۸۰^\circ + ۴۵^\circ$ ، $ن \times ۱۸۰^\circ + ۲۶^\circ\ ۳۴'$

۲۵- $۲ن\pi + \frac{۲\pi}{3}$ ۲۶- $۲ن\pi$ یا $۲ن\pi + \frac{\pi}{2}$

۲۷- $۲ن\pi + \frac{\pi}{2}$ یا $۲ن\pi - \frac{\pi}{3}$ ۲۸- $۲ن\pi + \frac{\pi}{6}$

۲۹- $ن\pi$ ۳۰- $جب\ ط = \frac{\pm\sqrt{17} - 1}{8}$

۳۱- جم ط = $\frac{\sqrt{\text{۱۷}}-\text{۳}}{\text{۴}}$ ۳۲- ن π ± $\frac{\pi}{\text{۳}}$ یا ن π + $\frac{\pi}{\text{۲}}$

۳۳- ۲ن π ± $\frac{\pi}{\text{۳}}$، ۲ن π ± $\frac{\pi}{\text{۴}}$ ۳۴- (ن + $\frac{\text{۱}}{\text{۴}}$) $\frac{\pi}{\text{۲}}$

۳۵- ن π ± $\frac{\pi}{\text{۴}}$ ۳۶- ن π + $\frac{\pi}{\text{۴}}$

۳۷- ط = $\frac{\text{ن}\pi}{\text{۲}}$ یا ن π ± $\frac{\pi}{\text{۳}}$ نیز ط = ن π ± $\frac{\text{ع}}{\text{۲}}$ جہاں جم ع = $\frac{\text{۱}}{\text{۳}}$

۳۸- (ن + $\frac{\text{۱}}{\text{۳}}$) $\frac{\pi}{\text{۳}}$ ۳۹- ن π ± $\frac{\pi}{\text{۳}}$

امثلہ ۲۳ (صفحات ۲۲۳-۲۲۴)

۱- ۱̄٫۹۰۳۰۹، ۳̄٫۴۷۷۱۲۱۳، ۲̄٫۰۳۳۴۲۳۹، ۱̄٫۴۶۵۰۳۸۹

۲- ٫۱۵۵۳۳۶۱، ۲٫۱۲۴۱۷۸۱، ٫۵۳۸۸۳۴۰،
۱̄٫۰۷۵۹۶۲۳

۳- ۲، ۲̄، ۰، ۴̄، ۲̄، ۰، ۳ ۴- ٫۳۱۲۹۳۶

۵- ۱٫۳۲۰۵۷، ۵٫۸۸۴۵۳، ٫۴۶۱۷۹۱

۶- (۱) ۲۱ (۲) ۱۳ (۳) ۳۰ (۴) ساتواں (۵) ۲۱واں
(۶) ۳۲واں

۷- (۱) $\frac{\text{۴ب}}{\text{ج − ب − ا}}$ (۲) $\frac{\text{ا + ۲ب}}{\text{۴ج − ۳ب − ۲ا}}$

(۳) $\frac{\text{۴ا + ۷ب}}{\text{ا + ۳ب − ۲ج}}$ (۴) $\frac{\text{۲ب(۲ا − ب)}}{\text{۵اب + ۳اج − ۲ب}^{\text{۲}}\text{ − بج}}$

اور ۲اب / (۵اب + ۳اج - ۲ب۲ - بج)

جہاں ا = لوک ۲، ب = لوک ۳ اور ج = لوک ۷

۸- ٫۲۲۲۲۱ ۹- ۸٫۶۴۱۵ ۱۰- ۹٫۶۱۹۲

۱۱- ۱٫۶۳۸۹ ۱۲- ۴٫۷۱۶۲ ۱۳- ٫۴۱۴۳۱

امثلہ ۲۴ (۲۳۸ - ۲۴۱)

۱- ۴٫۵۵۲۷۳۷۵ ، ۱٫۵۵۲۷۳۹۴

۲- ۳٫۷۶۸۹۵۲۹ ، $\bar{۳}$٫۷۶۸۹۵۰۲

۳- ۴۷۸٫۴۷۵ ، ٫۰۰۴۷۸۴۷۷۷

۴- ۲٫۵۸۳۶۷۴ ، ٫۰۲۵۸۳۶۲

۵- (۱) ۴٫۷۲۰۴۸۱۵ (۲) ۲٫۷۲۲۰۴۶۲

(۳) $\bar{۴}$٫۷۲۴۰۰۷۹ (۴) ۵۲۷۳٫۶۳

(۵) ٫۰۵۲۹۶۷۲۶ (۶) ۵٫۲۶۰۶۴

۶- ٫۶۸۷۰۴۱۷ ۷- ۳۲° ۲۳′ ۴۵″

۸- ٫۸۴۵۵۱۰۴ ، ٫۸۴۵۴۵۰۹

۹- ۳۲° ۱۶′ ۳۵″ ، ۳۲° ۱۶′ ۲۱″

۱۰- ۴٫۱۲۰۳۰۶۰ ، ۴٫۱۲۱۸۷۴۸

۱۱- ۴٫۳۹۹۳۲۶۳ ، ۴٫۳۹۷۶۸۲۳

۱۲- ۱۳° ۸′ ۳۷″ ۱۳- ۹٫۹۱۴۷۳۳۴

۱۴- ۳۴° ۴۳′ ۲۷″

۱۵- ۹٫۵۲۵۴۴۹۷، ۷۱° ۲۷′ ۴۳″

۱۶- ۱۰٫۰۲۲۹۴۱۴ ۱۷- ۸° ۲۷′ ۱۷″

۱۸- ۳۶° ۵۲′ ۱۲″

امثلہ ۲۵ (صفحات ۲۴۹-۲۵۱)

۱- ۱۳° ۲۷′ ۳۱″ ۲- ۶۲° ۱′ ۴۸″

۳- ۱٫۰۹۹۷۳۴۰، ۶۵° ۲۴′ ۱۲٫۵″

۴- ۹٫۶۱۹۸۵۰۹، ۲۲° ۳۶′ ۴۸″

۵- ۱۰° ۱۵′ ۳۴″ ۶- ۴۴° ۵۵′ ۵۵″

۷- (۱) ۹٫۷۲۷۹۰۴۳ (۲) ۹٫۹۲۷۰۸۵۷

(۳) ۱۰٫۱۹۵۸۹۱۷ (۴) ۱۰٫۰۷۵۷۹۰۷

(۵) ۱۰٫۲۰۰۱۳۳۷ (۶) ۱۰٫۰۷۲۵۰۲۷

(۷) ۹٫۷۲۴۵۱۶۲

۸- (۱) ۵۷° ۳۰′ ۲۴″ (۲) ۵۷° ۳۱′ ۵۸″

(۳) ۳۲° ۳۱′ ۱۵″ (۴) ۵۷° ۶′ ۳۹″

۹- ٫۵۳۷۳۶۰۲

۱۰- (۱) جم (لا-ما) قطلا قطما (۲) جم(لا+ما) قطلا قطما

(۳) جم(لا-ما) قم لا قطما

(۴) جم (لا+ما) قم لا قطما

(۵) مس۲ لا (۶) مس لا مس ما

امثلہ ۲۶ (۲۶۰ تا ۲۶۱)

۱۔ $\frac{۱}{۵}$ ، $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۹}{۷}$

۲۔ $\frac{۴}{۴۱\frac{۱}{۲}}$ ، $\frac{۳}{۵}$ اور $\frac{۸}{۴۱\frac{۱}{۲}۵}$ ، $\frac{۴۰}{۴۱}$ ، $\frac{۲۴}{۲۵}$ اور $\frac{۴۹۶}{۱۰۲۵}$

۳۔ $\frac{۳}{۵}$ ، $\frac{۴}{۵}$ ، ۱ ۴۔ $\frac{۵}{۱۲}$ ، $\frac{۱۲}{۵}$ اور ∞

۵۔ $\frac{۴}{۵}$ ، $\frac{۵۶}{۶۵}$ اور $\frac{۱۲}{۱۳}$

۶۔ $\frac{۷}{۴۱}$ اور $\frac{۲۸۷}{۸۱۶}$ ۷۔ °۶۰ ، °۴۵ ، °۷۵

امثلہ ۲۷ (صفحات ۲۶۸ تا ۲۷۲)

۲۳۔ $۱۶\frac{۴}{۵}$ فٹ ۲۵۔ $\frac{۲}{۵}$ ۲۸۔ $\frac{۳۱۳}{۳۳۸}$

امثلہ ۲۸ (صفحات ۲۷۵–۲۷۶)

۱۔ ۶۰ء۱۸۶ اور ۱۸ء۱۹۳

۲۔ °۲۶ ′۳۳ ″۵۴ ، °۹۳ ′۲۶ ″۶ ، $۱۰\frac{۱}{۲}$ فٹ

۳۔ °۴۸ ′۳۵ ″۲۵ ، °۳۶ ′۵۲ ″۱۲ ، °۹۴ ′۳۲ ″۲۳

۴۔ °۷۵ اور °۱۵

امثلہ ۲۹ (۲۷۹ تا ۲۸۰)

۱۔ °۹۰ ۲۔ °۳۰ ۴۔ °۱۲۰

۵- ۴۵° ، ۱۲۰° ، ۱۵°   ۶- ۳۵° ، ۹۰° ، ۵۵°

۷- ۵۸° ۵۹′ ۳۳″   ۸- ۷۷° ۱۹′ ۱۱″

۹- ۷۶° ۳۹′ ۵″   ۱۰- ۱۰۴° ۲۸′ ۳۹″

۱۱- ۵۶° ۱۵′ ۴″ ، ۵۹° ۵۱′ ۱۰″ ، ۶۳° ۵۳′ ۴۶″

۱۲- ۳۸° ۵۶′ ۳۳″ ، ۴۷° ۴۱′ ۷″ ، ۹۳° ۲۲′ ۲۰″

۱۳- ۳۰° ۴۲′ ۲۰٫۵″ ، ۳۳° ۲۷′ ۸٫۵″ اور

۲۵° ۵۰′ ۳۱″

امثلہ ۳۰ (صفحات ۲۸۶ تا ۲۹۰)

۱- ۹۳° ۱۳′ ۲″ ، ۴۳° ۵۸′ ۲۸″

۲- ۱۱۷° ۳۸′ ۴۵″ ، ۲۷° ۳۸′ ۴۵″

۳- ۸√۳ فٹ ، ۷۹° ۶′ ۲۴″ ، ۶۰° ، ۴۰° ۵۳′ ۳۶″

۴- ۸۷° ۲۷′ ۲۵٫۵″ ، ۳۲° ۳۲′ ۳۴٫۵″

۵- ۴۰° ۵۳′ ۳۶″ ، ۱۹° ۶′ ۲۴″ ، √۳ : ۲

۶- ۷۱° ۴۴′ ۳۰″ : ۴۸° ۱۵′ ۳۰″

۷- ۷۸° ۱۷′ ۴۰″ ، ۴۹° ۳۶′ ۲۰″

۸- ۱۰۸° ۱۲′ ۲۶″ ، ۴۹° ۲۷′ ۳۴″

۹- ا = ۴۵° ، ب = ۷۵° ، ج = √۶

۱۰- √۶ ، ۱۵° ، ۱۰۵°

۱۱- ٫۸۹۶۵   ۱۴- ۴۰ گز ، ۱۲۰° ، ۳۰°

۱۵- ۷٫۵۸۹۴۶۷ ، ۱۰۸° ۲۶′ ۶″ ، ۱۸° ۲۶′ ۶″ ، ۵۳° ۷′ ۶″ ،

۱۶- ۲٫۵۲۹۸۲۳

۱۷- ۲۲۶٫۸۷، ۷۳° ۳۴′ ۵۰″، ۳۹° ۴۵′ ۱۰″

۱۸- ا = ۸۳° ۷′ ۳۹″، ب = ۴۲° ۱۶′ ۲۱″،
ج = ۱۹۹٫۰۹۹

۱۹- ب = ۱۱۰° ۴۸′ ۱۵″، ج = ۲۶° ۵۶′ ۱۵″ اور
ا = ۹۳٫۵۱۹۲

۲۰- ۷۳° ۱′ ۵۱″ اور ۴۸° ۴۱′ ۹″

۲۱- ۸۸° ۳۰′ ۱″ اور ۳۳° ۳۰′ ۵۹″

امثلہ ۳۱ (صفحات ۲۹۸ تا ۳۰۰)

۱- مثلث نہیں بن سکتا۔

۲- ب۱ = ۳۰°، ج۱ = ۱۰۵°، بَج۱ = √۲ اور ب۲ = ۶۰°
ج۲ = ۷۵° اور بَج۲ = √۶

۳- ب۱ = ۱۵°، ج۱ = ۱۳۵°، بَ۱ = ۵۰ (√۶ − √۲)
اور ب۲ = ۱۰۵°، ج۲ = ۴۵°، بَ۲ = ۵۰ (√۶ − √۲)

۵- ۴√۳ ± ۲√۵

۶- ۱۰۰√۳، مثلث قائم الزاویہ ہے

۸- ۳۳° ۲۹′ ۳۰″ اور ۱۰۱° ۳۰′ ۳۰″

۹- ۱٫۱۷ یا ۳٫۶۸

۱۰- (۱) مثلث قائم الزاویہ ہے اور ب = ۹۰°

(۲) ب۱ = ۶۰٫۳۸۹۳، ب۱ = ۸° ۴۱′ اور ج۱ = ۱۳۱° ۱۹′

ب۲ = ۱۱۱° ۱۹′ اور ج۲ = ۳۸° ۴۱′

۱۱- ۹۵° ۵۹′ اور ۴۱° ۵۶′ ۱۲″

۱۲- ۔۔۔۔۔۔۵٫۹۸۸ اور ۔۔۔۔۔۔۲٫۹۷۱۸ میل فی گھنٹہ

۱۳- ۶۳° ۲′ ۱۲″ یا ۱۱۶° ۵۷′ ۴۸″

۱۴- ۶۲° ۳۱′ ۲۳″ اور ۱۰۲° ۱۷′ ۳۷″

یا ۱۱۷° ۲۸′ ۳۷″ اور ۴۷° ۲۰′ ۲۳″

۱۵- ۵۹۲۶٫۶۱

امثلہ ۳۲ (صفحات ۳۰۱-۳۰۳)

۱- ۷ : ۹ : ۱۱ ۴- ۷۹٫۰۶۳

۵- ۱ میل، ۱٫۲۱۹۷۱۴ میل ۷- ۔۔۔۲۰٫۹۷۶۱۶ فٹ

۸- ۔۔۔۔۶٫۸۵۶۷۴ اور ۔۔۔۔۵٫۴۳۷۸۴۶۸ فٹ

۹- ۴۰۴٫۴۳۵۲ فٹ

۱۰- ۲۳۳٫۲۸۸۴ گز ۱۱- ۲۲۲۹ گز

امثلہ ۳۳ (صفحات ۳۱۰-۳۱۶)

۱- ۱۰۰ فٹ اونچا اور ۵۰ فٹ چوڑا، ۲۵ فٹ

۲- ۲۵٫۷۸۳۴ مربع گز ۳- ۔۔۔۔۳۳٫۰۷ فٹ، ½۱۷ فٹ

۴ــ ۱۸ء۳ فٹ
۵ــ ۱۲۰ فٹ
۶ــ ح مس عہ مم بہ
۷ــ ۱۹۳۹ء۲ فٹ
۸ــ ۱۰۰ فٹ
۹ــ ۶۱ء۲۲۴ فٹ

۱۰ــ ۱۰۰ √۲ فٹ

۱۵ــ ف ق = ب ف = ب ق = ۱۰۰۰ فٹ،

ا ف = ۵۰۰ (√۶ − √۲) فٹ

ا ق = ۱۰۰۰ √۲ فٹ

۱۶ــ ء۳۲۱۱۹ میل

۱۷ــ ء۱۷۳۶۴۵۲ میل، ء۹۸۴۸۰۷۸ میل

۱۸ــ ۱۱۹ء۲۸۶۲ فٹ
۱۹ــ ۱۳۲ء۲۶۶ فٹ

۲۰ــ ۲۳۵ء۸۰۳۴ گز
۲۱ــ ۱ء۴۲۷۷۱ میل

۲۲ــ ۱۲۵ء۳۱۶۷ فٹ

امثلہ ۳۴ (صفحات ۳۲۱-۳۳۲)

۳ــ ۲۰ فٹ، ۴۰ فٹ

۴ــ ل قم جہ جہاں جہ سورج کا ارتفاع ہے،
جب جہ = ۱/۲

۵ــ ۳ء۷۳۲ میل، رفتار ــ ۱۲ء۳۴۲ میل فی گھنٹہ مشرق سے جنوب کی جانب میں ایک ایسا زاویہ بناتی ہے جس کا مماس √۳ + ۱ ہے۔

۶— ۱۰۲۴۲۶ میل فی گھنٹہ

۷— ۱۶٫۳۹۲۳ میل، ۱۴٫۶۹۷ میل

۸— ۲٫۳۹ میل، ۱٫۳۶۶ میل

۹— زاویہ مطلوبہ کا ماس $\frac{۲}{۳}$ ہے، $\frac{۹}{۵۲}$ گھنٹہ

۱۳— ج جب ب قم (ع + بد)، ج جب ع جب بد قم (ع + بد)

۱۴— ۹ گز، ۲ گز　　۱۶— $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۱۲}{۳}$

۲۰— ٹیلے سے $\frac{۳۷۵}{۷۴}$ فٹ کے فاصلہ پر

۲۱— ج (۱ - جب ع) قاطعہ　　۲۲— ۱۱۴٫۴۱۲۳ فٹ

۲۴— ۱۰۶۹٫۷۴۵۶۴۵ فٹ　　۲۶— ایک ایسا زاویہ جسکا ماس ۲ ہے

۲۹— °۴۵　　۳۲— °۱۸ ′۲۶ ″۶

۳۴— مس ع قط بد: ۱　　۳۷— ۹۱٫۸۹۶ فٹ

۳۸— ۱۹۶٫۰۹۵ گز　　۳۹— ۲٫۴۵۸۳۲ میل

۴۰— ۳۳۳٫۴۹۳۲ فٹ

امثلہ ۳۵ (صفحات ۳۳۴ تا ۳۳۶)

۱— ۸۴　　۲— ۲۱۶　　۳— ۹۳۰

۴— ۳۷۲۰　　۵— ۲۷۰　　۶— ۱۱۷۰۹۶

۷— ۱۴۷۰　　۸— ۱٫۱۸۳

۱۲— ۳۵ گز اور ۲۶ گز　　۱۳— ۱۴٫۹۴۱ انچ

۱۴- ۵، ۷، ۸ فٹ　　۱۵- °۱۲۰

۱۷- °۴۵ اور °۱۰۵، °۳۵ اور °۱۵

۱۸- ۔۔۔۔ ۱۷٫۱۰۶۴ مربع انچ

امثلہ ۳۶ (صفحات ۳۴۵ تا ۳۴۷)

۳- $۸\frac{۱}{۸}$، $۱\frac{۱}{۲}$، ۸، ۲، ۲۴ بالترتیب

امثلہ ۳۷ (۳۵۹ — ۳۶۴)

۳۵- ہر ایک دائرہ کے نصف قطر کا ۔۔۔۔ ۲٫۱۵۴۷ یا ۱۵۴۷ اگنا

۳۹- $ا_ن = \frac{\pi}{۳} + (-۱)^ن \times ۲^ن \times (ا - \frac{\pi}{۳})$......

امثلہ ۳۸ - (صفحات ۳۷۱ تا ۳۷۳)

۱- (۱) $۳\sqrt{۱۰۵}$ مربع فٹ　(۲) $۱۰\sqrt{۷}$ مربع فٹ

۳　$۱\frac{۵}{۷}$ اور $۲\frac{۱}{۲}$ فٹ

امثلہ ۳۹ (صفحات ۳۷۷ تا ۳۸۰)

۱- ۹۸٫۷۷ مربع انچ　　۲- ۵۳۵۹٫

۳- (۱) ۔۔۔۔ ۱٫۷۲۰ مربع فٹ　(۲) .... ۲٫۵۹۸ مربع فٹ

(۳) ۔۔۔۔ ۳٫۸۲۸۴ مربع فٹ　(۴) .... ۷٫۶۹۴ مربع فٹ

(۵) ۔۔۔۔ ۱۱٫۱۹۶ مربع فٹ

۴— ۱ء۸۸۹۹ مربع فٹ   ۵— ۳ء۳۱۳۶ مربع فٹ

۶— $۲+\sqrt{۳}:۴$ ، $\sqrt{۲+\sqrt{۳}}:۲$

۱۲— ۳   ۱۴— ۶

۱۵— ۹   ۱۶— ۲۰ اور ۱۰

۱۷— ۶ اور ۵ ، ۱۲ اور ۸ ، ۱۸ اور ۱۰

۲۲ اور ۱۱ ، ۲۷ اور ۱۳ ، ۴۲ اور ۱۴

۵۴ اور ۱۵ ، ۷۲ اور ۱۶ ، ۱۰۲ اور ۱۷

۱۶۲ اور ۱۸ ، ۳۴۲ اور ۱۹ اضلاع بالترتیب

۱۹— $\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}$ ، $\sqrt{۶}$

امثلہ ۴۰ (صفحات ۳۸۶-۳۸۸)

۱— ء۰۰۲۰۴   ۲— ء۰۰۰۷

۳— ء۰۰۰۹   ۴— ء۹۹۹۹۹

۵— ۲۵۷۸۳ء۱۰۰۷۷   ۶— ۱ء۰۰۰۰۰۱۱

۷— ′۳۴ ″۲۳   ۸— °۶۸ ′۴۰ ″۳۷

۹— ′۳۹ ″۴۲   ۱۰— °۲ ′۳۳ ″۴۴

۱۱— ۱۱۴ء۵۹ انچ

امثلہ ۴۱ (صفحات ۳۸۹-۳۹۱)

۱— ۴۳۵ء۷۷ مربع فٹ   ۲— ۴ء۹۰۸۷ مربع فٹ

۳— °۱۲۷ ′۱۹ ″۲۶   ۴— ۶ مربع فٹ

۵- ۱۱٫۰۰۴ پخ ۶- ٫۰۰۰۴۴۶۲۵ پخ

۷- $\frac{۲}{۳}$ ۱۱ ر

امثلہ ۴۲ (صفحات ۳۹۳-۳۹۵)

۱- ۹° ۸′ ۴۵″ ۲- ۱۷٫۲۳ میل

۳- ۱۶٫۱ میل، ۹° ۴۸′ تقریباً

۸- تقریباً ۶۱۸۰۰ میٹر = تقریباً $\frac{۱}{۲}$ ۳۸ میل

۹- ۳۹۶۰ میل

امثلہ ۴۳ (صفحات ۴۰۲-۴۰۶)

۲۸- $\pm\sqrt{\text{جب}^{۲}\,\text{بہ}}$ ۲۹- $\frac{۱}{۶}$

۳۰- $\pm\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$ ۳۱- $۴\sqrt{\frac{۳}{۷}}$

۳۲- $\frac{۱}{۴}$ ۳۳- $\text{ن}\pi$ یا $\text{ن}\pi+\frac{\pi}{۴}$

۳۴- $\sqrt{۳}$ ۳۵- $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$

۳۶- $\sqrt{۳}$ یا $-(\sqrt{۳}+۲)$

۳۷- $\sqrt{۳}$ یا $\sqrt{۳}-۲$

۳۸- ن یا $\text{ن}^{۲}-\text{ن}+۱$ ۳۹- $\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۳}{۷}}$

۴۰- ۱۳

۴۱- لامساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے

لاَ - لاَ (اب + اج + اد + ب ج + ب د + ج د) + اب ج د = ۰

۴۲ - لا = اب

۴۳ - اب + [ا √(ا۲ - ۱) + ب √(ب۲ - ۱)]

۴۴ - (ا - ب) / (۱ + اب)

امثلہ ۴۴ (صفحات ۴۱۳ - ۴۱۶)

۱ - ۱/۲ جب ۲ن طہ قم طہ

۲ - جم (۳ن - ۱)/۴ ا جب ۳ن/۴ ا قم ۳/۴ ا

۶ - ۱/۲

۷ - جب [عہ + (ن - ۱/۲) بہ] جب ن بہ قط بہ/۲

۸ - جب ن طہ / (ن - ۲)

۹ - جب ۲ن لا (جم ۲ن لا + جب ۲ن لا) (جم لا + جب لا) قم ۲ لا

۱۰ - ۱/۴ [(ن + ۱) جب ۲ عہ - جب (۲ن + ۲) عہ] قم عہ

۱۱ - ۱/۲ جب (۲ن + ۲) عہ × جب ۲ن عہ قم عہ

۱۲ - ن/۲ جم ۲ عہ - ۱/۲ جم (ن + ۳) عہ جب ن عہ قم عہ

۱۳- [جم (۲ن عہ - عہ) جم (ن+۱) بہ - جم (۲ن عہ + عہ) جم ن بہ + جم عہ (۱ - جم بہ)] / [۲ (جم بہ - جم ۲ عہ)]

۱۴- ¼ [(۲ن+۱) جب عہ - جب (۲ن+۱) عہ] قم عہ

۱۵- ن/۲ - ½ جم [۲ط + (ن-۱) عہ] جب ن عہ قم عہ

۱۶- ۳/۴ جب (ن+۱)/۲ عہ جب ن عہ/۲ قم عہ/۲

- ¼ جب ۳ (ن+۱)/۲ عہ × جب ۳ن عہ/۲ قم ۳عہ/۲

۱۷- ⅛ [۳ن - ۴ جم (ن+۱) عہ جب ن عہ قم عہ

+ جم (۲ن+۲) عہ جب ۲ن عہ قم ۲عہ]

۱۸- ⅛ [۳ن + ۴ جم (ن+۱) عہ جب ن عہ قم عہ

+ جم (۲ن+۲) عہ جب ۲ن عہ قم ۲عہ]

۱۹- ¼ جب ن ط/۲ [جم (ن-۱)/۲ ط + جم (ن+۳)/۲ ط + جم (ن+۷)/۲ ط] قم ط/۲

+ ¼ جب ۳ن ط/۲ جم (۳ن+۹)/۲ ط قم ۳ط/۲

۲۰- - ½ جب (۲عہ + ۲ن بہ) جب ۲ن بہ قط بہ

امثلہ ۴۵ (صفحات ۴۲۲-۴۲۳)

۱- ا² + ب² = ج² + د²

۲- لا²/ا² + ما²/ب² − ۲لاما/اب جم(عہ − بہ) = جب²(عہ − بہ)

۳- ا(۲ج² − د²) = ب د ج

۴- ا جب ہ + ب جم عہ = ۲√(ب(ا + ب))

۵- لا²/ا² + ما²/ب² = ۱

۶- لا²/ا + ما²/ب = ا + ب

۷- (ف² + ۱)² + ۲ق(ف² + ۱)(ف + ق) = ۴(ف + ق)²

۸- (لا² + ما² − ب²)² = ا²[(لا + ب)² + ما²]

۱۱- ا² + ب² = ۲ + ۲ جم عہ

۱۲- لا ما = (ما − لا) مس عہ

۱۳- ا²(ا − ج)(ا − د) = ب²(ب − ج)(ب − د)

۱۴- ۸ ب ج = ا{۴ب² + (ب² − ج²)²}

۱۵- لا(ج² − ا² − ب²)
= ما√((ا + ب + ج)(−ا + ب + ج)(ا − ب + ج)(ا + ب − ج))

۱۶- ب[لا(ب² − ا²) + ا(ا² + ب²)] = ۴ج³[ب لا² + ا ما²]

متفرق مثالیں (صفحات ۴۳۲-۴۸۰)

۴- ۱۴۲ فٹ تقریباً ، ۴° ۳۰′ تقریباً

۵- ۴۱ ، ۵۰ ، ۲۱ فٹ

۷- جب (ب - ع) = ± √(۱ - ب²) √(۱ - ا²) ∓ ا ب

۹- ن π + ۳۸° ۷′ ۲۷″

۱۰- (ن + ۱/۴) π/۳ ۱۴- ۷ - ۳√۵ : ۲

۲۱- (۱) ط = ن π + (-۱)^ن (ع + ب)/۲

یا مس ط = (۱ - قم ع قم ب) مس (ع + ب)/۲

(۲) ط = ن π یا (ن ± ۱/۳) π/۳

۲۲- ۵۱° ۱۹′ ، ۷۸° ۲۸′ ، ۱۰۸° ۱۳′

۲۳- ۱۲۹۸ فٹ تقریباً ، ۱۳° ۳۱′ جنوب سے مشرق کی طرف کو۔

۲۸- ۸۰ فٹ ۳۰- ۱/۲ مس⁻¹ لا ، (۱ + لا)/(۱ - لا)

۳۱- (ل² + م²) (۱ - ن) = ۲م (۱ + ن)

۳۲- دو قیمتیں

۳۵- (م ± ۱/۱۲) π ، (ن ± ۱/۹) π

۴۷- (ل^{۲} − ۱)^{۳} = ۲۷ ل^{۲} جم^{۲} عہ جب^{۲} عہ

۴۸- ۱٫۳۹ نیم قطری = ۷۹° ۳۰′ تقریباً

۴۹- جب^{۲}(بہ − جہ) قط^{۲}(عہ − بہ) قط^{۲}(عہ − جہ)

۵۲- ۱۱° ۱۲′ مشرق سے شمال کی طرف کو

۵۴- چھ قیمتیں ۵۸- $\frac{۱}{۳}$[ن π۲ + $\frac{π}{۲}$ − عہ − بہ − جہ]

۵۹- ۷۷٫۲۷ فٹ

۶۲- ج √(۲ا − ب) = ا √(۲ا) − (ا − ب) √ب

۶۳- ۱۱۸$\frac{۱}{۲}$° ۶۴- −۱° ۱۹′ + ۲۸′$\frac{۱}{۲}$ + ۵۰ ۵′$\frac{۱}{۲}$ تقریباً

۶۹- $\dfrac{\text{ا جب عہ جب بہ}}{\sqrt{\text{جب(بہ − عہ) جب(بہ + عہ)}}}$

۷۳- جم(عہ + بہ + جہ + لہ) + جم(عہ + بہ − جہ − لہ)
+ جم(عہ − بہ + جہ − لہ) + جم(عہ − بہ − جہ + لہ) − جم(−عہ + بہ + جہ + لہ)
− جم(عہ − بہ + جہ + لہ) − جم(عہ + بہ − جہ + لہ) − جم(عہ + بہ + جہ − لہ)

۷۶- ۹۶° ۱۹′$\frac{۱}{۲}$ تقریباً ۸۰- لا = −۲٫۴۵۳۱

۸۲- مس طہ = ۲ ± √۱۱ یا ۲ ± √۳

مس فہ = ۲ ∓ √۱۱ یا ۲ ∓ √۳

۸۴- ۱۹٫۴۷ میل

۸۷ـ ۲۷ ما^۲ = لا^۲ (۹ − ۸ لا^۲)^۲

۹۴ـ ۲ ا^۳ + ج = ۳ ا (۱ + ب)

۹۵ـ جب $\frac{ن}{۲}$ط جب $\frac{(ن+۳)}{۲}$ط [۱ + ۲ جم ۲ ط] قم $\frac{ط}{۲}$

− جب $\frac{۳ن+۹}{۲}$ ط جب $\frac{۳ن ط}{۲}$ قم $\frac{۳ط}{۲}$

۹۶ـ ۲٫۵۵ نیمقطری = ۱۴۶° ۶′ تقریباً

۱۰۴ـ مس ط = ۰، ۱، −۱، −۲

۱۰۸ـ ۲۳۷۹ فٹ ۱۱۷ـ ۱۱° ۲۷′

۱۲۰ـ لا^۲ + ما^۲ = ا^۲ + ب^۲

۱۲۸ـ (ا^۲ + ب^۲)^۲ − ۴ ا^۲ = $\frac{۸ ا ب}{ج}$

۱۳۶ـ (لا + ما)$^{\frac{۲}{۳}}$ + (لا − ما)$^{\frac{۲}{۳}}$ = ۲

۱۳۸ـ

$\frac{م ج + ن ا + \sqrt{م^۲ ج^۲ + ن^۲ ا^۲ + ۲ م ن ا ج جم (ع − ح)}\ جب (ن ت + ...)}{م + ن}$

جہاں مس بہ = (م ج جب ح + ن ا جب ع) ÷ (م ج جم ح + ن ا جم ع)

۱۴۶ـ م^۲ + م جم ھ = ۲ ۱۴۸ـ ٪۷۷ $\frac{۱}{۱۱}$ ، ۹۳ $\frac{۱}{۲}$

۱۵۱ـ (لا^۲ + ما^۲ + ۲ ا لا)^۲ = ۴ ا^۲ (لا^۲ + ما^۲)

۱۶۱- (۱- لاً - ماً) جب (عہ - لہ) جب (بہ - جہ)

۱۷۶- اً + ب۲ + ج۲ - ۲ ب۲ج۲ - ۲ج۲اً - ۲ اً ب۲ = ۰

۱۷۷- لاً ماً - ۴ لا ما = (لا + ما)۲ مس۲ (بہ - عہ)

۱۷۸- ب۲ (۲ لا - ما)۲ {۹ (لاً - ماً) - ب۲}

= ۸ (لاً - ماً)۲ + ۴ ب۲ (لاً - ماً)

۱۸۱- تین قیمتیں ' ۲۹۹ء تقریباً

۱۸۲- ۹۸ء ۵۶ = ۹۸ء نیمقطری ' ۹ تقریباً

۱۸۵- ۲ء۰۷ اور - ۱ء۲۳

عددوں کے لوگارتھم

طبعی جیوب، طبعی مماس

لوگارتمی جیوب اور لوگارتمی مماس وغیرہ

جدول اوّل

عددوں کے لوکارتم

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	فرق ۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱۰	۰۰۰۰۰	۰۰۴۳۲	۰۰۸۶۰	۰۱۲۸۴	۰۱۷۰۳	۰۲۱۱۹	۰۲۵۳۱	۰۲۹۳۸	۰۳۳۴۲	۰۳۷۴۳	۴۲	۸۳	۱۲۵	۱۶۶	۲۰۸	۲۴۸	۲۹۰	۳۳۱	۳۷۳
۱۱	۰۴۱۳۹	۰۴۵۳۲	۰۴۹۲۲	۰۵۳۰۸	۰۵۶۹۰	۰۶۰۷۰	۰۶۴۴۶	۰۶۸۱۹	۰۷۱۸۸	۰۷۵۵۵	۳۸	۷۶	۱۱۴	۱۵۲	۱۹۰	۲۲۷	۲۶۵	۳۰۲	۳۴۰
۱۲	۰۷۹۱۸	۰۸۲۷۹	۰۸۶۳۶	۰۸۹۹۱	۰۹۳۴۲	۰۹۶۹۱	۱۰۰۳۷	۱۰۳۸۰	۱۰۷۲۱	۱۱۰۵۹	۳۵	۷۰	۱۰۵	۱۴۰	۱۷۵	۲۰۹	۲۴۳	۲۷۸	۳۱۳
۱۳	۱۱۳۹۴	۱۱۷۲۷	۱۲۰۵۷	۱۲۳۸۵	۱۲۷۱۰	۱۳۰۳۳	۱۳۳۵۴	۱۳۶۷۲	۱۳۹۸۸	۱۴۳۰۱	۳۲	۶۵	۹۷	۱۲۹	۱۶۲	۱۹۳	۲۲۵	۲۵۸	۲۹۰
۱۴	۱۴۶۱۳	۱۴۹۲۲	۱۵۲۲۹	۱۵۵۳۴	۱۵۸۳۶	۱۶۱۳۷	۱۶۴۳۵	۱۶۷۳۲	۱۷۰۲۶	۱۷۳۱۹	۳۰	۶۰	۹۰	۱۲۰	۱۵۰	۱۸۰	۲۱۰	۲۴۰	۲۷۰
۱۵	۱۷۶۰۹	۱۷۸۹۸	۱۸۱۸۴	۱۸۴۶۹	۱۸۷۵۲	۱۹۰۳۳	۱۹۳۱۲	۱۹۵۹۰	۱۹۸۶۶	۲۰۱۴۰	۲۸	۵۶	۸۴	۱۱۲	۱۴۰	۱۶۸	۱۹۶	۲۲۴	۲۵۲
۱۶	۲۰۴۱۲	۲۰۶۸۳	۲۰۹۵۲	۲۱۲۱۹	۲۱۴۸۴	۲۱۷۴۸	۲۲۰۱۱	۲۲۲۷۲	۲۲۵۳۱	۲۲۷۸۹	۲۶	۵۳	۷۹	۱۰۵	۱۳۲	۱۵۸	۱۸۳	۲۱۰	۲۳۶
۱۷	۲۳۰۴۵	۲۳۳۰۰	۲۳۵۵۳	۲۳۸۰۵	۲۴۰۵۵	۲۴۳۰۴	۲۴۵۵۱	۲۴۷۹۷	۲۵۰۴۲	۲۵۲۸۵	۲۵	۵۰	۷۴	۹۹	۱۲۴	۱۴۹	۱۷۴	۱۹۹	۲۲۳
۱۸	۲۵۵۲۷	۲۵۷۶۸	۲۶۰۰۷	۲۶۲۴۵	۲۶۴۸۲	۲۶۷۱۷	۲۶۹۵۱	۲۷۱۸۴	۲۷۴۱۶	۲۷۶۴۶	۲۳	۴۶	۷۰	۹۳	۱۱۶	۱۴۱	۱۶۴	۱۸۸	۲۱۱
۱۹	۲۷۸۷۵	۲۸۱۰۳	۲۸۳۳۰	۲۸۵۵۶	۲۸۷۸۰	۲۹۰۰۳	۲۹۲۲۶	۲۹۴۴۷	۲۹۶۶۷	۲۹۸۸۵	۲۲	۴۵	۶۷	۸۹	۱۱۱	۱۳۳	۱۵۶	۱۷۸	۲۰۱

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	فرق ۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۲۰	۳۰۱۰۳	۳۰۳۲۰	۳۰۵۳۵	۳۰۷۵۰	۳۰۹۶۳	۳۱۱۷۵	۳۱۳۸۷	۳۱۵۹۷	۳۱۸۰۶	۳۲۰۱۵	۲۱	۴۲	۶۳	۸۵	۱۰۶	۱۲۷	۱۴۸	۱۷۰	۱۹۱
۲۱	۳۲۲۲۲	۳۲۴۲۸	۳۲۶۳۴	۳۲۸۳۸	۳۳۰۴۱	۳۳۲۴۴	۳۳۴۴۵	۳۳۶۴۶	۳۳۸۴۶	۳۴۰۴۴	۲۰	۴۰	۶۱	۸۱	۱۰۱	۱۲۱	۱۴۱	۱۶۲	۱۸۲
۲۲	۳۴۲۴۲	۳۴۴۳۹	۳۴۶۳۵	۳۴۸۳۰	۳۵۰۲۵	۳۵۲۱۸	۳۵۴۱۱	۳۵۶۰۳	۳۵۷۹۳	۳۵۹۸۴	۱۹	۳۹	۵۸	۷۷	۹۷	۱۱۶	۱۳۵	۱۵۴	۱۷۴
۲۳	۳۶۱۷۳	۳۶۳۶۱	۳۶۵۴۹	۳۶۷۳۶	۳۶۹۲۲	۳۷۱۰۷	۳۷۲۹۱	۳۷۴۷۵	۳۷۶۵۸	۳۷۸۴۰	۱۹	۳۷	۵۶	۷۴	۹۳	۱۱۱	۱۳۰	۱۴۸	۱۶۷
۲۴	۳۸۰۲۱	۳۸۲۰۲	۳۸۳۸۲	۳۸۵۶۱	۳۸۷۳۹	۳۸۹۱۷	۳۹۰۹۴	۳۹۲۷۰	۳۹۴۴۵	۳۹۶۲۰	۱۸	۳۶	۵۳	۷۱	۸۹	۱۰۷	۱۲۴	۱۴۲	۱۶۰
۲۵	۳۹۷۹۴	۳۹۹۶۷	۴۰۱۴۰	۴۰۳۱۲	۴۰۴۸۳	۴۰۶۵۴	۴۰۸۲۴	۴۰۹۹۳	۴۱۱۶۲	۴۱۳۳۰	۱۷	۳۴	۵۱	۶۸	۸۵	۱۰۲	۱۱۹	۱۳۶	۱۵۳
۲۶	۴۱۴۹۷	۴۱۶۶۴	۴۱۸۳۰	۴۱۹۹۶	۴۲۱۶۰	۴۲۳۲۵	۴۲۴۸۸	۴۲۶۵۱	۴۲۸۱۳	۴۲۹۷۵	۱۶	۳۳	۴۹	۶۶	۸۲	۹۸	۱۱۵	۱۳۱	۱۴۸
۲۷	۴۳۱۳۶	۴۳۲۹۷	۴۳۴۵۷	۴۳۶۱۶	۴۳۷۷۵	۴۳۹۳۳	۴۴۰۹۱	۴۴۲۴۸	۴۴۴۰۴	۴۴۵۶۰	۱۶	۳۲	۴۷	۶۳	۷۹	۹۵	۱۱۱	۱۲۶	۱۴۲
۲۸	۴۴۷۱۶	۴۴۸۷۱	۴۵۰۲۵	۴۵۱۷۹	۴۵۳۳۲	۴۵۴۸۴	۴۵۶۳۷	۴۵۷۸۸	۴۵۹۳۹	۴۶۰۹۰	۱۵	۳۰	۴۶	۶۱	۷۶	۹۱	۱۰۶	۱۲۲	۱۳۷
۲۹	۴۶۲۴۰	۴۶۳۸۹	۴۶۵۳۸	۴۶۶۸۷	۴۶۸۳۵	۴۶۹۸۲	۴۷۱۲۹	۴۷۲۷۶	۴۷۴۲۲	۴۷۵۶۷	۱۵	۲۹	۴۴	۵۹	۷۴	۸۸	۱۰۳	۱۱۸	۱۳۲

	عددوں کے لوگارثم										فرق								
	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۳۰	۴۷۷۱۲	۴۷۸۵۶	۴۸۰۰۱	۴۸۱۴۴	۴۸۲۸۷	۴۸۴۳۰	۴۸۵۷۲	۴۸۷۱۴	۴۸۸۵۵	۴۸۹۹۶	۱۴	۲۹	۴۳	۵۷	۷۲	۸۶	۱۰۰	۱۱۴	۱۲۹
۳۱	۴۹۱۳۶	۴۹۲۷۶	۴۹۴۱۵	۴۹۵۵۴	۴۹۶۹۳	۴۹۸۳۱	۴۹۹۶۹	۵۰۱۰۶	۵۰۲۴۳	۵۰۳۷۹	۱۴	۲۸	۴۲	۵۵	۶۹	۸۳	۹۷	۱۱۰	۱۲۵
۳۲	۵۰۵۱۵	۵۰۶۵۱	۵۰۷۸۶	۵۰۹۲۰	۵۱۰۵۵	۵۱۱۸۸	۵۱۳۲۲	۵۱۴۵۵	۵۱۵۸۷	۵۱۷۲۰	۱۳	۲۷	۴۰	۵۳	۶۷	۸۰	۹۳	۱۰۷	۱۲۱
۳۳	۵۱۸۵۱	۵۱۹۸۳	۵۲۱۱۴	۵۲۲۴۴	۵۲۳۷۵	۵۲۵۰۴	۵۲۶۳۴	۵۲۷۶۳	۵۲۸۹۲	۵۳۰۲۰	۱۳	۲۶	۳۹	۵۲	۶۵	۷۸	۹۱	۱۰۴	۱۱۷
۳۴	۵۳۱۴۸	۵۳۲۷۵	۵۳۴۰۳	۵۳۵۲۹	۵۳۶۵۶	۵۳۷۸۲	۵۳۹۰۸	۵۴۰۳۳	۵۴۱۵۸	۵۴۲۸۳	۱۳	۲۵	۳۸	۵۰	۶۳	۷۶	۸۸	۱۰۱	۱۱۳
۳۵	۵۴۴۰۷	۵۴۵۳۱	۵۴۶۵۴	۵۴۷۷۷	۵۴۹۰۰	۵۵۰۲۳	۵۵۱۴۵	۵۵۲۶۷	۵۵۳۸۸	۵۵۵۰۹	۱۲	۲۴	۳۷	۴۹	۶۱	۷۳	۸۶	۹۸	۱۱۰
۳۶	۵۵۶۳۰	۵۵۷۵۱	۵۵۸۷۱	۵۵۹۹۱	۵۶۱۱۰	۵۶۲۲۹	۵۶۳۴۸	۵۶۴۶۷	۵۶۵۸۵	۵۶۷۰۳	۱۲	۲۴	۳۶	۴۸	۶۰	۷۱	۸۳	۹۵	۱۰۷
۳۷	۵۶۸۲۰	۵۶۹۳۷	۵۷۰۵۴	۵۷۱۷۱	۵۷۲۸۷	۵۷۴۰۳	۵۷۵۱۹	۵۷۶۳۴	۵۷۷۴۹	۵۷۸۶۴	۱۲	۲۳	۳۵	۴۶	۵۸	۷۰	۸۱	۹۳	۱۰۴
۳۸	۵۷۹۷۸	۵۸۰۹۲	۵۸۲۰۶	۵۸۳۲۰	۵۸۴۳۳	۵۸۵۴۶	۵۸۶۵۹	۵۸۷۷۱	۵۸۸۸۳	۵۸۹۹۵	۱۱	۲۳	۳۴	۴۵	۵۷	۶۸	۷۹	۹۰	۱۰۲
۳۹	۵۹۱۰۶	۵۹۲۱۸	۵۹۳۲۹	۵۹۴۳۹	۵۹۵۵۰	۵۹۶۶۰	۵۹۷۷۰	۵۹۸۷۹	۵۹۹۸۸	۶۰۰۹۶	۱۱	۲۲	۳۳	۴۴	۵۵	۶۶	۷۷	۸۸	۹۹

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۴۰	۶۰۲۰۶	۶۰۳۱۴	۶۰۴۲۳	۶۰۵۳۱	۶۰۶۳۸	۶۰۷۴۶	۶۰۸۵۳	۶۰۹۵۹	۶۱۰۶۶	۶۱۱۷۲	۱۱	۲۱	۳۲	۴۳	۵۴	۶۴	۷۵	۸۶	۹۶
۴۱	۶۱۲۷۸	۶۱۳۸۴	۶۱۴۹۰	۶۱۵۹۵	۶۱۷۰۰	۶۱۸۰۵	۶۱۹۰۹	۶۲۰۱۴	۶۲۱۱۸	۶۲۲۲۱	۱۰	۲۱	۳۱	۴۲	۵۲	۶۳	۷۳	۸۴	۹۴
۴۲	۶۲۳۲۵	۶۲۴۲۸	۶۲۵۳۱	۶۲۶۳۴	۶۲۷۳۷	۶۲۸۳۹	۶۲۹۴۱	۶۳۰۴۳	۶۳۱۴۴	۶۳۲۴۶	۱۰	۲۰	۳۱	۴۱	۵۱	۶۱	۷۱	۸۲	۹۲
۴۳	۶۳۳۴۷	۶۳۴۴۸	۶۳۵۴۸	۶۳۶۴۹	۶۳۷۴۹	۶۳۸۴۹	۶۳۹۴۹	۶۴۰۴۸	۶۴۱۴۷	۶۴۲۴۶	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰
۴۴	۶۴۳۴۵	۶۴۴۴۴	۶۴۵۴۲	۶۴۶۴۰	۶۴۷۳۸	۶۴۸۳۶	۶۴۹۳۳	۶۵۰۳۱	۶۵۱۲۸	۶۵۲۲۵	۱۰	۲۰	۲۹	۳۹	۴۹	۵۹	۶۸	۷۸	۸۸
۴۵	۶۵۳۲۱	۶۵۴۱۸	۶۵۵۱۴	۶۵۶۱۰	۶۵۷۰۶	۶۵۸۰۱	۶۵۸۹۶	۶۵۹۹۲	۶۶۰۸۷	۶۶۱۸۱	۱۰	۱۹	۲۸	۳۸	۴۸	۵۷	۶۷	۷۶	۸۶
۴۶	۶۶۲۷۶	۶۶۳۷۰	۶۶۴۶۴	۶۶۵۵۸	۶۶۶۵۲	۶۶۷۴۵	۶۶۸۳۹	۶۶۹۳۲	۶۷۰۲۵	۶۷۱۱۷	۹	۱۹	۲۸	۳۷	۴۷	۵۶	۶۵	۷۵	۸۴
۴۷	۶۷۲۱۰	۶۷۳۰۲	۶۷۳۹۴	۶۷۴۸۶	۶۷۵۷۸	۶۷۶۶۹	۶۷۷۶۱	۶۷۸۵۲	۶۷۹۴۳	۶۸۰۳۴	۹	۱۸	۲۷	۳۷	۴۶	۵۵	۶۴	۷۳	۸۲
۴۸	۶۸۱۲۴	۶۸۲۱۵	۶۸۳۰۵	۶۸۳۹۵	۶۸۴۸۵	۶۸۵۷۴	۶۸۶۶۴	۶۸۷۵۳	۶۸۸۴۲	۶۸۹۳۱	۹	۱۸	۲۷	۳۶	۴۵	۵۳	۶۲	۷۱	۸۰
۴۹	۶۹۰۲۰	۶۹۱۰۸	۶۹۱۹۷	۶۹۲۸۵	۶۹۳۷۳	۶۹۴۶۱	۶۹۵۴۸	۶۹۶۳۶	۶۹۷۲۳	۶۹۸۱۰	۹	۱۸	۲۶	۳۵	۴۴	۵۳	۶۱	۷۰	۷۹

	عددوں کے لوگارتم										فرق								
	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۵۰	۶۹۸۹۷	۶۹۹۸۴	۷۰۰۷۰	۷۰۱۵۷	۷۰۲۴۳	۷۰۳۲۹	۷۰۴۱۵	۷۰۵۰۱	۷۰۵۸۶	۷۰۶۷۲	۹	۱۷	۲۶	۳۴	۴۳	۵۲	۶۰	۶۹	۷۷
۵۱	۷۰۷۵۷	۷۰۸۴۲	۷۰۹۲۷	۷۱۰۱۲	۷۱۰۹۶	۷۱۱۸۱	۷۱۲۶۵	۷۱۳۴۹	۷۱۴۳۳	۷۱۵۱۷	۸	۱۷	۲۵	۳۴	۴۲	۵۱	۵۹	۶۷	۷۶
۵۲	۷۱۶۰۰	۷۱۶۸۴	۷۱۷۶۷	۷۱۸۵۰	۷۱۹۳۳	۷۲۰۱۶	۷۲۰۹۹	۷۲۱۸۱	۷۲۲۶۳	۷۲۳۴۶	۸	۱۷	۲۵	۳۳	۴۲	۵۰	۵۸	۶۶	۷۵
۵۳	۷۲۴۲۸	۷۲۵۰۹	۷۲۵۹۱	۷۲۶۷۳	۷۲۷۵۴	۷۲۸۳۵	۷۲۹۱۶	۷۲۹۹۷	۷۳۰۷۸	۷۳۱۵۹	۸	۱۶	۲۴	۳۲	۴۱	۴۹	۵۷	۶۵	۷۳
۵۴	۷۳۲۳۹	۷۳۳۲۰	۷۳۴۰۰	۷۳۴۸۰	۷۳۵۶۰	۷۳۶۴۰	۷۳۷۱۹	۷۳۷۹۹	۷۳۸۷۸	۷۳۹۵۷	۸	۱۶	۲۴	۳۲	۴۰	۴۸	۵۶	۶۴	۷۲
۵۵	۷۴۰۳۶	۷۴۱۱۵	۷۴۱۹۴	۷۴۲۷۳	۷۴۳۵۱	۷۴۴۲۹	۷۴۵۰۷	۷۴۵۸۶	۷۴۶۶۳	۷۴۷۴۱	۸	۱۶	۲۳	۳۱	۳۹	۴۷	۵۵	۶۲	۷۰
۵۶	۷۴۸۱۹	۷۴۸۹۶	۷۴۹۷۴	۷۵۰۵۱	۷۵۱۲۸	۷۵۲۰۵	۷۵۲۸۲	۷۵۳۵۸	۷۵۴۳۵	۷۵۵۱۱	۸	۱۵	۲۳	۳۱	۳۹	۴۶	۵۴	۶۲	۶۹
۵۷	۷۵۵۸۷	۷۵۶۶۴	۷۵۷۴۰	۷۵۸۱۵	۷۵۸۹۱	۷۵۹۶۷	۷۶۰۴۲	۷۶۱۱۸	۷۶۱۹۳	۷۶۲۶۸	۸	۱۵	۲۳	۳۰	۳۸	۴۵	۵۳	۶۰	۶۸
۵۸	۷۶۳۴۳	۷۶۴۱۸	۷۶۴۹۲	۷۶۵۶۷	۷۶۶۴۱	۷۶۷۱۶	۷۶۷۹۰	۷۶۸۶۴	۷۶۹۳۸	۷۷۰۱۲	۷	۱۵	۲۲	۳۰	۳۷	۴۵	۵۲	۵۹	۶۷
۵۹	۷۷۰۸۵	۷۷۱۵۹	۷۷۲۳۲	۷۷۳۰۵	۷۷۳۷۹	۷۷۴۵۲	۷۷۵۲۵	۷۷۵۹۷	۷۷۶۷۰	۷۷۷۴۳	۷	۱۵	۲۲	۲۹	۳۷	۴۴	۵۱	۵۸	۶۶

	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	فرق ١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٦٠	٧٧٨١٥	٧٧٨٨٧	٧٧٩٦٠	٧٨٠٣٢	٧٨١٠٤	٧٨١٧٦	٧٨٢٤٧	٧٨٣١٩	٧٨٣٩٠	٧٨٤٦٢	٧	١٤	٢٢	٢٩	٣٦	٤٣	٥٠	٥٧	٦٥
٦١	٧٨٥٣٣	٧٨٦٠٤	٧٨٦٧٥	٧٨٧٤٦	٧٨٨١٧	٧٨٨٨٨	٧٨٩٥٨	٧٩٠٢٩	٧٩٠٩٩	٧٩١٦٩	٧	١٤	٢١	٢٨	٣٥	٤٢	٤٩	٥٦	٦٤
٦٢	٧٩٢٣٩	٧٩٣٠٩	٧٩٣٧٩	٧٩٤٤٩	٧٩٥١٨	٧٩٥٨٨	٧٩٦٥٧	٧٩٧٢٧	٧٩٧٩٦	٧٩٨٦٥	٧	١٤	٢١	٢٨	٣٥	٤٢	٤٩	٥٦	٦٣
٦٣	٧٩٩٣٤	٨٠٠٠٣	٨٠٠٧٢	٨٠١٤٠	٨٠٢٠٩	٨٠٢٧٧	٨٠٣٤٦	٨٠٤١٤	٨٠٤٨٢	٨٠٥٥٠	٧	١٤	٢١	٢٧	٣٤	٤١	٤٨	٥٥	٦٢
٦٤	٨٠٦١٨	٨٠٦٨٦	٨٠٧٥٤	٨٠٨٢١	٨٠٨٨٩	٨٠٩٥٦	٨١٠٢٣	٨١٠٩٠	٨١١٥٨	٨١٢٢٤	٧	١٣	٢٠	٢٧	٣٤	٤٠	٤٧	٥٤	٦٠
٦٥	٨١٢٩١	٨١٣٥٨	٨١٤٢٥	٨١٤٩١	٨١٥٥٨	٨١٦٢٤	٨١٦٩٠	٨١٧٥٧	٨١٨٢٣	٨١٨٨٩	٧	١٣	٢٠	٢٦	٣٣	٤٠	٤٦	٥٣	٥٩
٦٦	٨١٩٥٤	٨٢٠٢٠	٨٢٠٨٦	٨٢١٥١	٨٢٢١٧	٨٢٢٨٢	٨٢٣٤٧	٨٢٤١٣	٨٢٤٧٨	٨٢٥٤٣	٧	١٣	٢٠	٢٦	٣٣	٣٩	٤٦	٥٢	٥٩
٦٧	٨٢٦٠٧	٨٢٦٧٢	٨٢٧٣٧	٨٢٨٠٢	٨٢٨٦٦	٨٢٩٣٠	٨٢٩٩٥	٨٣٠٥٩	٨٣١٢٣	٨٣١٨٧	٦	١٣	١٩	٢٦	٣٢	٣٩	٤٥	٥٢	٥٨
٦٨	٨٣٢٥١	٨٣٣١٥	٨٣٣٧٨	٨٣٤٤٢	٨٣٥٠٦	٨٣٥٦٩	٨٣٦٣٢	٨٣٦٩٦	٨٣٧٥٩	٨٣٨٢٢	٦	١٣	١٩	٢٥	٣٢	٣٨	٤٤	٥٠	٥٧
٦٩	٨٣٨٨٥	٨٣٩٤٨	٨٤٠١١	٨٤٠٧٣	٨٤١٣٦	٨٤١٩٨	٨٤٢٦١	٨٤٣٢٣	٨٤٣٨٦	٨٤٤٤٨	٦	١٣	١٩	٢٥	٣١	٣٧	٤٤	٥٠	٥٦

عدد	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	فرق ۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۷۰	۸۴۵۱۰	۸۴۵۷۲	۸۴۶۳۴	۸۴۶۹۶	۸۴۷۵۷	۸۴۸۱۹	۸۴۸۸۰	۸۴۹۴۲	۸۵۰۰۳	۸۵۰۶۵	۶	۱۲	۱۸	۲۵	۳۱	۳۷	۴۳	۴۹	۵۵
۷۱	۸۵۱۲۶	۸۵۱۸۷	۸۵۲۴۸	۸۵۳۰۹	۸۵۳۷۰	۸۵۴۳۱	۸۵۴۹۱	۸۵۵۵۲	۸۵۶۱۲	۸۵۶۷۳	۶	۱۲	۱۸	۲۴	۳۰	۳۶	۴۲	۴۹	۵۵
۷۲	۸۵۷۳۳	۸۵۷۹۴	۸۵۸۵۴	۸۵۹۱۴	۸۵۹۷۴	۸۶۰۳۴	۸۶۰۹۴	۸۶۱۵۳	۸۶۲۱۳	۸۶۲۷۳	۶	۱۲	۱۸	۲۴	۳۰	۳۶	۴۲	۴۸	۵۴
۷۳	۸۶۳۳۲	۸۶۳۹۲	۸۶۴۵۱	۸۶۵۱۰	۸۶۵۷۰	۸۶۶۲۹	۸۶۶۸۸	۸۶۷۴۷	۸۶۸۰۶	۸۶۸۶۴	۶	۱۲	۱۸	۲۴	۳۰	۳۵	۴۱	۴۷	۵۳
۷۴	۸۶۹۲۳	۸۶۹۸۲	۸۷۰۴۰	۸۷۰۹۹	۸۷۱۵۷	۸۷۲۱۶	۸۷۲۷۴	۸۷۳۳۲	۸۷۳۹۰	۸۷۴۴۸	۶	۱۲	۱۸	۲۳	۲۹	۳۵	۴۱	۴۷	۵۲
۷۵	۸۷۵۰۶	۸۷۵۶۴	۸۷۶۲۲	۸۷۶۷۹	۸۷۷۳۷	۸۷۷۹۵	۸۷۸۵۲	۸۷۹۱۰	۸۷۹۶۷	۸۸۰۲۴	۶	۱۲	۱۷	۲۳	۲۹	۳۵	۴۰	۴۶	۵۲
۷۶	۸۸۰۸۱	۸۸۱۳۸	۸۸۱۹۵	۸۸۲۵۲	۸۸۳۰۹	۸۸۳۶۶	۸۸۴۲۳	۸۸۴۸۰	۸۸۵۳۶	۸۸۵۹۳	۶	۱۱	۱۷	۲۳	۲۹	۳۴	۴۰	۴۶	۵۱
۷۷	۸۸۶۴۹	۸۸۷۰۵	۸۸۷۶۲	۸۸۸۱۸	۸۸۸۷۴	۸۸۹۳۰	۸۸۹۸۶	۸۹۰۴۲	۸۹۰۹۸	۸۹۱۵۴	۶	۱۱	۱۷	۲۲	۲۸	۳۴	۳۹	۴۵	۵۰
۷۸	۸۹۲۰۹	۸۹۲۶۵	۸۹۳۲۱	۸۹۳۷۶	۸۹۴۳۲	۸۹۴۸۷	۸۹۵۴۲	۸۹۵۹۷	۸۹۶۵۳	۸۹۷۰۸	۶	۱۱	۱۷	۲۲	۲۸	۳۳	۳۹	۴۴	۵۰
۷۹	۸۹۷۶۳	۸۹۸۱۸	۸۹۸۷۳	۸۹۹۲۷	۸۹۹۸۲	۹۰۰۳۷	۹۰۰۹۱	۹۰۱۴۶	۹۰۲۰۰	۹۰۲۵۵	۵	۱۱	۱۶	۲۲	۲۷	۳۳	۳۸	۴۳	۴۹

لو

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۸۰	۹۰۳۰۹	۹۰۳۶۳	۹۰۴۱۷	۹۰۴۷۲	۹۰۵۲۶	۹۰۵۸۰	۹۰۶۳۴	۹۰۶۸۷	۹۰۷۴۱	۹۰۷۹۵	۵	۱۱	۱۶	۲۲	۲۷	۳۲	۳۸	۴۳	۴۹
۸۱	۹۰۸۴۹	۹۰۹۰۲	۹۰۹۵۶	۹۱۰۰۹	۹۱۰۶۲	۹۱۱۱۶	۹۱۱۶۹	۹۱۲۲۲	۹۱۲۷۵	۹۱۳۲۸	۵	۱۱	۱۶	۲۱	۲۷	۳۲	۳۷	۴۳	۴۸
۸۲	۹۱۳۸۱	۹۱۴۳۴	۹۱۴۸۷	۹۱۵۴۰	۹۱۵۹۳	۹۱۶۴۵	۹۱۶۹۸	۹۱۷۵۱	۹۱۸۰۳	۹۱۸۵۵	۵	۱۱	۱۶	۲۱	۲۶	۳۲	۳۷	۴۲	۴۷
۸۳	۹۱۹۰۸	۹۱۹۶۰	۹۲۰۱۲	۹۲۰۶۵	۹۲۱۱۷	۹۲۱۶۹	۹۲۲۲۱	۹۲۲۷۳	۹۲۳۲۴	۹۲۳۷۶	۵	۱۰	۱۶	۲۱	۲۶	۳۱	۳۶	۴۲	۴۷
۸۴	۹۲۴۲۸	۹۲۴۸۰	۹۲۵۳۱	۹۲۵۸۳	۹۲۶۳۴	۹۲۶۸۶	۹۲۷۳۷	۹۲۷۸۸	۹۲۸۴۰	۹۲۸۹۱	۵	۱۰	۱۵	۲۱	۲۶	۳۱	۳۶	۴۱	۴۶
۸۵	۹۲۹۴۲	۹۲۹۹۳	۹۳۰۴۴	۹۳۰۹۵	۹۳۱۴۶	۹۳۱۹۷	۹۳۲۴۷	۹۳۲۹۸	۹۳۳۴۹	۹۳۳۹۹	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۶	۳۰	۳۶	۴۱	۴۶
۸۶	۹۳۴۵۰	۹۳۵۰۰	۹۳۵۵۱	۹۳۶۰۱	۹۳۶۵۱	۹۳۷۰۲	۹۳۷۵۲	۹۳۸۰۲	۹۳۸۵۲	۹۳۹۰۲	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰	۴۵
۸۷	۹۳۹۵۲	۹۴۰۰۲	۹۴۰۵۲	۹۴۱۰۱	۹۴۱۵۱	۹۴۲۰۱	۹۴۲۵۰	۹۴۳۰۰	۹۴۳۴۹	۹۴۳۹۹	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰	۴۵
۸۸	۹۴۴۴۸	۹۴۴۹۸	۹۴۵۴۷	۹۴۵۹۶	۹۴۶۴۵	۹۴۶۹۴	۹۴۷۴۳	۹۴۷۹۲	۹۴۸۴۱	۹۴۸۹۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۲۹	۳۴	۳۹	۴۴
۸۹	۹۴۹۳۹	۹۴۹۸۸	۹۵۰۳۶	۹۵۰۸۵	۹۵۱۳۴	۹۵۱۸۲	۹۵۲۳۱	۹۵۲۷۹	۹۵۳۲۸	۹۵۳۷۶	۵	۱۰	۱۵	۱۹	۲۴	۲۹	۳۴	۳۹	۴۴

	عددوں کے لوکارثم										فرق								
	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۹۰	۹۵۴۲۴	۹۵۴۷۲	۹۵۵۲۱	۹۵۵۶۹	۹۵۶۱۷	۹۵۶۶۵	۹۵۷۱۳	۹۵۷۶۱	۹۵۸۰۹	۹۵۸۵۶	۵	۱۰	۱۴	۱۹	۲۴	۲۹	۳۴	۳۸	۴۳
۹۱	۹۵۹۰۴	۹۵۹۵۲	۹۵۹۹۹	۹۶۰۴۷	۹۶۰۹۵	۹۶۱۴۲	۹۶۱۹۰	۹۶۲۳۷	۹۶۲۸؟	۹۶۳۳۲	۵	۹	۱۴	۱۹	۲۴	۲۹	۳۳	۳۸	۴۳
۹۲	۹۶۳۷۹	۹۶۴۲۶	۹۶۴۷۳	۹۶۵۲۰	۹۶۵۶۷	۹۶۶۱۴	۹۶۶۶۱	۹۶۷۰۸	۹۶۷۵۵	۹۶۸۰۲	۵	۹	۱۴	۱۹	۲۴	۲۸	۳۳	۳۸	۴۲
۹۳	۹۶۸۴۸	۹۶۸۹۵	۹۶۹۴۲	۹۶۹۸۸	۹۷۰۳۵	۹۷۰۸۱	۹۷۱۲۸	۹۷۱۷۴	۹۷۲۲۰	۹۷۲۶۷	۵	۹	۱۴	۱۹	۲۳	۲۸	۳۳	۳۷	۴۲
۹۴	۹۷۳۱۳	۹۷۳۵۹	۹۷۴۰۵	۹۷۴۵۱	۹۷۴۹۷	۹۷۵۴۳	۹۷۵۸۹	۹۷۶۳۵	۹۷۶۸۱	۹۷۷۲۷	۵	۹	۱۴	۱۸	۲۳	۲۸	۳۲	۳۷	۴۱
۹۵	۹۷۷۷۲	۹۷۸۱۸	۹۷۸۶۴	۹۷۹۰۹	۹۷۹۵۵	۹۸۰۰۰	۹۸۰۴۶	۹۸۰۹۱	۹۸۱۳۷	۹۸۱۸۲	۵	۹	۱۴	۱۸	۲۳	۲۷	۳۲	۳۶	۴۱
۹۶	۹۸۲۲۷	۹۸۲۷۲	۹۸۳۱۸	۹۸۳۶۳	۹۸۴۰۸	۹۸۴۵۳	۹۸۴۹۸	۹۸۵۴۳	۹۸۵۸۸	۹۸۶۳۲	۵	۹	۱۴	۱۸	۲۳	۲۷	۳۲	۳۶	۴۱
۹۷	۹۸۶۷۷	۹۸۷۲۲	۹۸۷۶۷	۹۸۸۱۱	۹۸۸۵۶	۹۸۹۰۰	۹۸۹۴۵	۹۸۹۸۹	۹۹۰۳۴	۹۹۰۷۸	۴	۹	۱۳	۱۸	۲۲	۲۷	۳۱	۳۶	۴۰
۹۸	۹۹۱۲۳	۹۹۱۶۷	۹۹۲۱۱	۹۹۲۵۵	۹۹۳۰۰	۹۹۳۴۴	۹۹۳۸۸	۹۹۴۳۲	۹۹۴۷۶	۹۹۵۲۰	۴	۹	۱۳	۱۸	۲۲	۲۶	۳۱	۳۵	۴۰
۹۹	۹۹۵۶۴	۹۹۶۰۷	۹۹۶۵۱	۹۹۶۹۵	۹۹۷۳۹	۹۹۷۸۲	۹۹۸۲۶	۹۸۶۰	۹۹۹۱۳	۹۹۹۵۶	۴	۹	۱۳	۱۷	۲۲	۲۶	۳۰	۳۵	۳۹
	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

طبعی جیوب

فرق

	٠َ	١٠َ	٢٠َ	٣٠َ	٤٠َ	٥٠َ		١َ	٢َ	٣َ	٤َ	٥َ	٦َ	٧َ	٨َ	٩َ
٠°	٠٫٠٠٠٠٠	٠٫٠٠٢٩١	٠٫٠٠٥٨٢	٠٫٠٠٨٧٣	٠٫٠١١٦٤	٠٫٠١٤٥٤	٨٩°	٢٩	٥٨	٨٧	١١٦	١٤٥	١٧٥	٢٠٣	٢٣٣	٢٦٢
١°	٠٫٠١٧٤٥	٠٫٠٢٠٣٦	٠٫٠٢٣٢٧	٠٫٠٢٦١٨	٠٫٠٢٩٠٨	٠٫٠٣١٩٩	٨٨°	٢٩	٥٨	٨٧	١١٦	١٤٥	١٧٥	٢٠٣	٢٣٣	٢٦٢
٢°	٠٫٠٣٤٩٠	٠٫٠٣٧٨١	٠٫٠٤٠٧١	٠٫٠٤٣٦٢	٠٫٠٤٦٥٣	٠٫٠٤٩٤٣	٨٧°	٢٩	٥٨	٨٧	١١٦	١٤٥	١٧٥	٢٠٣	٢٣٣	٢٦٢
٣°	٠٫٠٥٢٣٤	٠٫٠٥٥٢٤	٠٫٠٥٨١٤	٠٫٠٦١٠٥	٠٫٠٦٣٩٥	٠٫٠٦٦٨٥	٨٦°	٢٩	٥٨	٨٧	١١٦	١٤٥	١٧٤	٢٠٣	٢٣٢	٢٦١
٤°	٠٫٠٦٩٧٦	٠٫٠٧٢٦٦	٠٫٠٧٥٥٦	٠٫٠٧٨٤٦	٠٫٠٨١٣٦	٠٫٠٨٤٢٦	٨٥°	٢٩	٥٨	٨٧	١١٦	١٤٥	١٧٤	٢٠٣	٢٣٢	٢٦١
٥°	٠٫٠٨٧١٦	٠٫٠٩٠٠٥	٠٫٠٩٢٩٥	٠٫٠٩٥٨٥	٠٫٠٩٨٧٤	٠٫١٠١٦٤	٨٤°	٢٩	٥٨	٨٧	١١٦	١٤٥	١٧٤	٢٠٣	٢٣٢	٢٦١
٦°	٠٫١٠٤٥٣	٠٫١٠٧٤٢	٠٫١١٠٣١	٠٫١١٣٢٠	٠٫١١٦٠٩	٠٫١١٨٩٨	٨٣°	٢٩	٥٨	٨٧	١١٦	١٤٥	١٧٤	٢٠٣	٢٣٢	٢٦١
٧°	.١٢١٨٥	٠٫١٢٤٧٦	٠٫١٢٧٦٤	٠٫١٣٠٥٣	٠٫١٣٣٤١	٠٫١٣٦٢٩	٨٢°	٢٩	٥٨	٨٧	١١٦	١٤٥	١٧٣	٢٠٢	٢٣١	٢٦٠
٨°	٠٫١٣٩١٧	٠٫١٤٢٠٥	٠٫١٤٤٩٣	٠٫١٤٧٨١	٠٫١٥٠٦٩	٠٫١٥٣٥٦	٨١°	٢٩	٥٨	٨٦	١١٥	١٤٤	١٧٣	٢٠٢	٢٣٠	٢٥٩
٩°	٠٫١٥٦٤٣	٠٫١٥٩٣١	٠٫١٦٢١٨	٠٫١٦٥٠٥	٠٫١٦٧٩٢	٠٫١٧٠٧٨	٨٠°	٢٩	٥٧	٨٦	١١٥	١٤٤	١٧٢	٢٠١	٢٣٠	٢٥٨
	٦٠َ	٥٠َ	٤٠َ	٣٠َ	٢٠َ	١٠َ		١َ	٢َ	٣َ	٤َ	٥َ	٦َ	٧َ	٨َ	٩َ

طبعی جیوب التمام

طبعی جیوب

	۰′	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′
								فرق								
۱۰°	۰٫۱۷۳۶۵	۰٫۱۷۶۵۱	۰٫۱۷۹۳۶	۰٫۱۸۲۲۴	۰٫۱۸۵۰۹	۰٫۱۸۷۹۵	۷۹°	۲۹	۵۷	۸۶	۱۱۵	۱۴۳	۱۷۲	۲۰۱	۲۲۹	۲۵۸
۱۱°	٫۱۹۰۸۱	٫۱۹۳۶۶	٫۱۹۶۵۲	٫۱۹۹۳۷	٫۲۰۲۲۲	٫۲۰۵۰۷	۷۸°	۲۹	۵۷	۸۶	۱۱۴	۱۴۳	۱۷۱	۲۰۰	۲۲۸	۲۵۷
۱۲°	٫۲۰۷۹۱	٫۲۱۰۷۶	٫۲۱۳۶۰	٫۲۱۶۴۴	٫۲۱۹۲۸	٫۲۲۲۱۲	۷۷°	۲۸	۵۷	۸۵	۱۱۴	۱۴۲	۱۷۰	۱۹۹	۲۲۷	۲۵۶
۱۳°	٫۲۲۴۹۵	٫۲۲۷۷۸	٫۲۳۰۶۲	٫۲۳۳۴۵	٫۲۳۶۲۷	٫۲۳۹۱۰	۷۶°	۲۸	۵۷	۸۵	۱۱۳	۱۴۱	۱۷۰	۱۹۸	۲۲۶	۲۵۵
۱۴°	٫۲۴۱۹۲	٫۲۴۴۷۴	٫۲۴۷۵۶	٫۲۵۰۳۸	٫۲۵۳۲۰	٫۲۵۶۰۱	۷۵°	۲۸	۵۶	۸۵	۱۱۳	۱۴۱	۱۶۹	۱۹۷	۲۲۶	۲۵۴
۱۵°	۰٫۲۵۸۸۲	۰٫۲۶۱۶۳	۰٫۲۶۴۴۳	۰٫۲۶۷۲۴	۰٫۲۷۰۰۴	۰٫۲۷۲۸۴	۷۴°	۲۸	۵۶	۸۴	۱۱۲	۱۴۰	۱۶۸	۱۹۶	۲۲۴	۲۵۲
۱۶°	٫۲۷۵۶۴	٫۲۷۸۴۳	٫۲۸۱۲۳	٫۲۸۴۰۲	٫۲۸۶۸۰	٫۲۸۹۵۹	۷۳°	۲۸	۵۶	۸۴	۱۱۲	۱۴۰	۱۶۷	۱۹۵	۲۲۳	۲۵۱
۱۷°	٫۲۹۲۳۷	٫۲۹۵۱۵	٫۲۹۷۹۳	٫۳۰۰۷۱	٫۳۰۳۴۸	٫۳۰۶۲۵	۷۲°	۲۸	۵۶	۸۳	۱۱۱	۱۳۹	۱۶۷	۱۹۴	۲۲۲	۲۵۰
۱۸°	٫۳۰۹۰۲	٫۳۱۱۷۸	٫۳۱۴۵۴	٫۳۱۷۳۰	٫۳۲۰۰۶	٫۳۲۲۸۲	۷۱°	۲۸	۵۵	۸۳	۱۱۰	۱۳۸	۱۶۶	۱۹۳	۲۲۱	۲۴۸
۱۹°	٫۳۲۵۵۷	٫۳۲۸۳۲	٫۳۳۱۰۶	٫۳۳۳۸۱	٫۳۳۶۵۵	٫۳۳۹۲۹	۷۰°	۲۷	۵۵	۸۲	۱۱۰	۱۳۷	۱۶۴	۱۹۲	۲۱۹	۲۴۷

	٦٠	٥٠	٤٠	٣٠	٢٠	١٠		١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
								فرق								
٢٠°	٠٫٣٤٢٠٢	٠٫٣٤٤٧٥	٠٫٣٤٧٤٨	٠٫٣٥٠٢١	٠٫٣٥٢٩٣	٠٫٣٥٥٦٥	٦٩°	٢٧	٥٥	٨٢	١٠٩	١٣٦	١٦٤	١٩١	٢١٨	٢٤٦
٢١°	٫٣٥٨٣٧	٫٣٦١٠٨	٫٣٦٣٧٩	٫٣٦٦٥٠	٫٣٦٩٢١	٫٣٧١٩١	٦٨°	٢٧	٥٤	٨١	١٠٨	١٣٦	١٦٣	١٩٠	٢١٧	٢٤٤
٢٢°	٫٣٧٤٦١	٫٣٧٧٣٠	٫٣٧٩٩٩	٫٣٨٢٦٨	٫٣٨٥٣٧	٫٣٨٨٠٥	٦٧°	٢٧	٥٤	٨١	١٠٨	١٣٥	١٦١	١٨٨	٢١٥	٢٤٢
٢٣°	٫٣٩٠٧٣	٫٣٩٣٤١	٫٣٩٦٠٨	٫٣٩٨٧٥	٫٤٠١٤١	٫٤٠٤٠٨	٦٦°	٢٧	٥٣	٨٠	١٠٧	١٣٣	١٦٠	١٨٧	٢١٣	٢٤٠
٢٤°	٫٤٠٦٧٤	٫٤٠٩٣٩	٫٤١٢٠٤	٫٤١٤٦٩	٫٤١٧٣٤	٫٤١٩٩٨	٦٥°	٢٧	٥٣	٨٠	١٠٦	١٣٢	١٥٩	١٨٥	٢١٢	٢٣٨
٢٥°	٠٫٤٢٢٦٢	٠٫٤٢٥٢٥	٠٫٤٢٧٨٨	٠٫٤٣٠٥١	٠٫٤٣٣١٣	٠٫٤٣٥٧٥	٦٤°	٢٦	٥٢	٧٩	١٠٥	١٣١	١٥٧	١٨٤	٢١٠	٢٣٦
٢٦°	٫٤٣٨٣٧	٫٤٤٠٩٨	٫٤٤٣٥٩	٫٤٤٦٢٠	٫٤٤٨٨٠	٫٤٥١٤٠	٦٣°	٢٦	٥٢	٧٨	١٠٤	١٣٠	١٥٦	١٨٢	٢٠٨	٢٣٤
٢٧°	٫٤٥٣٩٩	٫٤٥٦٥٨	٫٤٥٩١٧	٫٤٦١٧٥	٫٤٦٤٣٣	٫٤٦٦٩٠	٦٢°	٢٦	٥٢	٧٧	١٠٣	١٢٩	١٥٥	١٨١	٢٠٦	٢٣٢
٢٨°	٫٤٦٩٤٧	٫٤٧٢٠٤	٤٧٤٦٠	٫٤٧٧١٦	٫٤٧٩٧١	٫٤٨٢٢٦	٦١°	٢٦	٥١	٧٧	١٠٢	١٢٨	١٥٣	١٧٩	٢٠٤	٢٣٠
٢٩°	٫٤٨٤٨١	٫٤٨٧٣٥	٫٤٨٩٨٩	٫٤٩٢٤٢	٫٤٩٤٩٥	٫٤٩٧٤٨	٦٠°	٢٥	٥١	٧٦	١٠١	١٢٦	١٥٢	١٧٧	٢٠٢	٢٢٨

طبعی جیوب التمام

طبعی جیوب

	٠َ	١٠َ	٢٠َ	٣٠َ	٤٠َ	٥٠َ		فرق ١َ	٢َ	٣َ	٤َ	٥َ	٦َ	٧َ	٨َ	٩َ
٣٠°	٠،٥٠٠٠٠	٠،٥٠٢٥٢	٠،٥٠٥٠٣	٠،٥٠٧٥٤	٠،٥١٠٠٤	٠،٥١٢٥٤	٥٩°	٢٥	٥٠	٧٥	١٠٠	١٢٥	١٥٠	١٧٥	٢٠٠	٢٢٥
٣١°	،٥١٥٠٤	،٥١٧٥٣	،٥٢٠٠٢	،٥٢٢٥٠	،٥٢٤٩٨	،٥٢٧٤٥	٥٨°	٢٥	٥٠	٧٤	٩٩	١٢٤	١٤٩	١٧٤	١٩٨	٢٢٣
٣٢°	،٥٢٩٩٢	،٥٣٢٣٨	،٥٣٤٨٤	،٥٣٧٣٠	،٥٣٩٧٥	،٥٤٢٢٠	٥٧°	٢٥	٤٩	٧٤	٩٨	١٢٣	١٤٧	١٧٢	١٩٦	٢٢١
٣٣°	،٥٤٤٦٤	،٥٤٧٠٨	،٥٤٩٥١	،٥٥١٩٤	،٥٥٤٣٦	،٥٥٦٧٨	٥٦°	٢٤	٤٩	٧٣	٩٧	١٢٢	١٤٦	١٧٠	١٩٤	٢١٩
٣٤°	،٥٥٩١٩	،٥٦١٦٠	،٥٦٤٠١	،٥٦٦٤١	،٥٦٨٨٠	،٥٧١١٩	٥٥°	٢٤	٤٨	٧٢	٩٦	١٢٠	١٤٣	١٦٨	١٩٢	٢١٦
٣٥°	٠،٥٧٣٥٨	٠،٥٧٥٩٦	٠،٥٧٨٣٣	٠،٥٨٠٧٠	٠،٥٨٣٠٦	٠،٥٨٥٤٣	٥٤°	٢٤	٤٧	٧١	٩٥	١١٩	١٤٢	١٦٦	١٩٠	٢١٣
٣٦°	،٥٨٧٧٩	،٥٩٠١٤	،٥٩٢٤٨	،٥٩٤٨٢	،٥٩٧١٦	،٥٩٩٤٩	٥٣°	٢٣	٤٦	٧٠	٩٣	١١٦	١٣٠	١٦٣	١٨٦	٢١١
٣٧°	،٦٠١٨٢	،٦٠٤١٤	،٦٠٦٤٥	،٦٠٨٧٦	،٦١١٠٦	،٦١٣٣٦	٥٢°	٢٣	٤٦	٧٠	٩٢	١١٦	١٣٩	١٦٢	١٨٥	٢٠٨
٣٨°	،٦١٥٦٦	،٦١٧٩٥	،٦٢٠٢٣	،٦٢٢٥١	،٦٢٤٧٩	،٦٢٧٠٦	٥١°	٢٣	٤٦	٦٨	٩١	١١٣	١٣٦	١٥٩	١٨٢	٢٠٥
٣٩°	،٦٢٩٣٢	،٦٣١٥٨	،٦٣٣٨٣	،٦٣٦٠٨	،٦٣٨٣٢	،٦٤٠٥٦	٥٠°	٢٢	٤٥	٦٧	٩٠	١١٢	١٣٥	١٥٧	١٧٩	٢٠٢

	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠	٦٠		١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٣٠	٠,٦٥٣٨٦	٠,٦٥١٦٦	٠,٦٤٩٤٥	٠,٦٤٧٢٣	٠,٦٤٥٠١	٠,٦٤٢٧٩	٢٩	٢٢	٤٤	٦٦	٨٨	١١١	١٣٣	١٥٥	١٧٧	١٩٩
٣١	٠,٦٦٦٩٦	٠,٦٦٤٨٠	٠,٦٦٢٦٢	٠,٦٦٠٤٣	٠,٦٥٨٢٥	٠,٦٥٦٠٦	٢٨	٢٢	٤٤	٦٥	٨٧	١٠٩	١٣١	١٥٣	١٧٤	١٩٦
٣٢	٠,٦٧٩٨٧	٠,٦٧٧٧٣	٠,٦٧٥٥٩	٠,٦٧٣٤٣	٠,٦٧١٢٩	٠,٦٦٩١٣	٢٧	٢١	٤٣	٦٤	٨٦	١٠٧	١٢٩	١٥٠	١٧٢	١٩٣
٣٣	٠,٦٩٢٥٩	٠,٦٩٠٣٩	٠,٦٨٨٣٥	٠,٦٨٦٢٣	٠,٦٨٤١٣	٠,٦٨٢٠٠	٢٦	٢١	٤٢	٦٣	٨٣	١٠٤	١٢٦	١٤٨	١٦٩	١٩٠
٣٤	٠,٧٠٥٠٥	٠,٧٠٢٩٨	٠,٧٠٠٩١	٠,٦٩٨٨٣	٠,٦٩٦٧٥	٠,٦٩٤٦٦	٢٥	٢١	٤٢	٦٢	٨٣	١٠٤	١٢٤	١٤٥	١٦٦	١٨٦
٣٥	٠,٧١٧٣٢	٠,٧١٥٢٩	٠,٧١٣٢٥	٠,٧١١٢١	٠,٧٠٩١٧	٠,٧٠٧١٠	٢٤	٢٠	٤١	٦١	٨٢	١٠٢	١٢٢	١٤٣	١٦٣	١٨٤
٣٦	٠,٧٢٩٣٧	٠,٧٢٧٣٧	٠,٧٢٥٣٧	٠,٧٢٣٣٧	٠,٧٢١٣٩	٠,٧١٩٣٣	٢٣	٢٠	٤٠	٦٠	٨٠	١٠٠	١٢٠	١٤٠	١٦٠	١٨٠
٣٧	٠,٧٤١٢٠	٠,٧٣٩٢٢	٠,٧٣٧٢٨	٠,٧٣٥٣١	٠,٧٣٣٣٣	٠,٧٣١٣١	٢٢	٢٠	٣٩	٥٩	٧٨	٩٨	١١٨	١٣٨	١٥٧	١٧٧
٣٨	٠,٧٥٢٨٠	٠,٧٥٠٨٨	٠,٧٤٨٩٤	٠,٧٤٧٠٣	٠,٧٤٥٠٩	٠,٧٤٣١٣	٢١	١٩	٣٩	٥٨	٧٧	٩٧	١١٦	١٣٥	١٥٤	١٧٥
٣٩	٠,٧٦٤١٦	٠,٧٦٢٢٩	٠,٧٦٠٤١	٠,٧٥٨٥١	٠,٧٥٦٦١	٠,٧٥٤٧٤	٢٠	١٩	٣٨	٥٧	٧٦	٩٥	١١٣	١٣٢	١٥١	١٧٠

طبع جیوب التمام

طبعی جیوب — فرق

	۰′	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′
۵۰°	۰٫۷۶۶۰۴۴	۰٫۷۶۷۹۱۱	٫۷۶۹۷۷۱	۰٫۷۷۱۶۲۵	۰٫۷۷۳۴۷۲	۰٫۷۷۵۳۱۲	۳۹°	۱۹	۳۷	۵۶	۷۴	۹۳	۱۱۱	۱۳۰	۱۴۸	۱۶۷
۵۱°	٫۷۷۷۱۴۶	٫۷۷۸۹۷۳	٫۷۸۰۷۹۴	٫۷۸۲۶۰۸	٫۷۸۴۴۱۶	٫۷۸۶۲۱۷	۳۸°	۱۸	۳۶	۵۴	۷۲	۹۱	۱۰۹	۱۲۷	۱۴۵	۱۶۳
۵۲°	٫۷۸۸۰۱۱	٫۷۸۹۷۹۸	٫۷۹۱۵۷۹	٫۷۹۳۳۵۳	٫۷۹۵۱۲۱	٫۷۹۶۸۸۲	۳۷°	۱۸	۳۵	۵۳	۷۱	۸۹	۱۰۶	۱۲۴	۱۴۲	۱۵۹
۵۳°	٫۷۹۸۶۳۶	٫۸۰۰۳۸۳	٫۸۰۲۱۲۳	٫۸۰۳۸۵۷	٫۸۰۵۵۸۴	٫۸۰۷۳۰۴	۳۶°	۱۷	۳۵	۵۲	۶۹	۸۷	۱۰۴	۱۲۱	۱۳۸	۱۵۶
۵۴°	٫۸۰۹۰۱۷	٫۸۱۰۷۲۳	٫۸۱۲۴۲۳	٫۸۱۴۱۱۶	٫۸۱۵۸۰۱	٫۸۱۷۴۸۰	۳۵°	۱۷	۳۴	۵۱	۶۸	۸۵	۱۰۱	۱۱۸	۱۳۵	۱۵۲
۵۵°	۰٫۸۱۹۱۵۲	۰٫۸۲۰۸۱۷	۰٫۸۲۲۴۷۵	۰٫۸۲۴۱۲۶	٫۸۲۵۷۷۰	۰٫۸۲۷۴۰۷	۳۴°	۱۶	۳۳	۴۹	۶۶	۸۲	۹۹	۱۱۵	۱۳۲	۱۴۸
۵۶°	٫۸۲۹۰۳۸	٫۸۳۰۶۶۱	٫۸۳۲۲۷۷	٫۸۳۳۸۸۶	٫۸۳۵۴۸۸	٫۸۳۷۰۸۳	۳۳°	۱۶	۳۲	۴۸	۶۴	۸۰	۹۶	۱۱۲	۱۲۸	۱۴۴
۵۷°	٫۸۳۸۶۷۱	٫۸۴۰۲۵۱	٫۸۴۱۸۲۵	٫۸۴۳۳۹۱	٫۸۴۴۹۵۱	٫۸۴۶۵۰۳	۳۲°	۱۶	۳۱	۴۷	۶۳	۷۸	۹۴	۱۱۰	۱۲۵	۱۴۱
۵۸°	٫۸۴۸۰۴۸	٫۸۴۹۵۸۶	٫۸۵۱۱۱۷	٫۸۵۲۶۴۰	٫۸۵۴۱۵۶	٫۸۵۵۶۶۵	۳۱°	۱۵	۳۰	۴۶	۶۱	۷۶	۹۱	۱۰۶	۱۲۲	۱۳۷
۵۹°	٫۸۵۷۱۶۷	٫۸۵۸۶۶۲	٫۸۶۰۱۴۹	٫۸۶۱۶۲۹	٫۸۶۳۱۰۲	٫۸۶۴۵۶۷	۳۰°	۱۵	۳۰	۴۴	۵۹	۷۴	۸۹	۱۰۴	۱۱۸	۱۳۳

طبعی جیوب التمام

	٦٠	٥٠	٤٠	٣٠	٢٠	١٠		١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
								فرق								
	٠٫٨٦٦٠٣	٠٫٨٦٧٤٨	٠٫٨٦٨٩٢	٠٫٨٧٠٣٦	٠٫٨٧١٧٨	٠٫٨٧٣٢١	٢٩°	١٤	٢٩	٤٣	٥٧	٧٢	٨٦	١٠٠	١١٤	١٢٩
	٫٨٧٤٦٢	٫٨٧٦٠٣	٫٨٧٧٤٣	٫٨٧٨٨٢	٫٨٨٠٢٠	٫٨٨١٥٨	٢٨°	١٤	٢٨	٤٢	٥٥	٦٩	٨٣	٩٧	١١١	١٢٥
	٫٨٨٢٩٥	٫٨٨٤٣١	٫٨٨٥٦٦	٫٨٨٧٠١	٫٨٨٨٣٥	٫٨٨٩٦٨	٢٧°	١٤	٢٧	٤٠	٥٤	٦٧	٨١	٩٤	١٠٨	١٢١
	٫٨٩١٠١	٫٨٩٢٣٢	٫٨٩٣٦٣	٫٨٩٤٩٣	٫٨٩٦٢٣	٫٨٩٧٥٢	٢٦°	١٣	٢٦	٣٩	٥٢	٦٥	٧٨	٩١	١٠٤	١١٧
٦٤°	٫٨٩٨٧٩	٫٩٠٠٠٧	٫٩٠١٣٣	٫٩٠٢٥٩	٫٩٠٣٨٣	٫٩٠٥٠٧	٢٥°	١٣	٢٥	٣٨	٥٠	٦٣	٧٥	٨٨	١٠٠	١١٣
٦٥°	٠٫٩٠٦٣١	٠٫٩٠٧٥٣	٠٫٩٠٨٧٥	٠٫٩٠٩٩٦	٠٫٩١١١٦	٠٫٩١٢٣٦	٢٤°	١٢	٢٤	٣٦	٤٨	٦٠	٧٢	٨٤	٩٦	١٠٨
٦٦°	٫٩١٣٥٥	٫٩١٤٧٢	٫٩١٥٩٠	٫٩١٧٠٦	٫٩١٨٢٢	٫٩١٩٣٦	٢٣°	١٢	٢٣	٣٥	٤٦	٥٨	٧٠	٨١	٩٣	١٠٤
	٫٩٢٠٥٠	٫٩٢١٦٤	٫٩٢٢٧٦	٫٩٢٣٨٨	٫٩٢٤٩٩	٫٩٢٦٠٩	٢٢°	١١	٢٢	٣٣	٤٥	٥٦	٦٧	٧٨	٨٩	١٠٠
	٫٩٢٧١٨	٫٩٢٨٢٧	٫٩٢٩٣٥	٫٩٣٠٤٢	٫٩٣١٤٨	٫٩٣٢٥٣	٢١°	١١	٢١	٣٢	٤٣	٥٣	٦٤	٧٥	٨٥	٩٦
	٫٩٣٣٥٨	٫٩٣٤٦٢	٫٩٣٥٦٥	٫٩٣٦٦٧	٫٩٣٧٦٩	٫٩٣٨٦٩	٢٠°	١٠	٢٠	٣١	٤١	٥١	٦١	٧١	٨١	٩٢

طبعی جیوب

	۰′	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′		۱′	۲′	۳′	۴′ فرق	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′
۷۰°	۰٫۹۳۹۶۹۳	۰٫۹۴۰۶۸۴	۰٫۹۴۱۶۶۶	۰٫۹۴۲۶۴۱	۰٫۹۴۳۶۰۹	۰٫۹۴۴۵۶۸	۱۹°	۱۰	۱۹	۲۹	۳۹	۴۹	۵۸	۶۸	۷۸	۸۷
۷۱°	۰٫۹۴۵۵۱۹	۰٫۹۴۶۴۶۲	۰٫۹۴۷۳۹۷	۰٫۹۴۸۳۲۴	۰٫۹۴۹۲۴۳	۰٫۹۵۰۱۵۴	۱۸°	۹	۱۸	۲۸	۳۷	۴۶	۵۵	۶۴	۷۳	۸۳
۷۲°	۰٫۹۵۱۰۵۷	۰٫۹۵۱۹۵۱	۰٫۹۵۲۸۳۸	۰٫۹۵۳۷۱۷	۰٫۹۵۴۵۸۸	۰٫۹۵۵۴۵۰	۱۷°	۹	۱۸	۲۶	۳۵	۴۴	۵۳	۶۱	۷۰	۷۹
۷۳°	۰٫۹۵۶۳۰۵	۰٫۹۵۷۱۵۱	۰٫۹۵۷۹۹۰	۰٫۹۵۸۸۲۰	۰٫۹۵۹۶۴۲	۰٫۹۶۰۴۵۶	۱۶°	۸	۱۷	۲۵	۳۳	۴۱	۵۰	۵۸	۶۶	۷۴
۷۴°	۰٫۹۶۱۲۶۲	۰٫۹۶۲۰۵۹	۰٫۹۶۲۸۴۹	۰٫۹۶۳۶۳۰	۰٫۹۶۴۴۰۴	۰٫۹۶۵۱۶۹	۱۵°	۸	۱۶	۲۳	۳۱	۳۹	۴۷	۵۴	۶۲	۷۰
۷۵°	۰٫۹۶۵۹۲۶	۰٫۹۶۶۶۷۵	۰٫۹۶۷۴۱۵	۰٫۹۶۸۱۴۸	۰٫۹۶۸۸۷۲	۰٫۹۶۹۵۸۸	۱۴°	۷	۱۵	۲۲	۲۹	۳۶	۴۴	۵۱	۵۸	۶۵
۷۶°	۰٫۹۷۰۲۹۶	۰٫۹۷۰۹۹۵	۰٫۹۷۱۶۸۷	۰٫۹۷۲۳۷۰	۰٫۹۷۳۰۴۵	۰٫۹۷۳۷۱۲	۱۳°	۷	۱۴	۲۰	۲۷	۳۴	۴۱	۴۸	۵۴	۶۱
۷۷°	۰٫۹۷۴۳۷۰	۰٫۹۷۵۰۲۰	۰٫۹۷۵۶۶۲	۰٫۹۷۶۲۹۶	۰٫۹۷۶۹۲۱	۰٫۹۷۷۵۳۹	۱۲°	۶	۱۳	۱۹	۲۵	۳۲	۳۸	۴۴	۵۰	۵۷
۷۸°	۰٫۹۷۸۱۴۸	۰٫۹۷۸۷۴۸	۰٫۹۷۹۳۴۱	۰٫۹۷۹۹۲۵	۰٫۹۸۰۵۰۰	۰٫۹۸۱۰۶۸	۱۱°	۶	۱۲	۱۷	۲۳	۲۹	۳۵	۴۱	۴۶	۵۲
۷۹°	۰٫۹۸۱۶۲۷	۰٫۹۸۲۱۷۸	۰٫۹۸۲۷۲۱	۰٫۹۸۳۲۵۵	۰٫۹۸۳۷۸۱	۰٫۹۸۴۲۹۸	۱۰°	۵	۱۱	۱۶	۲۱	۲۶	۳۲	۳۷	۴۲	۴۸

	۶۰	۵۰	۴۰	۳۰	۲۰	۱۰		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۸۰	۰،۹۸۴۸۱	۰،۹۸۵۳۱	۰،۹۸۵۸۰	۰،۹۸۶۲۹	۰،۹۸۶۷۶	۰،۹۸۷۲۳	۹	۵	۱۰	۱۴	۱۹	۲۴	۲۹	۳۳	۳۸	۴۳
۸۱	،۹۸۷۶۹	،۹۸۸۱۴	،۹۸۸۵۸	،۹۸۹۰۲	،۹۸۹۴۴	،۹۸۹۸۶	۸	۴	۹	۱۳	۱۷	۲۲	۲۶	۳۰	۳۴	۳۹
۸۲	،۹۹۰۲۶	،۹۹۰۶۶	،۹۹۱۰۶	،۹۹۱۴۴	،۹۹۱۸۲	،۹۹۲۱۹	۷	۴	۸	۱۱	۱۵	۱۹	۲۳	۲۷	۳۰	۳۴
۸۳	،۹۹۲۵۵	،۹۹۲۹۰	،۹۹۳۲۴	،۹۹۳۵۷	،۹۹۳۹۰	،۹۹۴۲۱	۶	۳	۷	۱۰	۱۳	۱۷	۲۰	۲۳	۲۶	۳۰
۸۴	،۹۹۴۵۲	،۹۹۴۸۲	،۹۹۵۱۱	،۹۹۵۴۰	،۹۹۵۶۷	،۹۹۵۹۴	۵	۳	۶	۸	۱۱	۱۴	۱۷	۲۰	۲۳	۲۵
۸۵	۰،۹۹۶۱۹	۰،۹۹۶۴۴	۰،۹۹۶۶۸	۰،۹۹۶۹۲	۰،۹۹۷۱۴	۰،۹۹۷۳۶	۴	۲	۵	۷	۹	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۱
۸۶	،۹۹۷۵۶	،۹۹۷۷۶	،۹۹۷۹۵	،۹۹۸۱۳	،۹۹۸۳۱	،۹۹۸۴۶	۳	۲	۴	۵	۷	۹	۱۱	۱۳	۱۴	۱۶
۸۷	،۹۹۸۶۳	،۹۹۸۷۸	،۹۹۸۹۲	،۹۹۹۰۵	،۹۹۹۱۷	،۹۹۹۲۹	۲	۱	۳	۴	۵	۷	۸	۹	۱۰	۱۲
۸۸	،۹۹۹۳۹	،۹۹۹۴۹	،۹۹۹۵۸	،۹۹۹۶۶	،۹۹۹۷۳	،۹۹۹۷۹	۱									
۸۹	،۹۹۹۸۵	،۹۹۹۸۹	،۹۹۹۹۳	،۹۹۹۹۶	،۹۹۹۹۸	۱،۰۰۰۰۰	۰									
۹۰	۱،۰۰۰۰															

طبعی جیوب التمام

طبعی مماس [redacted]

	٠′	١٠′	٢٠′	٣٠′	٤٠′	٥٠′		١′	٢′	٣′	٤′ فرق	٥′	٦′	٧′	٨′	٩′
٠	٠٫٠٠٠٠٠	٠٫٠٠٢٩١	٠٫٠٠٥٨٢	٠٫٠٠٨٧٣	٠٫٠١١٦٤	٠٫٠١٤٥٥	٨٩	٢٩	٥٨	٨٧	١١٦	١٤٦	١٧٥	٢٠٤	٢٣٣	٢٦٢
١	٫٠١٧٤٦	٫٠٢٠٣٦	٫٠٢٣٢٨	٫٠٢٦١٩	٫٠٢٩١٠	٫٠٣٢٠١	٨٨	٢٩	٥٨	٨٧	١١٦	١٤٦	١٧٥	٢٠٤	٢٣٣	٢٦٢
٢	٫٠٣٤٩٢	٫٠٣٧٨٣	٫٠٤٠٧٥	٫٠٤٣٦٦	٫٠٤٦٥٨	٫٠٤٩٤٩	٨٧	٢٩	٥٨	٨٧	١١٦	١٤٦	١٧٥	٢٠٤	٢٣٣	٢٦٢
٣	٫٠٥٢٤١	٫٠٥٥٣٣	٫٠٥٨٢٤	٫٠٦١١٦	٫٠٦٤٠٨	٫٠٦٧٠٠	٨٦	٢٩	٥٨	٨٨	١١٧	١٤٦	١٧٥	٢٠٤	٢٣٣	٢٦٣
٤	٫٠٦٩٩٣	٫٠٧٢٨٥	٫٠٧٥٧٨	٫٠٧٨٧٠	٫٠٨١٦٣	٫٠٨٤٥٦	٨٥	٢٩	٥٨	٨٨	١١٧	١٤٦	١٧٥	٢٠٤	٢٣٣	٢٦٣
٥	٠٫٠٨٧٤٩	٠٫٠٩٠٤٢	٠٫٠٩٣٣٥	٠٫٠٩٦٢٩	٠٫٠٩٩٢٢	٠٫١٠٢١٦	٨٤	٢٩	٥٩	٨٨	١١٨	١٤٧	١٧٦	٢٠٥	٢٣٥	٢٦٥
٦	٫١٠٥١٠	٫١٠٨٠٥	٫١١٠٩٩	٫١١٣٩٤	٫١١٦٨٨	٫١١٩٨٣	٨٣	٢٩	٥٩	٨٨	١١٨	١٤٧	١٧٦	٢٠٦	٢٣٥	٢٦٥
٧	٫١٢٢٧٨	٫١٢٥٧٤	٫١٢٨٦٩	٫١٣١٦٥	٫١٣٤٦١	٫١٣٧٥٨	٨٢	٣٠	٥٩	٨٩	١١٨	١٤٨	١٧٨	٢٠٧	٢٣٧	٢٦٦
٨	٫١٤٠٥٤	٫١٤٣٥١	٫١٤٦٤٨	٫١٤٩٤٥	٫١٥٢٤٣	٫١٥٥٤٠	٨١	٣٠	٥٩	٨٩	١١٩	١٤٩	١٧٨	٢٠٨	٢٣٨	٢٦٧
٩	٫١٥٨٣٨	٫١٦١٣٦	٫١٦٤٣٥	٫١٦٧٣٣	٫١٧٠٣٣	٫١٧٣٣٢	٨٠	٣٠	٦٠	٩٠	١٢٠	١٥٠	١٧٩	٢٠٩	٢٣٩	٢٦٩

زق

٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١		١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠	٦٠	
٢٧١	٢٤١	٢١١	١٨١	١٥١	١٢٠	٩٠	٦٠	٣٠	٢٩	٥١٩١٣٣	٥١٨٨٣٥	٥١٨٥٣٤	٥١٨٢٣٣	٥١٧٩٣٣	٥١٧٦٣٣	١٠
٢٧٣	٢٤٢	٢١٢	١٨٢	١٥٢	١٢١	٩١	٦١	٣٠	٢٨	٥٢٠٩٥٢	٥٢٠٦٣٨	٥٢٠٣٣٥	٥٢٠٠٣٣	٥١٩٧٣٠	٥١٩٤٢٨	١١
٢٧٤	٢٤٣	٢١٣	١٨٣	١٥٣	١٢٢	٩٢	٦١	٣١	٢٧	٥٢٢٧٨١	٥٢٢٤٦٥	٥٢٢١٤٩	٥٢١٨٣٣	٥٢١٥٩٠	٥٢١٢٠٤	١٢
٢٧٦	٢٤٤	٢١٤	١٨٥	١٥٤	١٢٣	٩٢	٦٢	٣١	٢٦	٥٢٤٦٣٣	٥٢٤٣١٦	٥٢٤٠٠٨	٥٢٣٧٠٠	٥٢٣٣٩٢	٥٢٣٠٨٤	١٣
٢٧٩	٢٤٨	٢١٧	١٨٦	١٥٥	١٢٤	٩٣	٦٢	٣١	٢٥	٥٢٦٥٨٣	٥٢٦٢٧٢	٥٢٥٨٦١	٥٢٥٥٥٠	٥٢٥٢٣٩	٥٢٤٩٢٨	١٤
٢٨٢	٢٥٠	٢١٩	١٨٨	١٥٧	١٢٥	٩٤	٦٣	٣١	٢٤	٥٢٨٣٤٠	٥٢٨٠٣٤	٥٢٧٧٣٢	٥٢٧٤٢٩	٥٢٧١٠٧	٥٢٦٧٩٥	١٥
٢٨٥	٢٥٣	٢٢١	١٩٠	١٥٨	١٢٦	٩٥	٦٣	٣٢	٢٣	٥٣٠٢٥٥	٥٢٩٩٣٨	٥٢٩٦٢١	٥٢٩٣٠٥	٥٢٨٩٩٠	٥٢٨٦٧٥	١٦
٢٨٨	٢٥٦	٢٢٤	١٩٢	١٦٠	١٢٨	٩٦	٦٤	٣٢	٢٢	٥٣٢١٧١	٥٣١٨٥٠	٥٣١٥٣٠	٥٣١٢١٠	٥٣٠٨٩١	٥٣٠٥٧٣	١٧
٢٩١	٢٥٩	٢٢٦	١٩٤	١٦٢	١٢٩	٩٧	٦٥	٣٢	٢١	٥٣٤١٠٨	٥٣٣٧٨٣	٥٣٣٤٦٠	٥٣٣١٣٤	٥٣٢٨١٤	٥٣٢٤٩٢	١٨
٢٩٤	٢٦٢	٢٢٩	١٩٦	١٦٤	١٣١	٩٨	٦٥	٣٣	٢٠	٥٣٦٠٦٨	٥٣٥٧٤٠	٥٣٥٤١٢	٥٣٥٠٨٥	٥٣٤٧٥٨	٥٣٤٤٣٣	١

طبعی مماس التمام

طبعی ماس

	٠َ	١٠َ	٢٠َ	٣٠َ	٤٠َ	٥٠َ		١َ	٢َ	٣َ	٤َ	ق ٥َ	٦َ	٧َ	٨َ	٩َ
٢٠°	٠٫٣٦٣٩٧	٠٫٣٦٧٢٥	٠٫٣٧٠٥٤	٠٫٣٧٣٨٨	٠٫٣٧٧٢٠	٠٫٣٨٠٥٣	٤٩°	٣٣	٦٦	١٠٠	١٣٣	١٦٦	١٩٩	٢٣٢	٢٦٥	٢٩٨
٢١°	٫٣٨٣٨٦	٫٣٨٧٢١	٫٣٩٠٥٥	٫٣٩٣٩١	٫٣٩٧٢٨	٫٤٠٠٦٥	٤٨°	٣٤	٦٧	١٠١	١٣٤	١٦٨	٢٠٢	٢٣٦	٢٦٩	٣٠٢
٢٢°	٫٤٠٤٠٣	٫٤٠٧٤١	٫٤١٠٨١	٫٤١٤٢١	٫٤١٧٦٣	٫٤٢١٠٥	٤٧°	٣٤	٦٨	١٠٢	١٣٦	١٧٠	٢٠٥	٢٣٩	٢٧٣	٣٠٧
٢٣°	٫٤٢٤٤٨	٫٤٢٧٩١	٫٤٣١٣٤	٫٤٣٤٨١	٫٤٣٨٢٨	٫٤٤١٦٥	٤٦°	٣٥	٦٩	١٠٤	١٣٨	١٧٣	٢٠٨	٢٤٢	٢٧٧	٣١١
٢٤°	٫٤٤٥٢٣	٫٤٤٨٧٢	٫٤٥٢٢٢	٫٤٥٥٧٣	٫٤٥٩٢٢	٫٤٦٢٧٧	٤٥°	٣٥	٧٠	١٠٥	١٤٠	١٧٦	٢١١	٢٤٦	٢٨١	٣١٦
٢٥°	٠٫٤٦٦٣١	٠٫٤٦٩٨٥	٠٫٤٧٣٤١	٠٫٤٧٦٩٨	٠٫٤٨٠٥٥	٠٫٤٨٤١٤	٤٤°	٣٦	٧١	١٠٧	١٤٣	١٧٩	٢١٤	٢٥٠	٢٨٦	٣٢١
٢٦°	٫٤٨٧٧٣	٫٤٩١٣٤	٫٤٩٤٩٥	٫٤٩٨٥٨	٫٥٠٢٢٢	٫٥٠٥٨٦	٤٣°	٣٦	٧٣	١٠٩	١٤٥	١٨٢	٢١٨	٢٥٤	٢٩١	٣٢٧
٢٧°	٫٥٠٩٥٣	٫٥١٣٢٠	٫٥١٦٨٨	٫٥٢٠٥٦	٫٥٢٤٢٧	٫٥٢٧٩٨	٤٢°	٣٧	٧٤	١١١	١٤٨	١٨٥	٢٢٢	٢٥٩	٢٩٦	٣٣٣
٢٨°	٫٥٣١٧١	٫٥٣٥٤٥	٫٥٣٩٢٠	٫٥٤٢٩٦	٫٥٤٦٧٤	٫٥٥٠٥١	٤١°	٣٨	٧٥	١١٣	١٥١	١٨٩	٢٢٦	٢٦٤	٣٠٢	٣٣٩
٢٩°	٫٥٥٤٣١	٫٥٥٨١٢	٫٥٦١٩٤	٫٥٦٥٧٧	٫٥٦٩٦٢	٫٥٧٣٤٨	٤٠°	٣٨	٧٧	١١٥	١٥٣	١٩٢	٢٣٠	٢٦٩	٣٠٦	٣٤٤

								فرق								
	٦٠'	٥٠'	٤٠'	٣٠'	٢٠'	١٠'		١'	٢'	٣'	٤'	٥'	٦'	٧'	٨'	٩'
٣٠°	٠٥٥٧٧٣٥	٠٥٥٨١٢٣	٥٥٨٥١٣	٥٥٨٩٠٥	٠٥٥٩٢٩٧	٠٥٥٩٦٩١	٥٩°	٣٩	٧٨	١١٨	١٥٧	١٩٦	٢٣٥	٢٧٤	٣١٣	٣٥٣
٣١°	٥٦٠٠٨٦	٥٦٠٤٨٣	٥٦٠٨٨١	٥٦١٢٨٠	٥٦١٦٨١	٥٦٢٠٨٣	٥٨°	٤٠	٨٠	١٢٠	١٦٠	٢٠٠	٢٤٠	٢٨٠	٣٢٠	٣٦٠
٣٢°	٥٦٢٤٨٧	٥٦٢٨٩٢	٥٦٣٢٩٩	٥٦٣٧٠٧	٥٦٤١١٧	٥٦٤٥٢٨	٥٧°	٤١	٨٢	١٢٣	١٦٤	٢٠٥	٢٤٥	٢٨٦	٣٢٧	٣٦٨
٣٣°	٥٦٤٩٤١	٥٦٥٣٥٥	٥٦٥٧٧١	٥٦٦١٨٩	٥٦٦٦٠٨	٥٦٧٠٢٨	٥٦°	٤٢	٨٣	١٢٦	١٦٧	٢٠٩	٢٥١	٢٩٣	٣٣٤	٣٧٦
٣٤°	٥٦٧٤٥١	٥٦٧٨٧٥	٥٦٨٣٠١	٥٦٨٧٢٨	٥٦٩١٥٧	٥٦٩٥٨٨	٥٥°	٤٣	٨٦	١٢٨	١٧١	٢١٣	٢٥٦	٣٠٠	٣٤٢	٣٨٥
٣٥°	٠٥٧٠٠٢١	٠٥٧٠٤٥٥	٥٧٠٨٩١	٠٥٧١٣٢٩	٠٥٧١٧٦٩	٠٥٧٢٢١١	٥٤°	٤٤	٨٨	١٣١	١٧٦	٢٢٠	٢٦٣	٣٠٧	٣٥١	٣٩٥
٣٦°	٥٧٢٦٥٤	٥٧٣١٠٠	٥٧٣٥٤٧	٥٧٣٩٩٦	٥٧٤٤٤٦	٥٧٤٩٠٠	٥٣°	٤٥	٩٠	١٣٥	١٨٠	٢٢٥	٢٧٠	٣١٥	٣٦٠	٤٠٥
٣٧°	٥٧٥٣٥٥	٥٧٥٨١٢	٥٧٦٢٧٢	٥٧٦٧٣٣	٥٧٧١٩٦	٥٧٧٦٦١	٥٢°	٤٦	٩٢	١٣٩	١٨٥	٢٣١	٢٧٧	٣٢٣	٣٧٠	٤١٦
٣٨°	٥٧٨١٢٩	٥٧٨٥٩٨	٥٧٩٠٧٠	٥٧٩٥٤٤	٥٨٠٠٢٠	٥٨٠٤٩٨	٥١°	٤٨	٩٥	١٤٣	١٩٠	٢٣٨	٢٨٥	٣٣٣	٣٨٠	٤٢٨
٣٩°	٥٨٠٩٧٨	٥٨١٤٦١	٥٨١٩٤٦	٥٨٢٤٣٣	٥٨٢٩٢٣	٥٨٣٤١٥	٥٠°	٤٩	٩٨	١٤٧	١٩٦	٢٤٥	٢٩٣	٣٤٢	٣٩١	٤٤٠

طبع مجلس التمام

طبعی

	٠	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠
٤٠	٠،٨٣٩١٠	٠،٨٤٤٠٦	٠،٨٤٩٠٧	٠،٨٥٤٠٨	٠،٨٥٩١٢	٠،٨٦٤١٩
٤١	،٨٦٩٢٩	،٨٧٤٤١	،٨٧٩٥٥	،٨٨٤٧٣	،٨٨٩٩٢	،٨٩٥١٥
٤٢	،٩٠٠٤٠	،٩٠٥٦٩	،٩١٠٩٩	،٩١٦٣٣	،٩٢١٧٠	،٩٢٧٠٩
٤٣	،٩٣٢٥٢	،٩٣٧٩٧	،٩٤٣٤٥	،٩٤٨٩٦	،٩٥٤٥١	،٩٦٠٠٨
٤٤	،٩٦٥٦٩	،٩٧١٣٣	،٩٧٧٠٠	،٩٨٢٧٠	،٩٨٨٤٣	،٩٩٤٢٠
٤٥	١،٠٠٠٠٠	١،٠٠٥٨٣	١،٠١١٧٠	١،٠١٧٦١	١،٠٢٣٥٥	١،٠٢٩٥٢
٤٦	،٠٣٥٥٣	،٠٤١٥٨	،٠٤٧٦٦	،٠٥٣٧٨	،٠٥٩٩٤	،٠٦٦١٣
٤٧	،٠٧٢٣٧	،٠٧٨٦٤	،٠٨٤٩٦	،٠٩١٣١	،٠٩٧٧٠	،١٠٤١٣
٤٨	،١١٠٦١	،١١٧١٣	،١٢٣٦٩	،١٣٠٢٩	،١٣٦٩٤	،١٤٣٦٣
٤٩	،١٥٠٣٧	،١٥٧١٥	،١٦٣٩٨	،١٧٠٨٥	،١٧٧٧٧	،١٨٤٧٤

فرق

	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٣٩	٥٠	١٠١	١٥١	٢٠١	٢٥٢	٣٠٢	٣٥٢	٤٠٢	٤٥٣
٣٨	٥٢	١٠٣	١٥٦	٢٠٨	٢٦٠	٣١١	٣٦٣	٤١٥	٤٦٦
٣٧	٥٣	١٠٧	١٦١	٢١٣	٢٦٨	٣٢١	٣٧٥	٤٢٩	٤٨٢
٣٦	٥٥	١١١	١٦٦	٢٢١	٢٧٧	٣٣٢	٣٨٧	٤٤٢	٤٩٨
٣٥	٥٦	١١٣	١٦٧	٢٢٩	٢٨٦	٣٣٤	٤٠٠	٤٥٦	٥١٥
٣٤	٥٩	١١٨	١٧٨	٢٣٧	٢٩٦	٣٥٥	٤١٣	٤٧٢	٥٣٣
٣٣	٦١	١٢٢	١٨٢	٢٤٤	٣٠٦	٣٦٨	٤٣٠	٤٩١	٥٥٣
٣٢	٦٣	١٢٦	١٩١	٢٥٥	٣١٩	٣٨٢	٤٤٦	٥١٠	٥٧٣
٣١	٦٦	١٣٢	١٩٩	٢٦٥	٣٣٢	٣٩٦	٤٦٣	٥٣٠	٥٩٦
٣٠	٦٩	١٣٨	٢٠٦	٢٧٥	٣٤٥	٤١٣	٤٨٢	٥٥٢	٦٢٠

	۶۰	۵۰	۴۰	۳۰	۲۰	۱۰		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۵۰	۱۵۱۹۱۶۵	۱۵۱۹۸۸۲	۱۵۲۰۵۹۳	۱۵۲۱۳۱۰	۱۵۲۲۰۳۱	۱۵۲۲۷۵۸	۳۹	۷۲	۱۴۴	۲۱۹	۲۸۸	۳۶۰	۴۳۱	۵۰۴	۵۷۵	۶۴۷
۵۱	۱۵۲۳۴۹۰	۱۵۲۴۲۲۶	۱۵۲۴۹۶۹	۱۵۲۵۷۱۶	۱۵۲۶۴۷۱	۱۵۲۷۲۳۰	۳۸	۷۵	۱۵۰	۲۲۵	۳۰۰	۳۷۵	۴۵۱	۵۲۶	۶۰۱	۶۷۶
۵۲	۱۵۲۷۹۹۴	۱۵۲۸۷۶۴	۱۵۲۹۵۴۱	۱۵۳۰۳۲۳	۱۵۳۱۱۱۰	۱۵۳۱۹۰۴	۳۷	۷۸	۱۵۶	۲۳۵	۳۱۴	۳۹۲	۴۷۱	۵۴۹	۶۲۸	۷۰۶
۵۳	۱۵۳۲۷۰۴	۱۵۳۳۵۱۱	۱۵۳۴۳۲۳	۱۵۳۵۱۴۲	۱۵۳۵۹۶۸	۱۵۳۶۸۰۰	۳۶	۸۲	۱۶۳	۲۴۴	۳۲۶	۴۱۱	۴۹۳	۵۷۴	۶۵۸	۷۴۰
۵۴	۱۵۳۷۶۳۸	۱۵۳۸۴۸۴	۱۵۳۹۳۳۶	۱۵۴۰۱۹۵	۱۵۴۱۰۶۱	۱۵۴۱۹۳۴	۳۵	۸۶	۱۷۲	۲۵۹	۳۴۵	۴۳۱	۵۱۷	۶۰۳	۶۹۰	۷۷۶
۵۵	۱۵۴۲۸۱۵	۱۵۴۳۷۰۳	۱۵۴۴۵۹۸	۱۵۴۵۵۰۱	۱۵۴۶۴۱۱	۱۵۴۷۳۳۰	۳۴	۹۱	۱۸۱	۲۷۲	۳۶۳	۴۵۴	۵۴۴	۶۳۵	۷۲۶	۸۱۶
۵۶	۱۵۴۸۲۵۶	۱۵۴۹۱۹۰	۱۵۵۰۱۳۳	۱۵۵۱۰۸۴	۱۵۵۲۰۴۳	۱۵۵۳۰۱۰	۳۳	۹۶	۱۹۱	۲۸۷	۳۸۲	۴۷۸	۵۷۳	۶۶۹	۷۶۴	۸۶۰
۵۷	۱۵۵۳۹۸۶	۱۵۵۴۹۶۲	۱۵۵۵۹۶۶	۱۵۵۶۹۶۹	۱۵۵۷۹۸۱	۱۵۵۹۰۰۲	۳۲	۱۰۱	۲۰۱	۳۰۲	۴۰۳	۵۰۴	۶۰۴	۷۰۵	۸۰۶	۹۰۶
۵۸	۱۵۶۰۰۳۳	۱۵۶۱۰۷۳	۱۵۶۲۱۲۵	۱۵۶۳۱۸۵	۱۵۶۴۲۵۶	۱۵۶۵۳۳۶	۳۱	۱۰۶	۲۱۳	۳۲۰	۴۲۶	۵۳۳	۶۳۹	۷۴۶	۸۵۲	۹۵۹
۵۹	۱۵۶۶۴۲۸	۱۵۶۷۵۳۰	۱۵۶۸۶۴۳	۱۵۶۹۷۶۶	۱۵۷۰۹۰۱	۱۵۷۲۰۴۶	۳۰	۱۱۲	۲۲۴	۳۳۶	۴۴۸	۵۶۰	۶۷۲	۷۹۰	۹۰۳	۱۰۱۶

طبعی مماس

	٠′	١٠′	٢٠′	٣٠′	٤٠′	٥٠′		١′	٢′	٣′	٤′	٥′	٦′	٧′	٨′	٩′
								فرق								
٩٠°	١٫٥٦٣٢١	١٫٥٦٤٣٢	١٫٥٦٥٥٤	١٫٥٦٦٦٥	١٫٥٦٦٩٦	١٫٥٦٩١٦	٢٩°	١٢	٢٣	٣٦	٤٨	٦٠	٧٢	٨٣	٩٦	١٠٨
٩١°	١٫٥٨٠٣٠	١٫٥٨١٩٥	١٫٥٨٢٩١	١٫٥٨٣١٨	١٫٥٨٥٣٦	١٫٥٨٦٦٦	٢٨°	١٣	٢٥	٣٨	٥١	٦٤	٧٧	٨٩	١٠٢	١١٥
٩٢°	١٫٥٨٨٠٦	١٫٥٨٩٣٠	١٫٥٩٠٦٣	١٫٥٩٢١٠	١٫٥٩٣٣٦	١٫٥٩٣٨٦	٢٧°	١٣	٢٦	٤١	٥٣	٦٨	٨٢	٩٥	١٠٩	١٢٢
٩٣°	١٫٥٩٩٢٦	١٫٥٩٦٦٨	١٫٥٩٩١٢	٢٫٥٠٠٥٦	٢٫٥٠٢٠٣	٢٫٥٠٣٥٣	٢٦°	١٥	٢٩	٤٤	٥٨	٧٣	٨٨	١٠٢	١١٧	١٣١
٩٤°	٢٫٥٠٥٠٣	٢٫٥٠٦٥٥	٢٫٥٠٨٠٩	٢٫٥٠٩٦٥	٢٫٥١١٢٣	٢٫٥١٢٨٣	٢٥°	١٦	٣١	٤٧	٦٣	٧٩	٩٣	١١٠	١٢٦	١٤١
٩٥°	٢٫٥١٣٤٥	٢٫٥١٦٠٩	٢٫٥١٦٦٥	٢٫٥١٩٣٣	٢٫٥٢١١٣	٢٫٥٢٢٨٦	٢٤°	١٦	٣٣	٥١	٦٨	٨٥	١٠١	١١٨	١٣٥	١٥٢
٩٦°	٢٫٥٢٣٦٠	٢٫٥٢٦٢٦	٢٫٥٢٨١٦	٢٫٥٢٩٩٨	٢٫٥٣١٨٣	٢٫٥٣٣٦٩	٢٣°	١٨	٣٦	٥٥	٧٣	٩٢	١١٠	١٢٨	١٤٦	١٦٥
٩٧°	٢٫٥٣٥٥٩	٢٫٥٣٦٥٠	٢٫٥٣٩٣٥	٢٫٥٣١٣٢	٢٫٥٣٣٣٢	٢٫٥٣٥٣٥	٢٢°	٢٠	٤٠	٦٠	٨٠	١٠٠	١١٩	١٣٩	١٥٩	١٧٩
٩٨°	٢٫٥٣٦٥١	٢٫٥٣٩٦٠	٢٫٥٤١٦٢	٢٫٥٣٨٦	٢٫٥٤٦٠٥	٢٫٥٤٨٢٦	٢١°	٢٢	٤٣	٦٥	٨٦	١٠٩	١٣٠	١٥٢	١٧٣	١٩٥
٩٩°	٢٫٥٦٠٥١	٢٫٥٦٢٦٩	٢٫٥٦٥١١	٢٫٥٦٦٣٦	٢٫٥٦٩٨٥	٢٫٥٦٧٢٨	٢٠°	٢٤	٤٦	٧١	٩٥	١١٩	١٤٢	١٦٦	١٩٠	٢١٣

٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١		١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠	٦٠	
٢٣٥	٢٠٩	١٨٣	١٥٦	١٣١	١٠٤	٦٨	٥٢	٢٦	١٩	٢،٨٦٦٠	٢،٨٥٠٢	٢،٨٢٣٩	٢،٧٩٨٠	٢،٧٧٢٥	٢،٧٤٣٠٥	٤٠
٢٤٠	٢٣١	٢٠٢	١٧٣	١٣٥	١١٦	٨٦	٥٨	٢٩	١٨	٣،٠٣٧٥	٣،٠١٧٨	٢،٩٨٨٦	٢،٩٩٠٠	٢،٩٣١٩	٢،٩٠٣٢	٤١
٢٩٠	٢٥٨	٢٢٥	١٩٣	١٤١	١٢٩	٩٦	٩٣	٣٢	١٧	٣،٢٣٤١	٣،٢٠٣١	٣،١٦١٤	٣،١٣٩٦	٣،١٠٨٣	٣،٠٤٤٤	٤٢
٣٢٥	٢٨٩	٢٥٣	٢١٦	١٨١	١٤٤	١٠٨	٧٢	٣٦	١٦	٣،٤٢٩٥	٣،٤١٢٢	٣،٣٧٥٩	٣،٣٤٠٢	٣،٣٠٥٢	٣،٢٧٠٩	٤٣
٣٩٩	٣٦٢	٢٨٥	٢٤٣	٢٠٣	١٦٣	١٢٢	٨١	٤٠	١٥	٣،٦٨٩١	٣،٦٤٧٠	٣،٦٠٥٩	٣،٥٦٥٦	٣،٥٢٦١	٣،٤٨٧٣	٤٤
٤١٨	٣٧١	٣٢٥	٢٧٨	٢٣٢	١٨٥	١٣٩	٩٣	٤٦	١٤	٣،٩٩١٦	٣،٩٤٣٦	٣،٨٩٦٦	٣،٨٥٠٨	٣،٨٠٦٠	٣،٧٦٢١	٤٥
٤٨١	٤٢٧	٣٧٣	٣٢٠	٢٦٧	٢١٣	١٦٠	١٠٧	٥٣	١٣	٤،٣٤٧٦	٤،٢٩١٣	٤،١٩٥٣	٤،١١٢٦	٤،٠٩١١	٤،٠١٠٨	٤٦
٥٥٩	٤٩٦	٤٣٥	٣٧٣	٣١١	٢٤٨	١٨٦	١٢٣	٦٢	١٢	٤،٦٣٨٢	٤،٥٧٣٦	٤،٥١٠٦	٤،٤٤٩٣	٤،٣٨٩٦	٤،٣٣١٥	٤٧
٦٥٩	٥٨٦	٥١٢	٤٣٩	٣٦٦	٢٩٣	٢٢٠	١٤٦	٧٣	١١	٥،٠٦٥٨	٤،٩٨٩٢	٤،٩١٥٢	٤،٨٤٣٠	٤،٧٧٢٩	٤،٧٠٤٦	٤٨
٧٨٨	٧٠١	٦١٣	٥٢٦	٤٣٨	٣٥٠	٢٦٣	١٧٥	٨٨	١٠	٥،٥٧٦٢	٥،٤٨٤٥	٥،٣٩٥٥	٥،٣٠٩٣	٥،٢٢٥٦	٥،١٤٤٦	٤٩

طبع عماس التمام

طبعی ماس

	۰′	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′
۸۰°	۵٫۶۷۱۳	۵٫۷۶۹۴	۵٫۸۷۰۸	۵٫۹۷۵۸	۶٫۰۸۴۴	۶٫۱۹۷۰	۹	فرق بیاں اس قدر جلدی بدلتے ہیں کہ درج نہیں کئے جا سکتے								
۸۱	۶٫۳۱۳۸	۶٫۴۴۳۸	۶٫۵۷۰۶	۶٫۶۹۱۲	۶٫۸۲۶۹	۶٫۹۶۸۲	۸									
۸۲	۷٫۱۱۵۴	۷٫۲۶۸۷	۷٫۴۲۸۷	۷٫۵۹۵۸	۷٫۷۷۰۴	۷٫۹۵۳۰	۷									
۸۳	۸٫۱۴۴۴	۸٫۳۴۵۰	۸٫۵۵۵۵	۸٫۷۷۶۹	۹٫۰۰۹۸	۹٫۲۵۵۳	۶									
[illegible]	۹٫۵۱۴۴	۹٫۷۸۸۲	۱۰٫۰۷۸	۱۰٫۳۸۵	۱۰٫۷۱۲	۱۱٫۰۵۹	۵									
۸۵	۱۱٫۴۳۰	۱۱٫۸۲۶	۱۲٫۲۵۱	۱۲٫۷۰۶	۱۳٫۱۹۷	۱۳٫۷۲۷	۴									
[illegible]	۱۴٫۳۰۱	۱۴٫۹۲۴	۱۵٫۶۰۵	۱۶٫۳۵۰	۱۷٫۱۶۹	۱۸٫۰۷۵	۳	صغیر زاویہ ن کا ماس التمام یا								
۸۷	۱۹٫۰۸۱	۲۰٫۲۰۶	۲۱٫۴۷۰	۲۲٫۹۰۴	۲۴٫۵۴۲	۲۶٫۴۳۲	۲									
۸۸	۲۸٫۶۳۶	۳۱٫۲۴۲	۳۴٫۳۶۸	۳۸٫۱۸۸	۴۲٫۹۶۴	۴۹٫۱۰۴	۱	۹۰ − ن کا ماس = $\frac{۳۴۳۷٫۷۵}{ن}$ تقریباً								
۸۹	۵۷٫۲۹۰	۶۸٫۷۵۰	۸۵٫۹۴۰	۱۱۴٫۵۹	۱۷۱٫۸۹	۳۴۳٫۷۷	۰									
	۶۰′	۵۰′	۴۰′	۳۰′	۲۰′	۱۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′

طبعی ماس التمام

لوکارثمی جیوب

	۰َ	۱۰َ	۲۰َ	۳۰َ	۴۰َ	۵۰َ		۱َ	۲َ	۳َ	۴َ	۵َ	۶َ	۷َ	۸َ	۹َ
°۰	∞ –	۷٫۴۶۳۷۳	۷٫۷۶۴۷۵	۷٫۹۴۰۸۴	۸٫۰۶۵۷۸	۸٫۱۶۲۶۸	°۸۹	فرق یہاں اس قدر جلدی بدلتے ہیں کہ انکا درج کرنا ناممکن ہے۔ صغیر زاویہ نَ کے لئے لوک جب نَ یا لوک جم (۹۰َ – نَ) = لوک ن + ۶٫۴۶۳۷۳ تم								
°۱	۸٫۲۴۱۸۶	۸٫۳۰۸۷۹	۸٫۳۶۶۷۸	۸٫۴۱۷۹۲	۸٫۴۶۳۶۶	۸٫۵۰۵۰۴	°۸۸									
°۲	۸٫۵۴۲۸۲	۸٫۵۷۷۵۶	۸٫۶۰۹۷۳	۸٫۶۳۹۶۸	۸٫۶۶۷۶۹	۸٫۶۹۴۰۰	°۸۷									
°۳	۸٫۷۱۸۸۰	۸٫۷۴۲۲۶	۸٫۷۶۴۵۱	۸٫۷۸۵۶۸	۸٫۸۰۵۸۵	۸٫۸۲۵۱۳	°۸۶									
°۴	۸٫۸۴۳۵۸	۸٫۸۶۱۲۸	۸٫۸۷۸۲۹	۸٫۸۹۴۶۴	۸٫۹۱۰۴۰	۸٫۹۲۵۶۱	°۸۵									
°۵	۸٫۹۴۰۳۰	۸٫۹۵۴۵۰	۸٫۹۶۸۲۵	۸٫۹۸۱۵۷	۸٫۹۹۴۵۰	۹٫۰۰۷۰۴	°۸۴									
°۶	۹٫۰۱۹۲۳	۹٫۰۳۱۰۹	۹٫۰۴۲۶۳	۹٫۰۵۳۸۶	۹٫۰۶۴۸۱	۹٫۰۷۵۴۸	°۸۳									
°۷	۹٫۰۸۵۸۹	۹٫۰۹۶۰۶	۹٫۱۰۵۹۹	۹٫۱۱۵۷۰	۹٫۱۲۵۱۹	۹٫۱۳۴۴۷	°۸۲	۹۶	۱۹۲	۲۸۸	۳۸۴	۴۸۰	۵۷۶	۶۷۲	۷۶۸	۸۶۴
°۸	۹٫۱۴۳۵۵	۹٫۱۵۲۴۵	۹٫۱۶۱۱۶	۹٫۱۶۹۷۰	۹٫۱۷۸۰۷	۹٫۱۸۶۲۸	°۸۱	۸۵	۱۶۹	۲۵۴	۳۳۸	۴۲۳	۵۰۷	۵۹۲	۶۷۶	۷۶۱
°۹	۹٫۱۹۴۳۳	۹٫۲۰۲۲۳	۹٫۲۰۹۹۹	۹٫۲۱۷۶۱	۹٫۲۲۵۰۹	۹٫۲۳۲۴۴	°۸۰	۷۶	۱۵۱	۲۲۷	۳۰۲	۳۷۸	۴۵۳	۵۲۹	۶۰۴	۶۸۰
	۶۰َ	۵۰َ	۴۰َ	۳۰َ	۲۰َ	۱۰َ		۱َ	۲َ	۳َ	۴َ	۵َ	۶َ	۷َ	۸َ	۹َ

لوکارثمی جیوب التمام

لوکاریتمی جیوب

	′٠	′١٠	′٢٠	′٣٠	′٤٠	′٥٠		′١	′٢	′٣	′٤	′٥	′٦	′٧	′٨	′٩
°١٠	٩،٢٣٩٦٧	٩،٢٤٦٧٧	٩،٢٥٣٧٦	٩،٢٦٠٦٣	٩،٢٦٧٣٩	٩،٢٧٤٠٥	°٧٩	٦٨	١٣٧	٢٠٤	٢٧٢	٣٤١	٤٠٩	٤٧٧	٥٤٥	٦١٣
°١١	،٢٨٠٦٠	،٢٨٧٠٥	،٢٩٣٤٠	،٢٩٩٦٦	،٣٠٥٨٢	،٣١١٨٩	°٧٨	٦٢	١٢٤	١٨٦	٢٤٨	٣١٠	٣٧٣	٤٣٥	٤٩٧	٥٥٩
°١٢	،٣١٧٨٨	،٣٢٣٧٨	،٣٢٩٦٠	،٣٣٥٣٤	،٣٤١٠٠	،٣٤٦٥٨	°٧٧	٥٧	١١٤	١٧١	٢٢٨	٢٨٥	٣٤٢	٣٩٩	٤٥٦	٥١٣
°١٣	،٣٥٢٠٩	،٣٥٧٥٢	،٣٦٢٨٩	،٣٦٨١٩	،٣٧٣٤١	،٣٧٨٥٨	°٧٦	٥٣	١٠٥	١٥٨	٢١٠	٢٦٣	٣١٦	٣٦٨	٤٢١	٤٧٣
°١٤	،٣٨٣٦٨	،٣٨٨٧١	،٣٩٣٦٩	،٣٩٨٦٠	،٤٠٣٤٦	،٤٠٨٢٥	°٧٥	٤٩	٩٨	١٤٧	١٩٥	٢٤٤	٢٩٣	٣٤٢	٣٩١	٤٤٠
°١٥	٩،٤١٣٠٠	٩،٤١٧٦٨	٩،٤٢٢٣٢	٩،٤٢٦٩٠	٩،٤٣١٤٣	٩،٤٣٥٩١	°٧٤	٤٦	٩١	١٣٧	١٨٢	٢٢٨	٢٧٣	٣١٩	٣٦٤	٤١٠
°١٦	،٤٤٠٣٤	،٤٤٤٧٢	،٤٤٩٠٥	،٤٥٣٣٤	،٤٥٧٥٨	،٤٦١٧٨	°٧٣	٤٣	٨٥	١٢٨	١٧١	٢١٣	٢٥٦	٢٩٩	٣٤١	٣٨٤
°١٧	،٤٦٥٩٤	،٤٧٠٠٥	،٤٧٤١١	،٤٧٨١٤	،٤٨٢١٣	،٤٨٦٠٧	٧٢	٤٠	٨٠	١٢٠	١٦٠	٢٠١	٢٤١	٢٨١	٣٢١	٣٦١
°١٨	،٤٨٩٩٨	،٤٩٣٨٥	،٤٩٧٦٨	،٥٠١٤٨	،٥٠٥٢٣	،٥٠٨٩٦	°٧١	٣٨	٧٦	١١٣	١٥١	١٨٩	٢٢٧	٢٦٤	٣٠٢	٣٤٠
°١٩	،٥١٢٦٤	،٥١٦٢٩	،٥١٩٩١	،٥٢٣٥٠	،٥٢٧٠٥	،٥٣٠٥٦	°٧٠	٣٦	٧١	١٠٧	١٤٣	١٧٩	٢١٤	٢٥٠	٢٨٥	٣٢١

	٦٠	٥٠	٤٠	٣٠	٢٠	١٠		١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٢٠°	٩،٥٣٤٠٥	٩،٥٣٧٥١	٩،٥٤٠٩٣	٩،٥٤٤٣٣	٩،٥٤٧٦٩	٩،٥٥١٠٢	٦٩°	٣٤	٦٨	١٠١	١٣٥	١٦٩	٢٠٣	٢٣٦	٢٧٠	٣٠٤
٢١°	،٥٥٤٣٣	،٥٥٧٦١	،٥٦٠٨٥	،٥٦٤٠٨	،٥٦٧٢٦	،٥٧٠٤٤	٦٨°	٣٢	٦٤	٩٦	١٢٨	١٦١	١٩٣	٢٢٥	٢٥٧	٢٨٩
٢٢°	،٥٧٣٥٨	،٥٧٦٦٩	،٥٧٩٧٧	،٥٨٢٨٤	،٥٨٥٨٨	،٥٨٨٨٩	٦٧°	٣١	٦١	٩٢	١٢٢	١٥٣	١٨٣	٢١٤	٢٤٤	٢٧٥
٢٣°	،٥٩١٨٨	،٥٩٤٨٤	،٥٩٧٧٨	،٦٠٠٧٠	،٦٠٣٥٩	،٦٠٦٤٦	٦٦°	٢٩	٥٨	٨٧	١١٦	١٤٦	١٧٥	٢٠٤	٢٣٣	٢٦٢
٢٤°	،٦٠٩٣١	،٦١٢١٤	،٦١٤٩٤	،٦١٧٧٣	،٦٢٠٤٩	،٦٢٣٢٣	٦٥°	٢٨	٥٦	٨٣	١١١	١٣٩	١٦٦	١٩٥	٢٢٢	٢٥٠
٢٥°	٩،٦٢٥٩٥	٩،٦٢٨٦٥	٩،٦٣١٣٣	٩،٦٣٣٩٨	٩،٦٣٦٦٢	٩،٦٣٩٢٤	٦٤°	٢٧	٥٣	٨٠	١٠٦	١٣٣	١٥٩	١٨٦	٢١٢	٢٣٩
٢٦°	،٦٤١٨٤	،٦٤٤٤٢	،٦٤٦٩٨	،٦٤٩٥٣	،٦٥٢٠٥	،٦٥٤٥٦	٦٣°	٢٥	٥١	٧٦	١٠٢	١٢٧	١٥٢	١٧٨	٢٠٣	٢٢٩
٢٧°	،٦٥٧٠٥	،٦٥٩٥٢	،٦٦١٩٧	،٦٦٤٤١	،٦٦٦٨٢	،٦٦٩٢٢	٦٢°	٢٤	٤٩	٧٣	٩٧	١٢٢	١٤٦	١٧٠	١٩٤	٢١٩
٢٨°	،٦٧١٦١	،٦٧٣٩٨	،٦٧٦٣٣	،٦٧٨٦٦	،٦٨٠٩٨	،٦٨٣٢٨	٦١°	٢٣	٤٦	٧٠	٩٣	١١٦	١٤٠	١٦٣	١٨٦	٢١٠
٢٩°	،٦٨٥٥٦	،٦٨٧٨٤	،٦٩٠١٠	،٦٩٢٣٤	،٦٩٤٥٦	،٦٩٦٧٧	٦٠°	٢٢	٤٥	٦٧	٨٩	١١٢	١٣٤	١٥٦	١٧٩	٢٠١

لوكاريتمي جيوب التمام

لوگارثم جیوب

۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۹٫۶۹۹۸۹۷	۹٫۷۰۰۱۱۵	۹٫۷۰۰۳۳۲	۹٫۷۰۰۵۴۷	۹٫۷۰۰۷۶۱	۹٫۷۰۰۹۷۳	۵۹°	۲۲	۴۳	۶۵	۸۶	۱۰۷	۱۲۹	۱۵۰	۱۷۲	۱۹۳
۹٫۷۰۱۱۸۴	۹٫۷۰۱۳۹۳	۹٫۷۰۱۶۰۲	۹٫۷۰۱۸۰۹	۹٫۷۰۲۰۱۴	۹٫۷۰۲۲۱۸	۵۸°	۲۱	۴۱	۶۲	۸۲	۱۰۳	۱۲۴	۱۴۴	۱۶۵	۱۸۵
۹٫۷۰۲۴۲۱	۹٫۷۰۲۶۲۲	۹٫۷۰۲۸۲۳	۹٫۷۰۳۰۲۳	۹٫۷۰۳۲۱۹	۹٫۷۰۳۴۱۷	۵۷°	۲۰	۴۰	۵۹	۷۹	۹۹	۱۱۹	۱۳۹	۱۵۹	۱۷۸
۹٫۷۰۳۶۱۱	۹٫۷۰۳۸۰۵	۹٫۷۰۳۹۹۶	۹٫۷۰۴۱۸۸	۹٫۷۰۴۳۷۹	۹٫۷۰۴۵۶۸	۵۶°	۱۹	۳۸	۵۷	۷۶	۹۶	۱۱۵	۱۳۴	۱۵۳	۱۷۲
۹٫۷۰۴۷۵۷	۹٫۷۰۴۹۴۲	۹٫۷۰۵۱۲۸	۹٫۷۰۵۳۱۳	۹٫۷۰۵۴۹۷	۹٫۷۰۵۶۷۸	۵۵°	۱۸	۳۷	۵۵	۷۴	۹۲	۱۱۰	۱۲۹	۱۴۷	۱۶۵
۹٫۷۰۵۸۵۹	۹٫۷۰۶۰۳۹	۹٫۷۰۶۲۱۸	۹٫۷۰۶۳۹۵	۹٫۷۰۶۵۷۲	۹٫۷۰۶۷۴۶	۵۴°	۱۸	۳۵	۵۳	۷۱	۸۹	۱۰۶	۱۲۴	۱۴۲	۱۵۹
۹٫۷۰۶۹۲۲	۹٫۷۰۷۰۹۵	۹٫۷۰۷۲۶۸	۹٫۷۰۷۴۳۹	۹٫۷۰۷۶۰۹	۹٫۷۰۷۷۷۸	۵۳°	۱۷	۳۴	۵۱	۶۸	۸۶	۱۰۳	۱۲۰	۱۳۷	۱۵۴
۹٫۷۰۷۹۴۷	۹٫۷۰۸۱۱۳	۹٫۷۰۸۲۸۰	۹٫۷۰۸۴۴۵	۹٫۷۰۸۶۰۹	۹٫۷۰۸۷۷۲	۵۲°	۱۷	۳۳	۵۰	۶۶	۸۳	۹۹	۱۱۶	۱۳۲	۱۴۹
۹٫۷۰۸۹۳۴	۹٫۷۰۹۰۹۵	۹٫۷۰۹۲۵۴	۹٫۷۰۹۴۱۵	۹٫۷۰۹۵۷۴	۹٫۷۰۹۷۳۱	۵۱°	۱۶	۳۲	۴۸	۶۴	۸۰	۹۵	۱۱۲	۱۲۷	۱۴۳
۹٫۷۰۹۸۸۷	۹٫۷۱۰۰۴۲	۹٫۷۱۰۱۹۶	۹٫۷۱۰۳۵۱	۹٫۷۱۰۵۰۴	۹٫۷۱۰۶۵۷	۵۰°	۱۵	۳۱	۴۶	۶۲	۷۷	۹۲	۱۰۸	۱۲۳	۱۳۸

	٦٠	٥٠	٤٠	٣٠	٢٠	١٠		آ	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
[illegible]	٩٥٨٠٨٠٧	٩٥٨٠٩٥٧	٩٥٨١١٠٦	٩٥٨١٢٥٤	٩٥٨١٤٠٢	٩٥٨١٥٤٩	٣٩°	١٥	٣٠	٤٤	٥٩	٧٤	٨٩	١٠٣	١١٨	١٣٣
[illegible]	٥٨١٦٩٤	٥٨١٨٣٩	٥٨١٩٨٣	٥٨٢١٢٦	٥٨٢٢٦٩	٥٨٢٤١٠	٣٨°	١٤	٢٩	٤٣	٥٧	٧٢	٨٦	١٠٠	١١٤	١٢٩
[illegible]	٥٨٢٥٥١	٥٨٢٦٩١	٥٨٢٨٣٠	٥٨٢٩٦٨	٥٨٣١٠٦	٥٨٣٢٤٢	٣٧°	١٤	٢٨	٤١	٥٥	٦٩	٨٣	٩٧	١١٠	١٢٤
[illegible]	٥٨٣٣٧٨	٥٨٣٥١٣	٥٨٣٦٤٨	٥٨٣٧٨١	٥٨٣٩١٤	٥٨٤٠٤٦	٣٦°	١٣	٢٧	٤٠	٥٣	٦٧	٨٠	٩٣	١٠٦	١٢٠
[illegible]	٥٨٤١٧٧	٥٨٤٣٠٨	٥٨٤٤٣٧	٥٨٤٥٦٦	٥٨٤٦٩٤	٥٨٤٨٢٢	٣٥°	١٣	٢٦	٣٨	٥١	٦٤	٧٧	٩٠	١٠٢	١١٥
[illegible]	٩٥٨٤٩٤٩	٩٥٨٥٠٧٤	٩٥٨٥٢٠٠	٩٥٨٥٣٢٤	٩٥٨٥٤٤٨	٩٥٨٥٥٧١	٣٤°	١٢	٢٥	٣٧	٥٠	٦٢	٧٤	٨٧	٩٩	١١٢
[illegible]	٥٨٥٦٩٣	٥٨٥٨١٥	٥٨٥٩٣٦	٥٨٦٠٥٦	٥٨٦١٧٦	٥٨٦٢٩٥	٣٣°	١٢	٢٤	٣٦	٤٨	٦٠	٧٢	٨٤	٩٦	١٠٨
[illegible]	٥٨٦٤١٣	٥٨٦٥٣٠	٥٨٦٦٤٧	٥٨٦٧٦٢	٥٨٦٨٧٩	٥٨٦٩٩٣	٣٢°	١٢	٢٣	٣٥	٤٦	٥٨	٧٠	٨١	٩٣	١٠٤
[illegible]	٥٨٧١٠٧	٥٨٧٢٢١	٥٨٧٣٣٤	٥٨٧٤٤٧	٥٨٧٥٥٧	٥٨٧٦٦٨	٣١°	١١	٢٢	٣٣	٤٥	٥٦	٦٧	٧٨	٨٩	١٠٠
[illegible]	٥٨٧٧٧٨	٥٨٧٨٨٧	٥٨٧٩٩٦	٥٨٨١٠٥	٥٨٨٢١٢	٥٨٨٣١٩	٣٠°	١١	٢٢	٣٢	٤٣	٥٤	٦٥	٧٦	٨٦	٩٧

لوکاریتمی جیوب التمام

لوكاريتمى جيوب

	٠′	١٠′	٢٠′	٣٠′	٤٠′	٥٠′		١′	٢′	٣′	٤′ فرق	٥′	٦′	٧′	٨′	٩′
٥٠°	٩٫٨٨٤٢٥٤	٩٫٨٨٥٣١١	٩٫٨٨٦٣٦٢	٩٫٨٨٧٤٠٦	٩٫٨٨٨٤٤٤	٩٫٨٨٩٤٧٨	٣٩°	١٠	٢١	٣١	٤٢	٥٢	٦٢	٧٣	٨٣	٩٤
٥١	٫٨٩٠٥٠٣	٫٨٩١٥٢٢	٫٨٩٢٥٣٦	٫٨٩٣٥٤٤	٫٨٩٤٥٤٦	٫٨٩٥٥٤٢	٣٨	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠	٦٠	٧٠	٨٠	٩٠
٥٢°	٫٨٩٦٥٣٢	٫٨٩٧٥١٦	٫٨٩٨٤٩٤	٫٨٩٩٤٦٦	٫٩٠٠٤٣٣	٫٩٠١٣٩٣	٣٧	١٠	١٩	٢٩	٣٩	٤٩	٥٨	٦٨	٧٨	٨٧
٥٣°	٫٩٠٢٣٤٩	٫٩٠٣٢٩٨	٫٩٠٤٢٤١	٫٩٠٥١٧٨	٫٩٠٦١١١	٫٩٠٧٠٣٧	٣٦	٩	١٩	٢٨	٣٧	٤٧	٥٦	٦٥	٧٥	٨٤
٥٤°	٫٩٠٧٩٥٨	٫٩٠٨٨٧٣	٫٩٠٩٧٨٢	٫٩١٠٦٨٦	٫٩١١٥٨٥	٫٩١٢٤٧٨	٣٥	٩	١٨	٢٧	٣٦	٤٥	٥٤	٦٣	٧٢	٨١
٥٥°	٩٫٩١٣٣٦٥	٩٫٩١٤٢٤٧	٩٫٩١٥١٢٣	٩٫٩١٥٩٩٤	٩٫٩١٦٨٦٠	٩٫٩١٧٧١٩	٣٤°	٩	١٧	٢٦	٣٥	٤٤	٥٢	٦١	٧٠	٧٨
٥٦°	٫٩١٨٥٧٤	٫٩١٩٤٢٣	٫٩٢٠٢٦٨	٫٩٢١١٠٦	٫٩٢١٩٤٠	٫٩٢٢٧٦٨	٣٣°	٨	١٧	٢٥	٣٤	٤٢	٥٠	٥٩	٦٧	٧٦
٥٧°	٫٩٢٣٥٩١	٫٩٢٤٤٠٩	٫٩٢٥٢٢١	٫٩٢٦٠٢٩	٫٩٢٦٨٣١	٫٩٢٧٦٢٨	٣٢°	٨	١٦	٢٤	٣٢	٤١	٤٩	٥٧	٦٥	٧٣
٥٨°	٫٩٢٨٤٢٠	٫٩٢٩٢٠٧	٫٩٢٩٩٨٩	٫٩٣٠٧٦٥	٫٩٣١٥٣٧	٫٩٣٢٣٠٣	٣١°	٨	١٦	٢٣	٣١	٣٩	٤٧	٥٥	٦٢	٧٠
٥٩	٫٩٣٣٠٦٦	٫٩٣٣٨٢٣	٫٩٣٤٥٧٤	٫٩٣٥٣٢١	٫٩٣٦٠٦٢	٫٩٣٦٨٠٠	٣٠°	٨	١٥	٢٣	٣٠	٣٨	٤٥	٥٢	٦٠	٦٨

۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱		۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰
۶۴	۵۷	۵۰	۴۳	۳۶	۲۹	۲۲	۱۴	۷	°۲۹	۹٫۹۴۱۱۲	۹٫۹۴۰۴۱	۹٫۹۳۹۷۰	۹٫۹۳۸۹۸	۹٫۹۳۸۲۶	۹٫۹۳۷۵۳
۶۲	۵۵	۴۸	۴۱	۳۴	۲۷	۲۱	۱۴	۷	°۲۸	٫۹۴۵۲۵	٫۹۴۴۵۸	٫۹۴۳۹۰	٫۹۴۳۲۱	٫۹۴۲۵۲	٫۹۴۱۸۲
۵۹	۵۳	۴۶	۴۰	۳۳	۲۶	۲۰	۱۳	۷	°۲۷	٫۹۴۹۲۳	٫۹۴۸۵۸	٫۹۴۷۹۳	٫۹۴۷۲۷	٫۹۴۶۶۰	٫۹۴۵۹۳
۵۷	۵۰	۴۴	۳۸	۳۲	۲۵	۱۹	۱۳	۶	°۲۶	٫۹۵۳۰۴	٫۹۵۲۴۲	٫۹۵۱۷۹	٫۹۵۱۱۶	٫۹۵۰۵۲	٫۹۴۹۸۸
۵۴	۴۸	۴۲	۳۶	۳۰	۲۴	۱۸	۱۲	۶	°۲۵	٫۹۵۶۶۸	٫۹۵۶۰۹	٫۹۵۵۴۹	٫۹۵۴۸۸	٫۹۵۴۲۷	٫۹۵۳۶۶
۵۲	۴۶	۴۰	۳۵	۲۹	۲۳	۱۷	۱۲	۶	°۲۴	۹٫۹۶۰۱۶	۹٫۹۵۹۶۰	۹٫۹۵۹۰۲	۹٫۹۵۸۴۴	۹٫۹۵۷۸۶	۹٫۹۵۷۲۸
۵۰	۴۴	۳۸	۳۳	۲۸	۲۲	۱۷	۱۱	۶	°۲۳	٫۹۶۳۴۹	٫۹۶۲۹۴	٫۹۶۲۴۰	٫۹۶۱۸۵	٫۹۶۱۲۹	٫۹۶۰۷۳
۴۷	۴۲	۳۷	۳۱	۲۶	۲۱	۱۶	۱۰	۵	°۲۲	٫۹۶۶۶۵	٫۹۶۶۱۴	٫۹۶۵۶۲	٫۹۶۵۰۹	٫۹۶۴۵۶	٫۹۶۴۰۳
۴۴	۴۰	۳۴	۲۹	۲۵	۲۰	۱۵	۱۰	۵	°۲۱	٫۹۶۹۶۶	٫۹۶۹۱۷	٫۹۶۸۶۸	٫۹۶۸۱۸	٫۹۶۷۶۷	٫۹۶۷۱۶
۴۲	۳۸	۳۳	۲۸	۲۴	۱۹	۱۴	۹	۵	°۲۰	٫۹۷۲۵۲	٫۹۷۲۰۷	٫۹۷۱۵۹	٫۹۷۱۱۱	٫۹۷۰۶۳	٫۹۷۰۱۵

لوکارتمی جیوب التمام

لوکارتمی جیوب

درجه	٠	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠		١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٧٠°	٩،٩٧٢٩٩	٩،٩٧٣٤٤	٩،٩٧٣٩٠	٩،٩٧٤٣٥	٩،٩٧٤٧٩	٩،٩٧٥٢٣	١٩°	٤	٩	١٣	١٨	٢٢	٢٧	٣١	٣٦	٤٠
٧١°	،٩٧٥٦٧	،٩٧٦١٠	،٩٧٦٥٣	،٩٧٦٩٦	،٩٧٧٣٨	،٩٧٧٧٩	١٨°	٤	٩	١٣	١٧	٢١	٢٦	٣٠	٣٤	٣٨
٧٢°	،٩٧٨٢١	،٩٧٨٦١	،٩٧٩٠٢	،٩٧٩٤٢	،٩٧٩٨٢	،٩٨٠٢١	١٧°	٤	٨	١٢	١٦	٢٠	٢٤	٢٨	٣٢	٣٦
٧٣°	،٩٨٠٦٠	،٩٨٠٩٨	،٩٨١٣٦	،٩٨١٧٤	،٩٨٢١١	،٩٨٢٤٨	١٦°	٤	٨	١١	١٥	١٩	٢٢	٢٦	٣٠	٣٤
٧٤°	،٩٨٢٨٤	،٩٨٣٢٠	،٩٨٣٥٦	،٩٨٣٩١	،٩٨٤٢٦	،٩٨٤٦٠	١٥°	٤	٧	١١	١٤	١٨	٢١	٢٥	٢٨	٣٢
٧٥°	٩،٩٨٤٩٤	٩،٩٨٥٢٨	٩،٩٨٥٦١	٩،٩٨٥٩٤	٩،٩٨٦٢٧	٩،٩٨٦٥٩	١٤°	٣	٧	١٠	١٣	١٧	٢٠	٢٣	٢٦	٣٠
٧٦°	،٩٨٦٩٠	،٩٨٧٢٢	،٩٨٧٥٣	،٩٨٧٨٣	،٩٨٨١٣	،٩٨٨٤٣	١٣°	٣	٦	٩	١٢	١٥	١٨	٢١	٢٤	٢٧
٧٧°	،٩٨٨٧٢	،٩٨٩٠١	،٩٨٩٣٠	،٩٨٩٥٨	،٩٨٩٨٦	،٩٩٠١٣	١٢°	٣	٦	٨	١١	١٤	١٧	٢٠	٢٢	٢٥
٧٨°	،٩٩٠٤٠	،٩٩٠٦٧	،٩٩٠٩٣	،٩٩١١٩	،٩٩١٤٥	،٩٩١٧٠	١١°	٣	٥	٨	١٠	١٣	١٦	١٨	٢١	٢٣
٧٩°	،٩٩١٩٥	،٩٩٢١٩	،٩٩٢٤٣	،٩٩٢٦٧	،٩٩٢٩٠	،٩٩٣١٣	١٠°	٢	٥	٧	٩	١٢	١٤	١٦	١٩	٢١

	۶۰′	۵۰′	۴۰′	۳۰′	۲۰′	۱۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′
۸۰°	۹٫۹۹۹۳۳۵	۹٫۹۹۹۳۵۶	۹٫۹۹۹۳۷۹	۹٫۹۹۹۴۰۰	۹٫۹۹۹۴۲۱	۹٫۹۹۹۴۴۲	۹°	۲	۴	۶	۸	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹
۸۱°	٫۹۹۹۴۶۲	٫۹۹۹۴۸۲	٫۹۹۹۵۰۱	٫۹۹۹۵۲۰	٫۹۹۹۵۳۹	٫۹۹۹۵۵۷	۸°	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷
۸۲°	٫۹۹۹۵۷۵	٫۹۹۹۵۹۳	٫۹۹۹۶۱۰	٫۹۹۹۶۲۷	٫۹۹۹۶۴۳	٫۹۹۹۶۵۹	۷°	۲	۳	۵	۷	۸	۱۰	۱۲	۱۳	۱۵
۸۳°	٫۹۹۹۶۷۵	٫۹۹۹۶۹۰	٫۹۹۹۷۰۵	٫۹۹۹۷۲۰	٫۹۹۹۷۳۴	٫۹۹۹۷۴۸	۶°	۱	۳	۴	۶	۷	۹	۱۰	۱۲	۱۳
۸۴°	٫۹۹۹۷۶۱	٫۹۹۹۷۷۵	٫۹۹۹۷۸۷	٫۹۹۹۸۰۰	٫۹۹۹۸۱۲	٫۹۹۹۸۲۳	۵°	۱	۳	۴	۵	۶	۸	۹	۱۰	۱۱
۸۵°	۹٫۹۹۹۸۳۴	۹٫۹۹۹۸۴۵	۹٫۹۹۹۸۵۴	۹٫۹۹۹۸۶۴	۹٫۹۹۹۸۷۴	۹٫۹۹۹۸۸۵	۴°	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۸۶°	٫۹۹۹۸۹۴	٫۹۹۹۹۰۳	٫۹۹۹۹۱۱	٫۹۹۹۹۱۹	٫۹۹۹۹۲۶	٫۹۹۹۹۳۳	۳°	۱	۲	۲	۳	۴	۵	۵	۶	۷
۸۷°	٫۹۹۹۹۴۰	٫۹۹۹۹۴۷	٫۹۹۹۹۵۳	٫۹۹۹۹۵۹	٫۹۹۹۹۶۴	٫۹۹۹۹۶۹	۲°	۱	۱	۲	۲	۲	۳	۴	۴	۵
۸۸°	٫۹۹۹۹۷۴	٫۹۹۹۹۷۸	٫۹۹۹۹۸۲	٫۹۹۹۹۸۵	٫۹۹۹۹۸۸	٫۹۹۹۹۹۱	۱°	۰	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۲	۳
۸۹°	٫۹۹۹۹۹۳	٫۹۹۹۹۹۵	٫۹۹۹۹۹۶	٫۹۹۹۹۹۸	٫۹۹۹۹۹۹	۱٫۰۰۰۰۰	۰°									
۹۰°	۱٫۰۰۰۰۰۰	۰														

لوکارتمی جیوب التمام

لوکارتمی مماس

°	′۰	′۱۰	′۲۰	′۳۰	′۴۰	′۵۰		فرق ۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
°۰	∞–	۷٫۴۶۳۷۲۶	۷٫۷۶۴۷۵۶	۷٫۹۴۰۸۴۲	۸٫۰۶۵۸۱	۸٫۱۶۲۷۶۳	°۸۹	فرق یہاں اسقدر جلدی بدلتے ہیں کہ انکا درج کرنا ناممکن ہے قلیل زاویہ نَ کیلئے لوک مس نَ یا لوک مم (°۹۰-نَ) = لوک ن + ۴۶۳۷۲۶ رقم								
°۱	۸٫۲۴۱۹۲	۸٫۳۰۸۸۸	۸٫۳۶۶۸۹	۸٫۴۱۸۰۷	۸٫۴۶۳۸۵	۸٫۵۰۵۲۷	°۸۸									
°۲	۸٫۵۴۳۰۸	۸٫۵۷۷۸۸	۸٫۶۱۰۰۹	۸٫۶۴۰۰۹	۸٫۶۶۸۱۶	۸٫۶۹۴۵۳	°۸۷									
°۳	۸٫۷۱۹۴۰	۸٫۷۴۳۹۲	۸٫۷۶۵۲۵	۸٫۷۸۶۴۹	۸٫۸۰۶۷۴	۸٫۸۲۶۱۰	°۸۶									
°۴	۸٫۸۴۴۶۴	۸٫۸۶۲۴۳	۸٫۸۷۹۵۲	۸٫۸۹۵۹۸	۸٫۹۱۱۸۵	۸٫۹۲۷۱۶	°۸۵									
°۵	۸٫۹۴۲۱۹۵	۸٫۹۵۶۲۶	۸٫۹۷۰۱۳	۸٫۹۸۳۵۸	۸٫۹۹۶۶۲	۹٫۰۰۹۳۰	°۸۴									
°۶	۹٫۰۲۱۶۲	۹٫۰۳۳۶۱	۹٫۰۴۵۲۸	۹٫۰۵۶۶۶	۹٫۰۶۷۷۵	۹٫۰۷۸۵۸	°۸۳									
°۷	۹٫۰۸۹۱۴	۹٫۰۹۹۴۶	۹٫۱۰۹۵۶	۹٫۱۱۹۴۳	۹٫۱۲۹۰۹	۹٫۱۳۸۵۴	°۸۲	۹۸	۱۹۵	۲۹۳	۳۹۱	۴۸۸	۵۸۶	۶۸۴	۷۸۲	۸۷۹
°۸	۹٫۱۴۷۸۰	۹٫۱۵۶۸۸	۹٫۱۶۵۷۷	۹٫۱۷۴۵۰	۹٫۱۸۳۰۶	۹٫۱۹۱۴۶	°۸۱	۸۶	۱۷۲	۲۵۹	۳۴۵	۴۳۱	۵۱۷	۶۰۳	۶۹۰	۷۷۶
°۹	۹٫۱۹۹۷۱	۹٫۲۰۷۸۲	۹٫۲۱۵۷۸	۹٫۲۲۳۶۱	۹٫۲۳۱۳۰	۹٫۲۳۸۸۶	°۸۰	۷۸	۱۵۵	۲۳۳	۳۱۰	۳۸۸	۴۶۶	۵۴۳	۶۲۱	۶۹۸

١٠°	٩،٢٤٦٣٢	٩،٢٥٣٦٥	٩،٢٦٠٨٦	٩،٢٦٧٩٧	٩،٢٧٤٩٦	٩،٢٨١٨٧	٧٩°	٧١	١٤١	٢١٢	٢٨٢	٣٥٣	٤٢٠	٤٩٤	٥٦٤	٦٣٥
١١°	،٢٨٨٦٥	،٢٩٥٣٥	،٣٠١٩٥	،٣٠٨٤٦	،٣١٤٨٩	،٣٢١٢٢	٧٨°	٦٥	١٢٩	١٩٤	٢٥٩	٣٢٣	٣٨٨	٤٥٣	٥١٨	٥٨٢
١٢°	،٣٢٧٤٧	،٣٣٣٦٥	،٣٣٩٧٤	،٣٤٥٧٦	،٣٥١٧٠	،٣٥٧٥٧	٧٧°	٦٠	١٢٠	١٧٩	٢٣٩	٢٩٩	٣٥٩	٤١٩	٤٧٨	٥٣٨
١٣°	،٣٦٣٣٦	،٣٦٩٠٩	،٣٧٤٧٦	،٣٨٠٣٥	،٣٨٥٨٩	،٣٩١٣٦	٧٦°	٥٦	١١١	١٦٧	٢٢٢	٢٧٨	٣٣٣	٣٨٩	٤٤٥	٥٠٠
١٤°	،٣٩٦٧٧	،٤٠٢١٢	،٤٠٧٤٢	،٤١٢٦٦	،٤١٧٨٤	،٤٢٢٩٧	٧٥°	٥٢	١٠٣	١٥٦	٢٠٨	٢٦١	٣١٣	٣٦٥	٤١٧	٤٦٩
١٥°	٩،٤٢٨٠٥	٩،٤٣٣٠٨	٩،٤٣٨٠٦	٩،٤٤٢٩٩	٩،٤٤٧٨٧	٩،٤٥٢٧١	٧٤°	٤٩	٩٨	١٤٧	١٩٦	٢٤٥	٢٩٤	٣٤٣	٣٩٢	٤٤١
١٦°	،٤٥٧٥٠	،٤٦٢٢٤	،٤٦٦٩٣	،٤٧١٦٠	،٤٧٦٢٢	،٤٨٠٨٠	٧٣°	٤٦	٩٣	١٣٩	١٨٦	٢٣٢	٢٧٨	٣٢٥	٣٧١	٤١٨
١٧°	،٤٨٥٣٤	،٤٨٩٨٤	،٤٩٤٣٠	،٤٩٨٧٢	،٥٠٣١١	،٥٠٧٤٦	٧٢°	٤٤	٨٨	١٣٢	١٧٦	٢٢٠	٢٦٤	٣٠٨	٣٥٢	٣٩٦
١٨°	،٥١١٧٨	،٥١٦٠٧	،٥٢٠٣١	،٥٢٤٥٢	،٥٢٨٧٠	،٥٣٢٨٥	٧١°	٤٢	٨٤	١٢٦	١٦٨	٢١٠	٢٥٢	٢٩٤	٣٣٦	٣٧٨
١٩°	،٥٣٦٩٧	،٥٤١٠٧	،٥٤٥١٢	،٥٤٩١٥	،٥٥٣١٥	،٥٥٧١٢	٧٠°	٤٠	٨٠	١٢١	١٦٠	٢٠١	٢٤١	٢٨١	٣٢١	٣٦٢
	٦٠	٥٠	٤٠	٣٠	٢٠	١٠		١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩

لوكاريتمى ماس التمام

لوکاریتمی ماس

	٠′	١٠′	٢٠′	٣٠′	٤٠′	٥٠′		١′	٢′	٣′	٤′	٥′	٦′	٧′	٨′	٩′
٢٠°	٩،٥٦١٠٧	٩،٥٦٤٩٨	٩،٥٦٨٨٧	٩،٥٧٢٧٢	٩،٥٧٦٥٨	٩،٥٨٠٣٩	٦٩°	٣٩	٧٧	١١٦	١٥٤	١٩٣	٢٣١	٢٧٠	٣٠٨	٣٤٧
٢١°	،٥٨٤١٨	،٥٨٧٩٤	،٥٩١٦٨	،٥٩٥٤٠	،٥٩٩٠٩	،٦٠٢٧٦	٦٨°	٣٧	٧٤	١١١	١٤٨	١٨٥	٢٢٢	٢٥٩	٢٩٦	٣٣٣
٢٢°	،٦٠٦٤١	،٦١٠٠٤	،٦١٣٦٤	،٦١٧٢٢	،٦٢٠٧٩	،٦٢٤٣٣	٦٧°	٣٦	٧١	١٠٧	١٤٣	١٧٩	٢١٤	٢٥٠	٢٨٦	٣٢٢
٢٣°	،٦٢٧٨٥	،٦٣١٣٥	،٦٣٤٨٤	،٦٣٨٣٠	،٦٤١٧٥	،٦٤٥١٧	٦٦°	٣٥	٦٩	١٠٤	١٣٨	١٧٣	٢٠٨	٢٤٢	٢٧٧	٣١١
٢٤°	،٦٤٨٥٨	،٦٥١٩٧	،٦٥٥٣٥	،٦٥٨٧٠	،٦٦٢٠٤	،٦٦٥٣٧	٦٥°	٣٤	٦٧	١٠١	١٣٤	١٦٨	٢٠١	٢٣٥	٢٦٨	٣٠٢
٢٥°	٩،٦٦٨٦٧	٩،٦٧١٩٦	٩،٦٧٥٢٤	٩،٦٧٨٥٠	٩،٦٨١٧٤	٩،٦٨٤٩٧	٦٤°	٣٣	٦٥	٩٨	١٣٠	١٦٣	١٩٥	٢٢٨	٢٦٠	٢٩٣
٢٦°	،٦٨٨١٨	،٦٩١٣٨	،٦٩٤٥٧	،٦٩٧٧٤	،٧٠٠٨٩	،٧٠٤٠٤	٦٣°	٣٢	٦٣	٩٥	١٢٦	١٥٨	١٩٠	٢٢١	٢٥٣	٢٨٤
٢٧°	،٧٠٧١٧	،٧١٠٢٨	،٧١٣٣٩	،٧١٦٤٨	،٧١٩٥٥	،٧٢٢٦٢	٦٢°	٣١	٦٢	٩٢	١٢٣	١٥٤	١٨٥	٢١٦	٢٤٦	٢٧٧
٢٨°	،٧٢٥٦٧	،٧٢٨٧٢	،٧٣١٧٥	،٧٣٤٧٩	،٧٣٧٧٧	،٧٤٠٧٧	٦١°	٣٠	٦٠	٩٠	١٢٠	١٥١	١٨١	٢١١	٢٤١	٢٧١
٢٩°	،٧٤٣٧٥	،٧٤٦٧٢	،٧٤٩٦٩	،٧٥٢٦٤	،٧٥٥٥٨	،٧٥٨٥٢	٦٠°	٢٩	٥٩	٨٨	١١٨	١٤٧	١٧٧	٢٠٦	٢٣٦	٢٦٥

	٦٠	٥٠	٤٠	٣٠	٢٠	١٠		١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٣٠	٩٫٧٦١٤٤	٩٫٧٦٤٣٥	٩٫٧٦٧٢٥	٩٫٧٧٠١٥	٩٫٧٧٣٠٣	٩٫٧٧٥٩١	٥٩	٢٩	٥٨	٨٧	١١٦	١٤٤	١٧٣	٢٠٢	٢٣١	٢٦٠
٣١	٫٧٧٨٧٧	٫٧٨١٦٣	٫٧٨٤٤٨	٫٧٨٧٣٢	٫٧٩٠١٥	٫٧٩٢٩٧	٥٨	٢٨	٥٧	٨٥	١١٣	١٤٢	١٧٠	١٩٨	٢٢٧	٢٥٥
٣٢	٫٧٩٥٧٩	٫٧٩٨٦٠	٫٨٠١٤٠	٫٨٠٤١٩	٫٨٠٦٩٦	٫٨٠٩٧٥	٥٧	٢٨	٥٦	٨٤	١١٢	١٣٩	١٦٧	١٩٥	٢٢٣	٢٥١
٣٣	٫٨١٢٥٢	٫٨١٥٢٨	٫٨١٨٠٣	٫٨٢٠٧٨	٫٨٢٣٥٢	٫٨٢٦٢٤	٥٦	٢٨	٥٥	٨٣	١١٠	١٣٧	١٦٥	١٩٢	٢٢٠	٢٤٦
٣٤	٫٨٢٨٩٩	٫٨٣١٧١	٫٨٣٤٤٢	٫٨٣٧١٣	٫٨٣٩٨٣	٫٨٤٢٥٤	٥٥	٢٧	٥٤	٨١	١٠٨	١٣٦	١٦٣	١٩٠	٢١٧	٢٤٤
٣٥	٩٫٨٤٥٢٣	٩٫٨٤٧٩١	٩٫٨٥٠٥٩	٩٫٨٥٣٢٧	٩٫٨٥٥٩٣	٩٫٨٥٨٦٠	٥٤	٢٧	٥٤	٨٠	١٠٧	١٣٤	١٦١	١٨٨	٢١٤	٢٤١
٣٦	٫٨٦١٢٦	٫٨٦٣٩٢	٫٨٦٦٥٤	٫٨٦٩٢١	٫٨٧١٨٥	٫٨٧٤٤٨	٥٣	٢٦	٥٣	٧٩	١٠٦	١٣٢	١٥٨	١٨٥	٢١٢	٢٣٨
٣٧	٫٨٧٧١١	٫٨٧٩٧٤	٫٨٨٢٣٧	٫٨٨٤٩٨	٫٨٨٧٥٩	٫٨٩٠٢٠	٥٢	٢٦	٥٢	٧٨	١٠٥	١٣١	١٥٧	١٨٣	٢٠٩	٢٣٦
٣٨	٫٨٩٢٨١	٫٨٩٥٤١	٫٨٩٨٠١	٫٩٠٠٦١	٫٩٠٣٢٠	٫٩٠٥٧٨	٥١	٢٦	٥٢	٧٨	١٠٤	١٣٠	١٥٦	١٨٢	٢٠٨	٢٣٤
٣٩	٫٩٠٨٣٧	٫٩١٠٩٥	٫٩١٣٥٣	٫٩١٦١٠	٫٩١٨٦٨	٫٩٢١٢٥	٥٠	٢٦	٥٢	٧٧	١٠٣	١٢٩	١٥٥	١٨٠	٢٠٦	٢٣٢

لوكاريتم ماس التمام

لوکاریتمی تماسس

	۰′	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′		۱′	۲′	۳′	فرق ۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′
۴۰°	۹٫۹۲۳۸۱	۹٫۹۲۶۳۸	۹٫۹۲۸۹۴	۹٫۹۳۱۵۰	۹٫۹۳۴۰۶	۹٫۹۳۶۶۱	۴۹°	۲۶	۵۱	۷۷	۱۰۲	۱۲۸	۱۵۴	۱۷۹	۲۰۵	۲۳۰
۴۱°	٫۹۳۹۱۶	٫۹۴۱۷۱	٫۹۴۴۲۶	٫۹۴۶۸۱	٫۹۴۹۳۵	٫۹۵۱۹۰	۴۸°	۲۵	۵۱	۷۶	۱۰۲	۱۲۷	۱۵۳	۱۷۸	۲۰۴	۲۲۹
۴۲°	٫۹۵۴۴۴	٫۹۵۶۹۸	٫۹۵۹۵۲	٫۹۶۲۰۵	٫۹۶۴۵۹	٫۹۶۷۱۲	۴۷°	۲۵	۵۱	۷۶	۱۰۱	۱۲۷	۱۵۲	۱۷۷	۲۰۳	۲۲۸
۴۳°	٫۹۶۹۶۶	٫۹۷۲۱۹	٫۹۷۴۷۲	٫۹۷۷۲۵	٫۹۷۹۷۸	٫۹۸۲۳۱	۴۶°	۲۵	۵۱	۷۶	۱۰۱	۱۲۷	۱۵۲	۱۷۷	۲۰۲	۲۲۸
۴۴°	٫۹۸۴۸۴	٫۹۸۷۳۷	٫۹۸۹۸۹	٫۹۹۲۴۲	٫۹۹۴۹۵	٫۹۹۷۴۸	۴۵°	۲۵	۵۱	۷۶	۱۰۱	۱۲۷	۱۵۲	۱۷۷	۲۰۲	۲۲۸
۴۵°	۱۰٫۰۰۰۰۰۰	۱۰٫۰۰۲۵۳	۱۰٫۰۰۵۰۵	۱۰٫۰۰۷۵۸	۱۰٫۰۱۰۱۱	۱۰٫۰۱۲۶۳	۴۴°	۲۵	۵۱	۷۶	۱۰۱	۱۲۷	۱۵۲	۱۷۷	۲۰۲	۲۲۸
۴۶°	٫۰۱۵۱۶	٫۰۱۷۶۹	٫۰۲۰۲۲	٫۰۲۲۷۵	٫۰۲۵۲۸	٫۰۲۷۸۱	۴۳°	۲۵	۵۱	۷۶	۱۰۱	۱۲۷	۱۵۲	۱۷۷	۲۰۲	۲۲۸
۴۷°	٫۰۳۰۳۴	٫۰۳۲۸۸	٫۰۳۵۴۱	٫۰۳۷۹۵	٫۰۴۰۴۸	٫۰۴۳۰۲	۴۲°	۲۵	۵۱	۷۶	۱۰۱	۱۲۷	۱۵۲	۱۷۷	۲۰۳	۲۲۸
۴۸°	٫۰۴۵۵۶	٫۰۴۸۱۰	٫۰۵۰۶۵	٫۰۵۳۱۹	٫۰۵۵۷۴	٫۰۵۸۲۹	۴۱°	۲۵	۵۱	۷۶	۱۰۲	۱۲۷	۱۵۳	۱۷۸	۲۰۴	۲۲۹
۴۹°	٫۰۶۰۸۴	٫۰۶۳۳۹	٫۰۶۵۹۴	٫۰۶۸۵۰	٫۰۷۱۰۶	٫۰۷۳۶۲	۴۰°	۲۶	۵۱	۷۷	۱۰۲	۱۲۸	۱۵۴	۱۷۹	۲۰۵	۲۳۰

٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١		١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠	٦٠	
٢٣٢	٢٠٦	١٨٠	١٥٥	١٢٩	١٠٣	٧٧	٥٢	٢٦	٣٩°	١٠٫٠٨٩٠٥	١٠٫٠٨٦٤٦	١٠٫٠٨٣٩٠	١٠٫٠٨١٣٢	١٠٫٠٧٨٧٥	١٠٫٠٧٦١٩	٥٠°
٢٣٤	٢٠٨	١٨٢	١٥٦	١٣٠	١٠٤	٧٨	٥٢	٢٦	٣٨°	٫١٠٢٥٩	٫١٠١٩٩	٫٠٩٩٣٩	٫٠٩٦٨٠	٫٠٩٤٢٢	٫٠٩١٦٣	٥١°
٢٣٦	٢٠٩	١٨٣	١٥٧	١٣١	١٠٥	٧٨	٥٢	٢٦	٣٧°	٫١٢٠٢٦	٫١١٧٦٣	٫١١٥٠٢	٫١١٢٤١	٫١٠٩٨٠	٫١٠٧١٩	٥٢°
٢٣٨	٢١٢	١٨٥	١٥٨	١٣٢	١٠٦	٧٩	٥٣	٢٦	٣٦°	٫١٣٦٠٨	٫١٣٣٤٤	٫١٣٠٧٩	٫١٢٨١٥	٫١٢٥٥٢	٫١٢٢٨٩	٥٣°
٢٤١	٢١٤	١٨٨	١٦٠	١٣٤	١٠٧	٨٠	٥٤	٢٧	٣٥°	٫١٥٢٠٩	٫١٤٩٤١	٫١٤٦٧٣	٫١٤٤٠٦	٫١٤١٤٠	٫١٣٨٧٤	٥٤°
٢٤٣	٢١٧	١٩٠	١٦٢	١٣٦	١٠٨	٨١	٥٣	٢٧	٣٤°	١٠٫١٦٨٢٩	١٠٫١٦٥٥٨	١٠٫١٦٢٨٦	١٠٫١٦٠١٧	١٠٫١٥٧٤٧	١٠٫١٥٤٧٧	٥٥°
٢٤٧	٢٢٠	١٩٢	١٦٥	١٣٧	١١٠	٨٣	٥٥	٢٨	٣٣°	٫١٨٤٧٢	٫١٨١٩٦	٫١٧٩٢٢	٫١٧٦٤٨	٫١٧٣٧٤	٫١٧١٠١	٥٦°
٢٥١	٢٢٣	١٩٥	١٦٧	١٣٩	١١٢	٨٤	٥٦	٢٨	٣٢°	٫٢٠١٣٠	٫١٩٨٦٠	٫١٩٥٨١	٫١٩٣٠٣	٫١٩٠٢٥	٫١٨٧٤٨	٥٧°
٢٥٥	٢٢٧	١٩٨	١٧٠	١٤٢	١١٣	٨٥	٥٧	٢٨	٣١°	٫٢١٨٣٦	٫٢١٥٥٢	٫٢١٢٦٨	٫٢٠٩٨٥	٫٢٠٧٠٣	٫٢٠٤٢١	٥٨°
٢٦٠	٢٣١	٢٠٢	١٧٣	١٤٤	١١٦	٨٧	٥٨	٢٩	٣٠°	٫٢٣٥٩٥	٫٢٣٢٧٥	٫٢٢٩٨٥	٫٢٢٦٩٦	٫٢٢٤٠٩	٫٢٢١٢٣	٥٩°

لوکاریتمی مماس التمام

لوكاريتمى مماس

	٥٠′	٤٠′	٣٠′	٢٠′	١٠′	٠′		١′	٢′	٣′	٤′	٥′	٦′	٧′	٨′	٩′
٦٠°	١٠٫٢٣٨٥٦	١٠٫٢٤١٤٨	١٠٫٢٤٤٤٢	١٠٫٢٤٧٣٦	١٠٫٢٥٠٣١	١٠٫٢٥٣٢٧	٢٩°	٢٩	٥٩	٨٨	١١٨	١٤٧	١٧٧	٢٠٦	٢٣٦	٢٦٥
٦١°	٫٢٥٦٢٥	٫٢٥٩٢٣	٫٢٦٢٢٣	٫٢٦٥٢٤	٫٢٦٨٢٥	٫٢٧١٢٨	٢٨°	٣٠	٦٠	٩٠	١٢٠	١٥١	١٨١	٢١١	٢٤١	٢٧١
٦٢°	٫٢٧٤٣٠	٫٢٧٧٣٨	٫٢٨٠٤٥	٫٢٨٣٥٢	٫٢٨٦٦١	٫٢٨٩٧٢	٢٧°	٣١	٦٢	٩٢	١٢٣	١٥٤	١٨٥	٢١٦	٢٤٦	٢٧٧
٦٣°	٫٢٩٢٨٣	٫٢٩٥٩٤	٫٢٩٩١١	٫٣٠٢٢٤	٫٣٠٥٤٣	٫٣٠٨٦٢	٢٦°	٣٢	٦٣	٩٥	١٢٦	١٥٨	١٩٠	٢٢١	٢٥٣	٢٨٤
٦٤°	٫٣١١٨٢	٫٣١٥٠٣	٫٣١٨٢٤	٫٣٢١٥٠	٫٣٢٤٧٤	٫٣٢٨٠٢	٢٥°	٣٣	٦٥	٩٨	١٣٠	١٦٣	١٩٥	٢٢٨	٢٦٠	٢٩٣
٦٥°	١٠٫٣٣١٣٣	١٠٫٣٣٤٦٣	١٠٫٣٣٧٩٤	١٠٫٣٤١٣٠	١٠٫٣٤٤٦٥	١٠٫٣٤٨٠٣	٢٤°	٣٤	٦٧	١٠١	١٣٤	١٦٨	٢٠١	٢٣٥	٢٦٨	٣٠٢
٦٦°	٫٣٥١٤٢	٫٣٥٤٨٣	٫٣٥٨٢٥	٫٣٦١٧٠	٫٣٦٥١٤	٫٣٦٨٦٥	٢٣°	٣٥	٦٩	١٠٤	١٣٨	١٧٣	٢٠٨	٢٤٢	٢٧٧	٣١١
٦٧°	٫٣٧٢١٥	٫٣٧٥٦٧	٫٣٧٩٢١	٫٣٨٢٧٨	٫٣٨٦٣٤	٫٣٨٩٩٦	٢٢°	٣٦	٧٢	١٠٧	١٤٣	١٧٩	٢١٥	٢٥١	٢٨٦	٣٢٢
٦٨°	٫٣٩٣٥٩	٫٣٩٧٢٣	٫٤٠٠٩١	٫٤٠٤٦٠	٫٤٠٨٣٢	٫٤١٢٠٦	٢١°	٣٧	٧٤	١١١	١٤٨	١٨٥	٢٢٢	٢٥٩	٢٩٦	٣٣٣
٦٩°	٫٤١٥٨٢	٫٤١٩٦١	٫٤٢٣٤٣	٫٤٢٧٢٦	٫٤٣١١٣	٫٤٣٥٠٢	٢٠°	٣٩	٧٧	١١٦	١٥٤	١٩٣	٢٣١	٢٧٠	٣٠٨	٣٤٦

	٦٠	٥٠	٤٠	٣٠	٢٠	١٠		١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
[illegible]	١٠،٤٢٧٨٩٣	١٠،٤٣٣٧٨٨	١٠،٤٣٤٦٨٥	١٠،٤٣٥٠٨٥	١٠،٤٣٥٢٨٨	١٠،٤٣٥٨٩٣	٩	٤٠	٨٠	١٢١	١٦٠	٢٠١	٢٤١	٢٨١	٣٢١	٣٦٢
[illegible]	،٤٣٦٣٠٣	،٤٣٦٧١٥	،٤٣٧١٣٠	،٤٣٧٥٣٨	،٤٣٧٩٧٩	،٤٣٨٢٩٣	٨	٤٢	٨٣	١٢٤	١٦٨	٢١٠	٢٥٢	٢٩٣	٣٣٦	٣٧٨
[illegible]	،٤٨٨٢٢	،٤٩٢٥٤	،٤٩٦٨٩	،٥٠١٢٨	،٥٠٥٧٠	،٥١٠١٤	٧	٤٤	٨٨	١٣٢	١٧٦	٢٢٠	٢٦٤	٣٠٨	٣٥٢	٣٩٦
[illegible]	،٥١٤٦٦	،٥١٩٢٠	،٥٢٣٧٨	،٥٢٨٤٠	،٥٣٣٠٦	،٥٣٧٧٦	١٤	٤٦	٩٢	١٣٩	١٨٥	٢٣٢	٢٧٨	٣٢٥	٣٧١	٤١٨
[illegible]	،٥٤٢٥٠	،٥٤٧٢٩	،٥٥٢١٣	،٥٥٧٠١	،٥٦١٩٤	،٥٦٦٩٢	١٥	٤٩	٩٨	١٤٧	١٩٦	٢٤٥	٢٩٤	٣٤٣	٣٩٢	٤٤٢
[illegible]	١٠،٥٧١٩٥	١٠،٥٧٧٠٣	١٠،٥٨٢١٦	١٠،٥٨٧٣٣	١٠،٥٩٢٥٨	١٠،٥٩٧٨٩	١٢	٥٢	١٠٣	١٥٧	٢٠٨	٢٦١	٣١٣	٣٦٥	٤١٧	٤٦٩
[illegible]	،٦٠٣٢٣	،٦٠٨٦٣	،٦١٤١١	،٦١٩٦٥	،٦٢٥٣٣	،٦٣٠٩١	١٣	٥٦	١١١	١٦٧	٢٢٢	٢٧٨	٣٣٣	٣٨٩	٤٤٥	٥٠٠
[illegible]	،٦٣٦٦٤	،٦٤٢٤٣	،٦٤٨٣٠	،٦٥٤٣٣	،٦٦٠٢٦	،٦٦٦٣٥	١٢	٦٠	١٢٠	١٧٩	٢٣٩	٢٩٩	٣٥٩	٤١٩	٤٧٨	٥٣٨
[illegible]	،٦٧٢٥٣	،٦٧٨٧٨	،٦٨٥١١	،٦٩١٥٣	،٦٩٨٠٥	،٧٠٤٦٥	١١	٦٥	١٢٩	١٩٤	٢٥٩	٣٢٣	٣٨٨	٤٥٣	٥١٨	٥٨٢
[illegible]	،٧١١٣٥	،٧١٨١٣	،٧٢٥٠٣	،٧٣٢٠٣	،٧٣٩١٣	،٧٤٦٣٥	١٠	٧١	١٤١	٢١٢	٢٨٢	٣٥٤	٤٢٠	٤٩٤	٥٦٤	٦٣٥

لوكانتي كاسس التمام

لوگارثمی مماس

درجه	٠′	١٠′	٢٠′	٣٠′	٤٠′	٥٠′		١′	٢′	٣′	٤′ فرق	٥′	٦′	٧′	٨′	٩′
٨٠°	١٠٫٧٥٣٦٨	١٠٫٧٦١١٣	١٠٫٧٦٨٧٠	١٠٫٧٧٦٣٩	١٠٫٧٨٤٢٢	١٠٫٧٩٢١٨	٩°	٧٨	١٥٥	٢٣٣	٣١٠	٣٨٨	٤٦٦	٥٤٣	٦٢١	٦٩٨
٨١°	١٠٫٨٠٠٢٩	١٠٫٨٠٨٥٤	١٠٫٨١٦٩٤	١٠٫٨٢٥٥٠	١٠٫٨٣٤٢٢	١٠٫٨٤٣١٢	٨°	٨٧	١٧٣	٢٦٠	٣٤٦	٤٣٣	٥١٩	٦٠٦	٦٩٢	٧٧٩
٨٢°	١٠٫٨٥٢٣٠	١٠٫٨٦١٤٦	١٠٫٨٧٠٩١	١٠٫٨٨٠٥٦	١٠٫٨٩٠٤٤	١٠٫٩٠٠٥٣	٧°	٩٨	١٩٥	٢٩٣	٣٩١	٤٨٨	٥٨٦	٦٨٤	٧٨٢	٨٧٩
٨٣°	١٠٫٩١٠٨٦	١٠٫٩٢١٤٢	١٠٫٩٣٢٢٥	١٠٫٩٤٣٣٤	١٠٫٩٥٤٧٢	١٠٫٩٦٦٣٩	٦°									
٨٤°	١٠٫٩٧٨٣٨	١٠٫٩٩٠٧٠	١١٫٠٠٣٣٨	١١٫٠١٦٤٣	١١٫٠٢٩٨٦	١١٫٠٤٣٧٢	٥°									
٨٥°	١١٫٠٥٨٠٥	١١٫٠٧٢٨٤	١١٫٠٨٨١٥	١١٫١٠٤٠٢	١١٫١٢٠٤٧	١١٫١٣٧٥٦	٤°									
٨٦°	١١٫١٥٥٣٤	١١٫١٧٣٩٠	١١٫١٩٣٣٤	١١٫٢١٣٥١	١١٫٢٣٤٧٥	١١٫٢٥٧٠٨	٣°									
٨٧°	١١٫٢٨٠٦٠	١١٫٣٠٥٤٧	١١٫٣٣١٨٤	١١٫٣٥٩٩١	١١٫٣٨٩٩١	١١٫٤٢٢١٢	٢°									
٨٨°	١١٫٤٥٦٩٢	١١٫٤٩٤٧٣	١١٫٥٣٧١٥	١١٫٥٨١٩٣	١١٫٦٣٣١١	١١٫٦٩١١٢	١°									
٨٩°	١١٫٧٥٨٠٦	١١٫٨٣٧٢٧	١١٫٩٣٣١٩	١٢٫٠٥٩١٣	١٢٫٢٣٥٢٤	١٢٫٥٣٦٢٧	٠°									
	٦٠′	٥٠′	٤٠′	٣٠′	٢٠′	١٠′		١′	٢′	٣′	٤′	٥′	٦′	٧′	٨′	٩′

فرق اسقدر جلدی بدلتے ہیں کہ درج نہیں ہو سکتے

٢٠+

لوگارثمی مماس التمام

مقادیر مستقلہ

ایک زاویہ نیمقطری = ۵۷° ۱۷′ ۴۵″ تقریباً = ۲۰۶۲۶۵″

لوک ۲۰۶۲۶۵ = ۵،۳۱۴۴۲۵۵

π = ۳،۱۴۱۵۹۲۶۵	لوک π = ۰،۴۹۷۱۴۹۹
$\frac{1}{\pi}$ = ۰،۳۱۸۳۰۹۸۹	لوک $\frac{1}{\pi}$ = ۱̄،۵۰۲۸۵۰۱
$\frac{\pi}{180}$ = ۰،۰۱۷۴۵۳۲۹	لوک $\frac{\pi}{180}$ = ۲̄،۲۴۱۸۷۷۴
$\frac{180}{\pi}$ = ۵۷،۲۹۵۷۷۹۵	لوک $\frac{180}{\pi}$ = ۱،۷۵۸۱۲۲۶
π^2 = ۹،۸۶۹۶۰۴۴۰	لوک π^2 = ۰،۹۹۴۲۹۹۷
$\frac{1}{\pi^2}$ = ۰،۱۰۱۳۲۱۱۸	لوک $\frac{1}{\pi^2}$ = ۱̄،۰۰۵۷۰۰۳
$\sqrt{\pi}$ = ۱،۷۷۲۴۵۳۸۵	لوک $\sqrt{\pi}$ = ۰،۲۴۸۵۷۴۹
$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ = ۰،۵۶۴۱۸۹۵۸	لوک $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ = ۱̄،۷۵۱۴۲۵۱
$\sqrt[3]{\pi}$ = ۱،۴۶۴۵۹۱۸۹	لوک $\sqrt[3]{\pi}$ = ۰،۱۶۵۷۱۶۶
$\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$ = ۰،۶۸۲۷۸۴۰۶	لوک $\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$ = ۱̄،۸۳۴۲۸۳۴
$\sqrt{2}$ = ۱،۴۱۴۲۱۳۵...	$\sqrt{3}$ = ۱،۷۳۲۰۵۰۸...
$\sqrt{5}$ = ۲،۲۳۶۰۶۷۹...	$\sqrt{6}$ = ۲،۴۴۹۴۸۹۸۹...
$\sqrt{7}$ = ۲،۶۴۵۷۵۱۳...	$\sqrt{8}$ = ۲،۸۲۸۴۲۷۱...
$\sqrt{10}$ = ۳،۱۶۲۲۷۷۶...	

تمّت

TRIGONOMETRY.

Angle (Right angle)	زاویہ (زاویہ قائمہ)
Arc	قوس
Angle of Elevation	زاویہ ارتفاع
Angle of depression	زاویہ انخفاض
Ambiguous case	صورت مشتبہ
Bisector (Internal) (External)	منصف { داخلی / خارجی }
Base line	بنیادی خط
Bearings (Compass)	جہات
Circular measure	قوسی پیمانہ
Centesimal measure	مئی پیمانہ
Clock wise (Counter clock wise)	موافق سمت ساعت (مقابل سمت ساعت)
Constants	مقادیر مستقلہ
Circumference	محیط
Chord	وتر
Cosine	جیب التمام
Cotangent	مماس التمام
Cosecant	قاطع التمام

Coversed Sine	سہم التمام
Complementary angles	متمم زاویے
Complement	متمم
Characteristic	ممیز
Circum-circle	بیرونی دائرہ
Centroid	مرکز ہندسی
Circum-centre	بیرونی دائرہ کا مرکز
Circular Functions	مستدیر جملے
Degree, Minute, Second.	درجہ، دقیقہ، ثانیہ
Decagon	معشر
Duodecagon	اثنا عشری
Dip (of the horizon)	(اُفق کا) میلان
Dimensions	ابعاد
Diameter	قطر
Equilateral (Triangle)	(مثلث) متساوی الاضلاع
Elevation	ارتفاع
Elements (of a triangle)	(مثلث کے) اجزا
Escribed circle	جانبی دائرہ
Elimination	اسقاط
Excentric triangle	جانبی مرکزوں کا مثلث
Fixed (lines, Axes)	ثابت (خطوط، محاور)

اساسی (ضابطے)	Fundamental (Formulae)
ضابطہ	Formula
جغرافی (میل)	Geographical (miles)
ترسیم	Graph
اتار چڑھاؤ	Gradiant
مسبع	Heptagon
لاتناہی	Infinity
(مثلث) متساوی الساقین	Isosceles (triangle)
متماثلات	Identities
اندرونی دائرہ	Incircle
اندرونی دائرہ کا مرکز	Incentre
مقلوب مستدیر چلے	Inverse Circular functions
متباین	Incommensurable
عرض بلد	Latitude
لوکارتم	Logarithm
خط میلان اعظم	Line of greatest slope
نصف النہار	Meridian
اضعافی زاویے	Multiple angles
اعشاریہ لوکارتمی	Mantissa
وسطانیہ	Median
نونقطی دائرہ	Nine point circle

Normal (to an ellipse)	(اہلیلجی کا)، عماد
Ortho-centre	مرکز عمودی
Octagon	مثمن
Orbit (Earth)	مدار (زمین)
Obtuse, Acute (Angles)	(زاویہ) منفرجہ (زاویہ) حادہ
Plane (Trigonometry)	(علم مثلث) مستوی
Perimeter	گھیرا۔ مجموعۂ اضلاع
Pentagon	مخمس
Point (Line) at infinity	لامتناہی پر کا نقطہ
Periods	ادوار
Periodic functions	عملات دوریّہ
Proportional parts (principle of)	(اصول) اجزائے متناسب
Pedal triangle	مثلث پائین
Projection	تظلیل (ظل)
Quadrant	رُبع
Quadrilateral	ذوار بعۃ الاضلاع
Revolving line	خط دائر
Right angled triangle	مثلث قائم الزاویہ
Radian	نیمقطری
Regular (polygon)	منتظم (کثیرالاضلاع)
Radius	نصف قطر

Rectilinear (figure)	(شکل) مستقیم الاضلاع
Reciprocal	متکافی
Spherical (Trigonometry)	(علم مثلث) کروی
Sexagesimal measure	ستینی پیمانہ
Sector	قطاع (دائرہ)
Semi-circle	نصف دائرہ
Segment	قطعہ (دائرہ)
Sirius	شعری
Sine	جیب
Secant	قاطع التمام
Sextant	سُدس
Supplement	تکملہ
Submultiple angles	کسری زاویے
Subsidiary angles	امدادی زاویے
Solution (of triangles)	(مثلثوں کا) حل
Trigonometry	علم مثلث
Theorem	مسئلہ (اثباتی)
Trigonometrical (ratios)	مثلثی (نسبتیں)
Tangent	مماس
Theodolite	زاویہ بیں
Tables (of Logarithm)	جداول (لوکارتمی)

سہم الجیب، جیب معکوس	Versed Sine
اُفق مرئی	Visible horizon (Offing)
مثلث کے زاویے اور اضلاع	Angle and sides of a triangle
اَ، بَ، جَ	a, b, c,
ا، ب، ج	A. B. C.
(حیت)	II